TEKST SHKOLLOR PËR VITIN E PARË TË ARSIMIT GJIMNAZIST

# MATEMATIKA I

Dr. Kostadin Trençevski
Dr. Biljana Krsteska
Dr. Gjorgji Markoski
Mr. Jasmina Markoska

lamina

**MATEMATIKA I, tekst shkollor për vitin e parë të arsimit gjimnazist**
Të drejtat autoriale © 2025 Ars Lamina

**Botues**
Ars Lamina – publikime, Shkup 2025

**Redaktor kryesor**
Branka Bugariska

**Redaktor**
Biljana Stojoska Zlatkov

**Autorë**
Dr. Kostadin Trençevski
Dr. Biljana Krsteska
Dr. Gjorgji Markoski
Mr. Jasmina Markoska

**Përkthimi nga gjuha maqedone**
(„Математика I, учебник за прва година гимназиско образование“, Арс Ламина 2025)
Dr. Emin Durmishi

**Redaktim gjuhësor**
Refail Sulejmani

**Dizajn**
Pointer Creative Agency

**Rregullim grafik dhe teknik**
Ars Lamina – publikime

**Shtypi**
Branko Gapo – prodhim grafik, Shkup 2025

**Tirazh**
2000

Të gjitha të drejtat janë të rezervuara. Asnjë pjesë e këtij libri nuk guxon të riprodhohet ose transmetohet në ndonjë formë ose me ndonjë mjet, elektronik ose mekanik, përfshirë fotokopjimin, regjistrimin ose ruajtjen në ndonjë sistem për rikthim pa lejen me shkrim të botuesit.

Ky tekst shkollor është miratuar për përdorim në arsimin e mesëm gjimnazist, me Vendimin për miratimin dhe përdorimin e tekstit shkollor për lëndën mësimore Matematikë për vitin e parë të arsimit gjimnazist nr. 26-945/1, datë 27.08.2025, nga Ministria e Arsimit dhe Shkencës e Republikës së Maqedonisë së Veriut.

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

373.5:51(075.3)=18

MATEMATIKA I : tekst shkollor për vitin e parë të arsimit gjimnazist / Kostadin Trençevski ... [и др.] ; [përkthimi nga gjuha maqedone Emin Durmishi]. - Shkup : Ars Lamina-publikime, 2025. - 370 стр. : илустр. ; 26 см

Превод на делото: Математика I, учебник за прва година гимназиско образование. - Други автори: Biljana Krsteska, Gjorgji Markoski, Jasmina Markoska

ISBN 978-608-280-185-8

1. Trençevski, Kostadin [автор] 2. Krsteska, Biljana [автор] 3.Markoski, Gjorgji [автор] 4. Markoska, Jasmina [автор]

COBISS.MK-ID 67024901

# PARATHËNIE

Teksti shkollor Matematika për vitin e parë të arsimit të gjimnazit është shkruar sipas programit të ri mësimor për gjimnazet. Me qëllim të afrimit të materialit te nxënësit, paraqitja e përmbajtjeve të reja është shpalosur kryesisht përmes shembujve, me anë të të cilëve njohuritë e mëhershme do të lidhen me materialin e ri. Çdo mësim fillon me përsëritjen e njohurive të më hershme dhe jep një hyrje dhe motivim për përmbajtjet e ardhshme.

Teksti shkollor përbëhet nga gjashtë tema.
**Në temën e parë "Numrat dhe veprimet me numra"** do t'i përsëritni dhe thelloni dijet e deritanishme nga bashkësitë dhe veprimet me bashkësi, si dhe prodhimin Kartezian. Më tej do ta rrumbullakoni dijen tuaj të deritanishme për numrat nga numrat natyrorë deri te numrat realë. Në fund, në pjesën e proporcioneve, do të njiheni me interesin (kamatën) (e thjeshtë dhe të përbërë) dhe tatimet, të cilat i paguajnë firmat dhe qytetarët në buxhetin e shtetit.

**Në temën e dytë "Shprehjet algjebrike racionale"** do t'i thelloni dijet e deritanishme nga fuqitë dhe rrënjët, si dhe nga shprehjet e plota algjebrike dhe thyesore-racionale. Veprimet me rrënjë dhe polinome duhet të zotërohen deri në punë rutinore.

**Tema e tretë "Funksioni, barazimi, sistemi i dy barazimeve dhe jobarazimi"** është gjithashtu nga algjebra. Këtu do të njiheni me funksionet e fuqisë dhe funksionet eksponenciale, grafikët e tyre, me metodat e zgjidhjes së sistemeve me dy barazime lineare, si dhe zgjidhjen e jobarazimeve.

**Tema e katërt "Gjeometria"** i referohet gjeometrisë në rrafsh (gjeometrisë planare) dhe këtu trajtohen vektorët, si dhe format 2D. Këtu për herë të parë do të njiheni edhe me funksionet trigonometrike të këndit të ngushtë, të cilat përfaqësojnë një mjet themelor në praktikën inxhinierike. Njohuritë nga kjo fushë përfaqësojnë çelësin për njohuritë e ardhshme matematikore në shkollën e mesme.

**Tema e pestë "Matja"** gjithashtu i është përkushtuar gjeometrisë, por përveç formave 2D trajtohen edhe format 3D. Kjo temë kryesisht i referohet njehsimit së sipërfaqes dhe vëllimit të disa formave 2D dhe 3D.

**Tema e gjashtë "Puna me të dhëna"** trajton konceptet nga probabiliteti, ndërsa gjithashtu i referohet mbledhjes së të dhënave, përpunimit të tyre dhe paraqitjes në lloje të ndryshme diagramesh.

Për të ndjekur më lehtë mësimet, përdoren fusha të ndryshme.



Në këtë fushë përcaktohen elementet më të rëndësishme në mësim.



Në këtë fushë theksohen vetitë ose pohimet në mësim.

## SHEMBULLI 1

Këtu jepen shembuj të zgjidhur dhe ata më së shpeshti janë zgjedhur nga jeta e përditshme.

Pas shembujve zakonisht ka edhe detyrë në të cilën duhet të aplikoni njohuritë e fituara.

Në fund të çdo mësimi jepen detyra me të cilat nxënësi do të mund t'i kontrollojë njohuritë e tija, ndërsa në fund të çdo teme ka detyra për përsëritjen e temës në tërësi.

Pas detyrave për ushtrim në çdo njësi mësimore ka hulumtim me të cilin kërkohet nga nxënësit të aplikojnë të mësuarit.

Edhe përkundër përpjekjeve të bëra, janë të mundshme disa gabime teknike, të cilat sigurisht do të eliminohen në botimin e ardhshëm. Jemi mirënjohës paraprakisht për çdo kritikë me qëllim të mirë për përmirësimin e tekstit shkollor. Do të na gëzojë veçanërisht nëse ky tekst shkollor do të kontribuojë më shumë që ju të dashuroni matematikën dhe të bëhet lënda juaj e preferuar.

# PËRMBAJTJA


## TEMA 1: NUMRAT DHE VEPRIMET ME NUMRA

1.1. Bashkësia. Nënbashkësia ... 8
1.2. Bashkësitë ekuivalente dhe numrat kardinalë ... 12
1.3. Veprimet me bashkësi ... 16
1.4. Zgjidhja e problemeve me zbatim të bashkësive ... 23
1.5. Prodhimi Kartezian i bashkësive ... 28
1.6. Numrat natyrorë ... 34
1.7. Numrat e plotë dhe veprimet me numra të plotë ... 44
1.8. Numrat racionalë dhe veprimet me numra racionalë ... 49
1.9. Numrat realë dhe intervalet në drejtëzën reale ... 59
1.10. Raportet dhe përpjesëtimet ... 65
1.11. Njehsimi me përqindje ... 74
1.12. Rregulla e thjeshtë dhe e përbërë e treshit ... 82
1.13. Njehsimi i ndarjes ... 86
1.14. Njehsimi i përzierjeve ... 89
1.15. Njehsimi i interesit ... 92
DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM ... 97

## TEMA 2: SHPREHJET ALGJEBRIKE RACIONALE

2.1. Fuqia dhe vlera e fuqisë me tregues numër natyror ... 102
2.2. Rrënja katrore dhe kubike ... 106
2.3. Veprime me fuqitë me tregues numër natyror ... 109
2.4. Fuqia me tregues fuqie numër të plotë dhe numër racional ... 115
2.5. Paraqitja e numrave në formë eksponenciale ... 120
2.6. Shprehjet algjebrike racionale ... 124
2.7. Mbledhja dhe zbritja e shprehjeve racionale të plota ... 129
2.8. Shumëzimi i shprehjeve racionale të plota ... 133
2.9. Formulat për shumëzim të shkurtuar ... 136
2.10. Pjesëtimi i shprehjeve racionale të plota ... 142
2.11. Mënyra të zbërthimit të polinomeve në shumëzues të thjeshtë ... 146
2.12. Pjesëtuesi më i madh i përbashkët (PMP) dhe shumëfishi më i vogël i përbashkët (SHVP) i shprehjeve racionale të plota ... 151
2.13. Thyesa algjebrike. Zgjerimi dhe thjeshtimi i thyesës algjebrike ... 154
2.14. Veprime me thyesa algjebrike ... 159
DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM ... 164

## TEMA 3: FUNKSIONI, BARAZIMI, SISTEMI I DY BARAZIMEVE DHE JOBARAZIMI

3.1. Koordinatat e pikës dhe distanca ndërmjet dy pikave në sistemin koordinativ kënddrejtë ... 167
3.2. Pika e mesit e segmentit dhe syprina e trekëndëshit ... 171
3.3. Funksioni linear ... 176
3.4. Funksionet e fuqisë ... 184
3.5. Funksioni eksponencial ... 192
3.6. Llojet e barazimeve dhe barazimet ekuivalente me një të panjohur ... 199

3.7. Zgjidhja e barazimeve lineare dhe e barazimeve që reduktohen në barazime lineare me një të panjohur ..... 203
3.8. Formulimi dhe zgjidhja e barazimeve lineare me një të panjohur ..... 208
3.9. Sistemi i dy barazimeve lineare me dy të panjohura ..... 212
3.10. Metodat për zgjidhjen e sistemit të dy barazimeve lineare me dy të panjohura ..... 217
3.11. Zbatimi i sistemit të dy barazimeve lineare me dy të panjohura në situata problemore ..... 223
3.12. Llojet e mosbarazimeve dhe mosbarazimet ekuivalente me një të panjohur ..... 226
3.13. Formulimi dhe zgjidhja e mosbarazimeve lineare me një të panjohur ..... 230
DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM ..... 235

**TEMA 4: GJEOMETRIA**

4.1. Vektori. Drejtimi, kahja dhe madhësia e vektorit ..... 239
4.2. Vektorët e barabartë dhe të kundërt. Vektorët kolinearë ..... 241
4.3. Veprimet me vektorë ..... 243
4.4. Koordinatat e vektorit ..... 248
4.5. Zbatimi i vektorëve ..... 251
4.6. Raportet trigonometrike të këndit të ngushtë në trekëndëshin kënddrejtë ..... 255
4.7. Raportet trigonometrike të këndeve 30°, 45° dhe 60° ..... 257
4.8. Raportet trigonometrike nga i njëjti kënd α ..... 260
4.9. Zgjidhja e trekëndëshit kënddrejtë ..... 262
4.10. Syprina e trekëndëshit ..... 265
4.11. Zbatimi i raporteve trigonometrike në situata problematike ..... 267
4.12. Këndet në transversalen e dy drejtëzave ..... 274
4.13. Shumëkëndëshi ..... 279
4.14. Vija rrethore dhe rrethi ..... 284
4.15. Mbulimi i një sipërfaqeje të dhënë në rrafsh ..... 290
4.16. Trekëndëshat e ngjashëm ..... 294
4.17. Zbatimi i ngjashmërisë ..... 300
DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM ..... 305

**TEMA 5: MATJA**

5.1. Perimetri dhe syprina e formave 2D ..... 310
5.2. Njehsimi i rrezes së rrethit të brendashkruar dhe të jashtashkruar ..... 316
5.3. Syprina e rrethit dhe pjesëve të rrethit ..... 318
5.4. Zbatimi i teoremave në situata problemore ..... 321
5.5. Syprina dhe vëllimi i formave 3D ..... 324
5.6. Cilindri. Syprina dhe vëllimi i cilindrit ..... 328
5.7. Zbatim i syprinës dhe vëllimit të formave 3D ..... 332
DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM ..... 335

**TEMA 6: PUNA ME TË DHËNA**

6.1. Probabiliteti eksperimental ..... 339
6.2. Probabiliteti klasik ..... 343
6.3. Grumbullimi i të dhënave ..... 346
6.4. Paraqitja grafike e të dhënave ..... 349
6.5. Përpunimi dhe interpretimi i të dhënave ..... 360
DETYRA PËR PËRSËRITJE ..... 364

## Tema 1:

# NUMRAT DHE VEPRIMET ME NUMRA

**Me shtjellimin e kësaj teme do të aftësoheni:**

1. të aplikoni njohuritë për bashkësitë gjatë zgjidhjes së situatave problemore;
2. të përdorni numrat realë dhe veprimet me to për të formuluar, zgjidhur dhe nxjerrë përfundime kur zgjidhni një problem në një kontekst real;
3. të përdorni raportin, proporcionin dhe përqindjet për të zgjidhur probleme nga fusha të ndryshme (ekonomia, arsimi, mjekësia, ndërtimi, etj.).

01

# 1.1. Bashkësia. Nënbashkësia

## Kuptimi i bashkësisë

**AKTIVITET**

Janë dhënë numrat: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Gruponi ata sipas ndonjë vetie të përbashkët:
a) në dy grupe, b) në tre grupe.

Kuptimi i bashkësisë është nocion themelor në matematikë dhe, si i tillë, nuk përcaktohet me ndihmën e nocioneve të tjera. Çdo bashkësi përbëhet nga objekte që janë të bashkuara në një tërësi sipas ndonjë **vetie karakteristike të përbashkët** që ata kanë.

**SHEMBULLI 1**

Bashkësi përbëjnë:

a) të gjithë nxënësit e një klase b) të gjithë peshqit në Liqenin e Prespës.

Objektet nga të cilat përbëhet bashkësia quhen **elemente të bashkësisë.**

Bashkësitë i shënojmë me shkronja të mëdha të shtypit: $A, B, C, \ldots, M, N, \ldots$, kurse elementet e secilës bashkësi me shkronja të vogla të shkrimit: $a, b, c, \ldots, m, n, \ldots$ nga alfabeti latin.



Për elementet nga të cilat përbëhet bashkësia, themi se **i përkasin bashkësisë.** Nëse një element $a$ i përket bashkësisë $A$, shkruajmë $a \in A$.

Ndërsa, nëse një element $a$ **nuk i përket bashkësisë** $A$, atëherë shkruajmë $a \notin A$. Bashkësinë që nuk përmban asnjë element e quajmë **bashkësi të zbrazur** (ose **bashkësi boshe**) dhe e shënojmë me simbolin $\varnothing$.

**DETYRA 1**

a) A është bashkësia e trekëndëshave që kanë dy kënde të drejta bashkësi e zbrazur?
b) A është bashkësia e pleqve 300-vjeçarë në planetin tonë bashkësi e zbrazur?

## Mënyrat e përcaktimit të bashkësive

Themi se një bashkësi është e mirëpërcaktuar kur për çdo objekt mund të thuhet saktësisht nëse ai është element i asaj bashkësie apo jo.

**DETYRA 2**

A është e mirëpërcaktuar bashkësia:
a) e të gjitha lugëve në kuzhinën tënde b) e të gjitha maceve të vjetra?

### SHEMBULLII 2

Le të shqyrtojmë bashkësinë M të të gjithë numrave natyrorë njëshifrorë. Është e qartë se elementet e bashkësisë $M$ janë: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dhe përveç tyre, bashkësia $M$ nuk ka elemente të tjera. Këtë e shkruajmë me: $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Kjo mënyrë e paraqitjes së një bashkësie quhet **mënyrë tabelare**. Vëreni se elementet e numëruara janë shkruar midis kllapave, të ndarë me presje. Kur bashkësia jepet në mënyrë tabelare, renditja e elementeve është e parëndësishme.

Përveç mënyrës së mësipërme të përcaktimit të bashkësisë, ekziston edhe një mënyrë tjetër, e quajtur **mënyra përshkruese**, e cila tregon vetinë e përbashkët karakteristike që e kanë të gjithë elementet që i përkasin bashkësisë, dhe që nuk e ka asnjë element që nuk i përket asaj bashkësie.

### SHEMBULLII 3

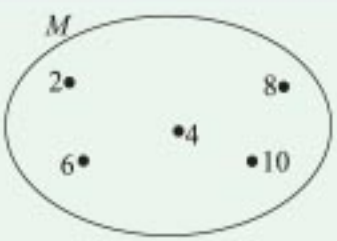
Le të jetë S bashkësia e të gjithë nxënësve të cilëve ditëlindja u bie çdo katër vjet.
Vetia e përbashkët e elementeve të kësaj bashkësie është se çdo element është një nxënës i lindur më 29 shkurt. Shkruajmë: $S = \{x \mid x \text{ është i lindur më 29 shkurt}\}$.

Lexojmë: $S$ është bashkësia e të gjithë elementeve $x$ të tilla që $x$ është i lindur më 29 shkurt.

Për të lehtësuar përfundimet gjatë shqyrtimit të bashkësive, përdorim vizatime grafike - të quajtura **Diagrame të Venit**. Çdo bashkësi $M$ e paraqesim me një bashkësi pikash, të rrethuara me një vijë të mbyllur të lakuar. Pikat e shënuara, dhe ndonjëherë edhe të gjitha pikat e lakores dhe pjesës së rrafshit të kufizuar prej saj, i konsiderojmë si elemente të bashkësisë $M$.

### SHEMBULLII 4

Në vizatimin 1 është paraqitur diagrami i Venit për bashkësinë $M = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.



Vizatimi 1

## Nënbashkësia

### AKTIVITET

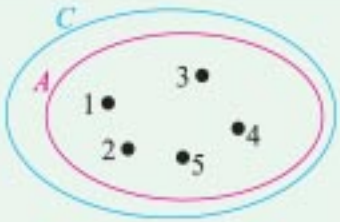
Një programues i njeh gjuhët programore $P = \{\text{Python, Java, C}^{++}, \text{JavaScript}\}$.
Për projektin e ri duhet të njohë $R = \{\text{Python, JavaScript}\}$
A do të mundet programuesi të përfshihet në projektin e ri?

### SHEMBULLI 5

Le të jenë dhënë bashkësitë: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ dhe $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Çdo element i bashkësisë A i përket bashkësisë B. Në bashkësinë B ekziston një element, për shembull, elementi 7, i cili nuk i përket bashkësisë A (vizatimi 2).
Çdo element i bashkësisë A i përket bashkësisë C, dhe çdo element i bashkësisë C i përket bashkësisë A (vizatimi 3).



Vizatimi 2



Vizatimi 3

Bashkësia A është **nënbashkësi** e bashkësisë B, nëse dhe vetëm nëse çdo element i bashkësisë A i takon edhe bashkësisë B. Shkruajmë $A \subseteq B$.

### SHEMBULLI 6

a) Për bashkësitë $A$ dhe $B$ të paraqitura në vizatimin 2 vlen $A \subseteq B$.
b) Bashkësia e zbrazur është nënbashkësi e çdo bashkësie A. Pse?
c) Për bashkësitë $A$ dhe $C$ të paraqitura në vizatimin 2 vlen $A \subseteq C$ dhe $C \subseteq A$.

Dy bashkësi $A$ dhe $B$ janë **të barabarta** nëse dhe vetëm nëse secila prej tyre është nënbashkësi e tjetrës, gjegjësisht $A \subseteq B$ dhe $B \subseteq A$. Shkruajmë $A = B$.

### SHEMBULLI 7

Janë dhënë bashkësia $A$ elementet e së cilës janë shkronjat e fjalës *bari* dhe bashkësia $B$ elementet e së cilës janë shkronjat e fjalës arbi. Le t'i shkruajmë bashkësitë në mënyrë tabelare:
$A = \{b, a, r, i\}$ dhe $B = \{a, r, b, i\}$.

Shohim se $A \subseteq B$ dhe $B \subseteq A$, që do të thotë $A = B$, pra bashkësitë e dhëna janë të barabarta.

Bashkësia $A$ është **nënbashkësi e vërtetë** e bashkësisë $B$, nëse çdo element i bashkësisë $A$ i përket bashkësisë $B$, dhe ekziston të paktën një element në bashkësinë B i cili nuk i përket bashkësisë $A$. Shkruajmë $A \subset B$.

### SHEMBULLI 8

a) Bashkësia e të gjithë paralelogramëve është nënbashkësi e vërtetë e bashkësisë së të gjithë katërkëndëshave.

b) Bashkësia e zbrazur është nënbashkësi e vërtetë e çdo bashkësie jo të zbrazur $B$.

### DETYRA 3

A janë të sakta pohimet e mëposhtme:

a) Bashkësia e numrave çift është nënbashkësi e bashkësisë së numrave natyrorë.

b) Bashkësia e qenve të racës pekinez është nënbashkësi e vërtetë e bashkësisë së të gjithë qenve.

## DETYRA PËR USHTRIME

**1.** Shkruani në mënyrë tabelare bashkësinë:

a) $A=\{x \mid x$ është muaj i vitit$\}$ b) $B=\{x \mid x$ është shumëfish i 6 dhe $40 \leq x \leq 70\}$

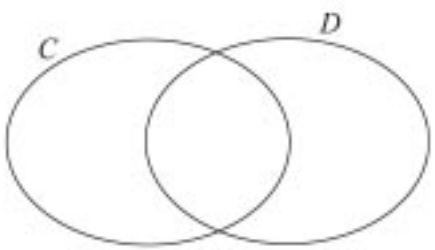
c) $C=\{x \mid x$ është numër i thjeshtë dhe $20 \leq x \leq 30\}$ ç) $D=\{x \mid x \in \mathbb{Z}$ dhe $50 \leq x^2 \leq 100\}$

**2.** Bashkësinë $A$, elementet e së cilës janë numrat e thjeshtë në dhjetëshen e dytë, paraqiteni:

a) në mënyrë tabelare, b) me diagram të Venit, c) në mënyrë përshkruese.

**3.** Paraqitni bashkësitë $A$ dhe $B$ me diagram të Venit, nëse dihet se:
$5 \in A, 5 \notin B, 3 \in A, 3 \in B, 7 \notin A, 7 \in B, 4 \in A, 4 \notin B$.

**4.** Le të jenë $C=\{a, c, d, e, h\}$ dhe $D=\{b, c, e, f\}$.
Rivizatojeni diagramin e Venit në vizatimin 4 dhe shënoni elementet në vendet përkatëse.



Vizatimi 4

**5.** Është dhënë bashkësia $A=\{x \mid x \in \mathbb{Z}$ dhe $-2<x<3\}$.
Shkruani të gjitha:

a) nënbashkësitë e bashkësisë $A$

b) nënbashkësitë e vërteta të bashkësisë $A$

**6.** Është dhënë bashkësia $M=\{x \mid x$ është numër tek nga dhjetëshja e dytë$\}$. Cili nga pohimet është i saktë:

a) $\{15, 19\} \subset M$ b) $\{\emptyset\} \subseteq M$ c) $\emptyset \subset M$ ç) $\{12,14,16\} \subseteq M$ d) $M \subseteq M$?

**7.** Gjeni $x$ nëse: a) $\{-1, 4\} \subset \{-5, -1, 3, x, 7\}$ b) $\{5, 7, 9\} \subset \{-2, 3, 5, 6, 9, x\}$ c) $\{2, 3\} \subset \{-2, 2, x\}$

**8.** Cila nga bashkësitë është bashkësi e zbrazur:

a) $A=\{x \mid x \in \mathbb{Z}^+$ dhe $x \leq 4\}$ b) $B=\{x \mid x \in \mathbb{Q}$ dhe $x^2=-1\}$

c) $C=\{x \mid x$ është pjesëtues i numrit $0\}$ ç) $D=\{x \mid x$ është shumëfish i numrit $0\}$

### HULUMTIM

"Në një fshat, berberi Mile i rruan të gjithë burrat që nuk rruhen vetë". Mendoni dhe zbuloni pse bashkësia nuk është e mirëpërcaktuar. Kush e rruan berberin Mile? Përpiquni të jepni një formulim të ri, ashtu që bashkësia të jetë e mirëpërcaktuar.

# 1.2. Bashkësitë ekuivalente dhe numrat kardinalë

## Bashkësitë ekuivalente

### SHEMBULLI 1

Le të jenë dhënë bashkësitë $A = \{a, b, c, d\}$ dhe $B = \{k, l, m, n\}$.

$a \; b \; c \; d$
$\downarrow \; \downarrow \; \downarrow \; \downarrow$
$k \; l \; m \; n$

Çdo elementi nga bashkësia $A$ mund t'i shoqërohet një element nga bashkësia $B$.

$k \; l \; m \; n$
$\downarrow \; \downarrow \; \downarrow \; \downarrow$
$a \; b \; c \; d$

Çdo elementi nga bashkësia $B$ mund t'i shoqërohet një element nga bashkësia $A$.

$k \; l \; m \; n$
$\updownarrow \; \updownarrow \; \updownarrow \; \updownarrow$
$a \; b \; c \; d$

Midis elementeve të bashkësive $A$ dhe $B$ është vendosur një **korrespondencë e dyanshme (bijektive)**.



Nëse për bashkësitë $A$ dhe $B$ vlen:

- çdo dy elemente të ndryshme të bashkë $A$ i shoqërohen elemente të ndryshme nga bashkësia $B$ dhe
- çdo element i $B$ është i shoqëruar nga të paktën një element i $A$,

atëherë themi se është vendosur **korrespondencë e dyanshme (bijektive)** ndërmjet $A$ dhe $B$.



Dy bashkësi $A$ dhe $B$ për të cilat mund të vendoset një korrespondencë bijektive themi se janë **bashkësi ekuivalente**. Shkruajmë $A \sim B$. Lexojmë $A$ është ekuivalente (e barasvlershme) me $B$.

### SHEMBULLI 2

A janë ekuivalente bashkësitë $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dhe $B = \{x \mid x \text{ është ditë e javës}\}$?

Bashkësitë e dhëna janë ekuivalente, sepse midis tyre mund të vendoset një korrespondencë bijektive:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ |
| e hënë | e martë | e mërkurë | e enjte | e premte | e shtunë | e diel |

## DETYRA 1

Një analist financiar ndjek investimet në dy portofolë:
$A = \{$aksione, obligacione, pasuri të paluajtshme$\}$ dhe $B = \{$mallra, aksione, kriptomonedha$\}$
A janë ekuivalente bashkësitë $A$ dhe $B$?

Bashkësitë e barabarta janë ekuivalente. E kundërta nuk vlen gjithmonë.

## SHEMBULLI 3

Janë dhënë bashkësitë:
$A = \{x \mid x$ është numër natyror çift më i vogël se 10$\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$,
$C = \{x \mid x$ është stinë e vitit$\}$ dhe $D = \{$vjeshtë, dimër, pranverë, verë$\}$.
Cilat nga bashkësitë e dhëna janë ekuivalente, dhe cilat janë të barabarta?

Le t'i shkruajmë në mënyrë tabelare bashkësitë $A$ dhe $C$:
$A = \{2, 4, 6, 8\}$ dhe $C = \{$vjeshtë, dimër, pranverë, verë$\}$.
Të barabarta janë bashkësitë: $A = B$ dhe $C = D$.
Ekuivalente janë bashkësitë: $A \sim B$, $A \sim C$, $A \sim D$, $B \sim C$, $B \sim D$ dhe $C \sim D$.

## DETYRA 2

Në një restorant ushqimi të shpejtë mund të zgjidhet një nga vaktet e mëposhtme për drekë: sandviç me pulë, sandviç me peshk, çizburger ose gishta pule. Hana dhe Harisi blejnë ushqim sipas ofertës. Shkruani dy nënbashkësi ekuivalente, por jo të barabarta, që përbëhen nga dy vakte të ndryshme që sipas menusë Hana dhe Harisi mund t'i zgjedhin për drekë.

# Numrat kardinalë

## AKTIVITET

Ana, Adori, Simoni, Tea dhe Milja shkuan në piknik. Secili prej tyre solli me vete një çantë shpine.
Ekskursionistët formojnë bashkësinë $A$, ndërsa çantët e tyre formojnë bashkësinë $B$. Meqë çdo çantë ka pronarin e vet, dhe çdo ekskursionist ka çantën e vet, të dy bashkësitë janë ekuivalente, pra $A \sim B$.

a) A mund të presim që numri i ekskursionistëve të jetë i barabartë me numrin e çantave? Arsyetojeni përgjigjen tuaj.
b) Sa është numri i elementeve të bashkësisë $A$, dhe sa ai i bashkësisë $B$?

Le të jetë $\mathbb{N}_m = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ bashkësia e m numrave të parë natyrorë dhe le të jetë $A$ një bashkësi e çfarëdoshme.

a) Bashkësia $A$ quhet **bashkësi e fundme** nëse $A = \emptyset$, ose nëse ekziston një numër natyror $m$ i tillë që $A \sim \mathbb{N}_m$.

b) Nëse $A = \emptyset$, atëherë themi se numri i elementeve të bashkësisë $A$ është 0, pra bashkësia $A$ ka **numrin kardinal** 0 dhe shkruajmë $k(A) = 0$.

c) Nëse $A \sim \mathbb{N}_m$, atëherë themi se numri i elementeve të bashkësisë $A$ është m, pra bashkësia $A$ ka **numrin kardinal** $m$ dhe shkruajmë $k(A) = m$.

ç) Nëse bashkësia $A$ është e fundme, gjithashtu shkruajmë $k(A) < \infty$.

d) Nëse bashkësia $A$ nuk është e fundme, themi se bashkësia $A$ është bashkësi **e pafundme**. Në këtë rast shkruajmë $k(A) = \infty$.

Edhe tek bashkësitë e pafundme ekzistojnë numra kardinalë të ndryshëm. Të tillë janë, për shembull, numrai kardinal i bashkësisë së numrave natyrorë $\mathbb{N}$ dhe ai i bashkësisë së numrave realë $\mathbb{R}$.

### SHEMBULLI 4

Gjeni numrin kardinal të bashkësisë:

a) $A = \{1, 2, 3\}$ b) $B = \{a, b, c, d\}$ c) $C = \{\emptyset\}$ ç) $D = \emptyset$

a) $k(A) = 3$ b) $k(C) = 4$ c) $k(C) = 1$ ç) $k(D) = 0$

### SHEMBULLI 5

Gjeni numrin kardinal të bashkësisë:

a) $M = \{$biologji, fizikë, kimi, astronomi, gjeologji$\}$

b) $N = \{$matematikë, informatikë, psikologji, ekonomi, gjuhësi, pedagogji$\}$

a) $k(A) = 5$ b) $k(A) = 6$.

### SHEMBULLI 6

Gjeni numrin kardinal të bashkësisë:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ dhe $2 \leq x \leq 6\}$ b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ dhe $-6 \leq x < 4\}$

Bashkësitë e dhëna do t'i paraqesim në mënyrë tabelare.

a) Meqë $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, përfundojmë se $k(A) = 5$.

b) Nga $B = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ konkludojmë se $k(C) = 10$.

## DETYRA 3

A është bashkësia e:

a) numrave natyrorë b) numrave të plotë c) numrave racionalë

ç) numrave real d) numrave realë pozitivë dh) atomeve në një objekt

bashkësi e fundme apo e pafundme?

### SHEMBULLI 7

Shumëfishat e numrit 3 përbëjnë bashkësinë $S = \{3, 6, 9, ...\}$.

Bashkësinë e dhënë mund ta shkruajmë në mënyrë përshkruese si: $S = \{n \mid n = 3m \text{ ku } m \in \mathbb{N}\}$
e cila na lejon të vendosim një korrespondencë bijektive midis bashkësisë së të gjithë numrave natyrorë dhe bashkësisë së të gjithë shumëfishave të numrit 3:

$$\begin{array}{cccccc} 3=3\cdot 1 & & 6=3\cdot 2 & & 9=3\cdot 3 & & 12=3\cdot 4 & \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \cdots\cdots \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \end{array}$$

Sipas kësaj, bashkësia e të gjithë shumëfishave të numrit 3 dhe bashkësia e të gjithë numrave natyrorë janë bashkësi ekuivalente, pra $S \sim \mathbb{N}$.

Le të vërejmë se $S \subset \mathbb{N}$, që do të thotë se bashkësia e numrave natyrorë është ekuivalente me një nënbashkësi të vërtetë të saj. Kjo mund të ndodhë vetëm te bashkësitë e pafundme.

## DETYRA PËR USHTRIME

**1.** 1. Një laborator biologjik grupoi 5 lloje të ndryshme bakteriesh në një enë Petri:
$B = \{B1, B2, B3, B4, B5\}$. Në një enë tjetër, ka mostra kërpudhash: $F = \{F1, F2, F3, F4, F5\}$.
A janë ekuivalente bashkësitë B dhe F? Arsyetojeni përgjigjen tuaj.

**2.** Ekipi i shkollës së volejbollit përbëhet nga lojtarët e mëposhtëm:
{Ana, Beti, Kate, Esra, Maja, Tea, Petra, Zhana}.
Shkruani dy nënbashkësi ekuivalente, por jo të barabarta, që përbëhen nga gjashtë lojtarë që trajneri mund t'i zgjedhë për ndeshjen e ardhshme.

**3.** A janë ekuivalente bashkësitë e pjesëve të një makine:
$X = \{$vidë, arrë, rrotëz$\}$ dhe $Y = \{$valvulë, pompë, matës$\}$.

**4.** Njehsoni numrin e elementeve të bashkësisë:
a) $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ b) $N = \{x \mid x$ është numër i thjeshtë më i vogël se 2$\}$
c) $P = \{2, 3, 4, \ldots, 99\}$ ç) $Q = \{x \mid x$ është numër natyror $6 < x < 35\}$

**5.** Njehsoni numrin kardinal të bashkësisë:
a) $A = \{H, O, N, Cl, Na\}$
b) $B = \{$Python, Java, HTML, CSS, JavaScript, C++$\}$
c) C = {motor, rezistencë, kondensator, diodë}
ç) $C = \{$laptop, tablet, telefon, ruter, tastierë, monitor$\}$

**6.** Vendosni një korrespondencë bijektive midis bashkësisë së numrave natyrorë dhe bashkësisë së të gjithë:
a) numrave natyrorë çift
b) numrave natyrorë tek

**7.** Vendosni një korrespondencë bijektive midis bashkësisë së numrave natyrorë dhe bashkësisë së vargjeve binarë që fillojnë me 1: $B = [1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, \ldots]$

**8.** Një hotel ka një numër të pafundëm dhomash, të numëruara me numrat natyrorë: 1, 2, 3, ... Në hotel nuk ka dhoma të zbrazura, dhe vjen një mysafir i ri.
Në çfarë mënyre do të akomodohet mysafiri i ri?

# 1.3. Veprimet me bashkësi

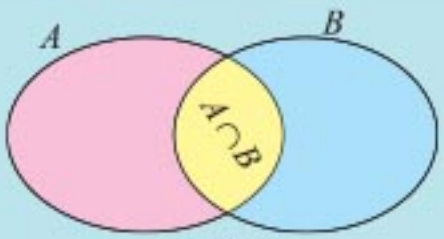
## Prerja dhe unioni i bashkësive

Janë dhënë bashkësitë $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dhe $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Numrat 3, 4 dhe 5 janë elementet e tyre të përbashkëta. Prej tyre mund të formojmë një bashkësi të re $C$, për të cilën themi se është marrë si rezultat i një operacioni të kryer mbi bashkësitë $A$ dhe $B$.

Bashkësia $C = \{3, 4, 5\}$, si dhe operacioni me të cilin është marrë bashkësia, quhet prerje e bashkësive $A$ dhe $B$ dhe shënohet me $C = A \cap B$. Lexojmë: $A$ prerje $B$.

**Prerja** e dy bashkësive $A$ dhe $B$ quhet bashkësia $A \cap B$ e cila përbëhet nga të gjithë elementet që i përkasin bashkësisë A dhe bashkësisë $B$ (vizatimi 1):

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dhe } x \in B\}$



Vizatimi 1

### SHEMBULLI 1

a) $\{2, 3, 5, 7, 9\} \cap \{3, 9, 15\} = \{3, 9\}$

b) Le të jetë $B$ bashkësia e të gjithë trekëndëshave barakrahës, dhe $K$ bashkësia e të gjithë trekëndëshave këndrejtë.

Prerja $B \cap K$ është bashkësia e të gjithë trekëndëshave barakrahës këndrejtë.

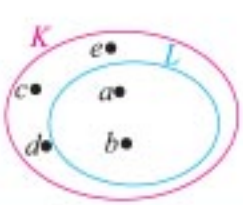
### SHEMBULLI 2

Bashkësitë $K$ dhe $L$ janë paraqitur me diagram të Venit në vizatimin 2.
Përcaktoni bashkësinë $K \cap L$.

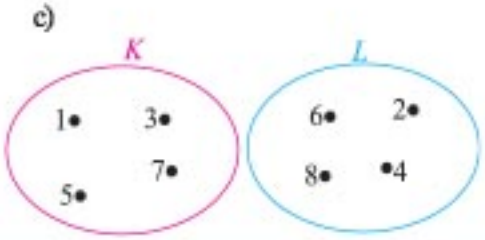
a)




b)




c)




a) $K \cap L = \{3, 7\}$ b) Meqë $L \subset K$, $K \cap L = \{a, b\} = L$ c) $K \cap L = \emptyset$

Nëse bashkësitë $A$ dhe $B$ nuk kanë elemente të përbashkëta, atëherë prerja e tyre është bashkësia e zbrazur, pra $A \cap B = \emptyset$.

Dy bashkësi, prerja e të cilave është bashkësia e zbrazur, quhen **bashkësi disjunkte.**

### SHEMBULLI 3

a) $\{1, 3, 5, 7\} \cap \{2, 4, 6\} = \emptyset$

b) Le të jetë $S$ bashkësia e të gjithë qyteteve në Serbi, dhe $T$ bashkësia e të gjithë qyteteve në Sllloveni. Ato dy bashkësi janë disjunkte, sepse $S \cap T = \emptyset$ (Pse?).

### DETYRË 1

a) Shkruani në mënyrë tabelare bashkësitë: $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0 \text{ dhe } x < 8\}$ dhe $F = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ dhe } 5 < x < 10\}$.

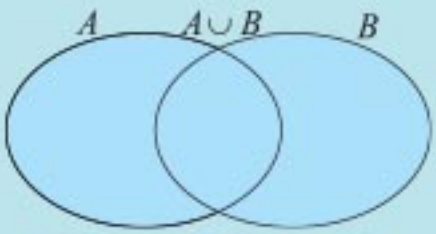
b) Shkruani në mënyrë tabelare bashkësinë $E \cap F$.

Janë dhënë bashkësitë $A = \{l, 2, 3, 4, 5\}$ dhe $B = \{3, 5, 6, 8\}$. Nëse i bashkojmë këto dy bashkësi në një, do të marrim bashkësinë $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$. Shohim se elementet 3 dhe 5 i përkasin edhe bashkësisë $A$ edhe bashkësisë $B$, por në bashkësinë e bashkuar $S$ shfaqen vetëm një herë. Shpjego pse!

Bashkësinë e fituar $S$ e quajmë union të bashkësive $A$ dhe $B$ dhe e shënojmë me simbolin $S = A \cup B$. Lexojmë: $A$ union $B$. Unionin e quajmë edhe operacionin që është kryer mbi bashkësitë $A$ dhe $B$ si rezultat i të cilit është fituar bashkësia $S$.

**Unioni** i bashkësive $A$ dhe $B$ quhet bashkësia $A \cup B$ e cila përbëhet nga të gjithë elementet që i përkasin të paktën njërës prej këtyre bashkësive (vizatimi 3):

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ose } x \in B\}$



Vizatimi 3

### SHEMBULLI 4

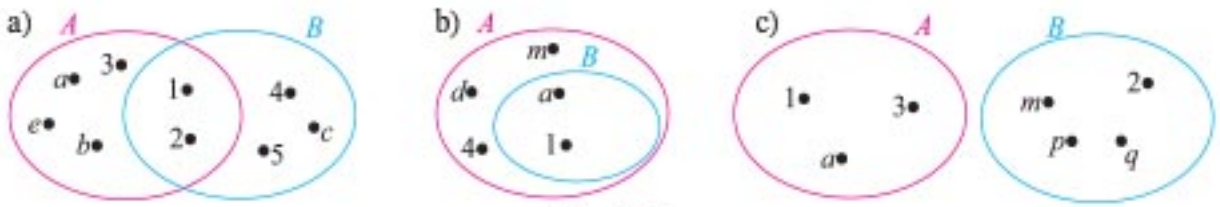
a) $\{2, 4, 6, 8, 10\} \cup \{3, 6, 9, 12\} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$;

b) Le të jetë $A$ bashkësia e të gjithë numrave natyrorë tek, dhe $B$ bashkësia e të gjithë numrave natyrorë çift. Bashkimi i tyre është bashkësia e numrave natyrorë, pra $A \cup B = \mathbb{N}$

### SHEMBULLI 5

Bashkësitë $A$ dhe $B$ janë paraqitur me diagram të Venit në vizatimin 4.

Shkruani në mënyrë tabelare bashkësinë $A \cup B$.




Vizatimi 4

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, e\}$

b) Meqë $B \subset A$, $A \cup B = \{1, 4, a, d, m\} = A$

c) $A \cup B = \{1, 2, 3, a, m, p, q\}$

## DETYRË 2

a) Shkruani në mënyrë tabelare bashkësitë:
$E = \{x \mid x$ është numër çift nga dhjetëshja e dytë$\}$ dhe $F = \{x \mid x$ është numër tek nga dhjetëshja e dytë$\}$.

b) Shkruani në mënyrë tabelare bashkësinë $E \cup F$.

## AKTIVITET

Janë dhënë bashkësitë $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ dhe $C = \{1, 3, 4, 7\}$.
A janë të sakta barazitë:

a) $A \cap B = B \cap A$
b) $A \cup B = B \cup A$
c) $(A \cap C) \cap C = A \cap (B \cap C)$
d) $(A \cup C) \cup C = A \cup (B \cup C)$
e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap C) \cup (A \cap C)$
f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup C) \cap (A \cup C)$



Për çfarëdo bashkësish $A$, $B$ dhe $C$ vlejnë barazitë:

| | |
|---|---|
| a) $A \cap B = B \cap A$ | Ligji komutativ për prerjen |
| b) $A \cup B = B \cup A$ | Ligji komutativ për unionin |
| c) $(A \cap C) \cap C = A \cap (B \cap C)$ | Ligji asociativ për prerjen |
| ç) $(A \cup C) \cup C = A \cup (B \cup C)$ | Ligji asociativ për unionin |
| d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap C) \cup (A \cap C)$<br>$(A \cup C) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ | Ligji distributiv i prerjes ndaj unionit |
| dh) $A \cup (B \cap C) = (A \cup C) \cap (A \cup C)$<br>$(A \cap C) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ | Ligji distributiv i unionit ndaj prerjes |

## DETYRA 3

Verifikoni vetinë asociative të unionit dhe të prerjes për bashkësitë:
$S = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0$ dhe $x < 4\}$, $T = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ dhe $1 < x < 6\}$ dhe $R = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^+$ dhe $4 < x < 8\}$.

Le të përcaktojmë numrin kardinal të unionit të dy bashkësive $A$ dhe $B$.

Nëse bashkësitë $A$ dhe $B$ janë disjunkte, numri kardinal i unionit është shuma e numrave kardinal të bashkësive, pra $k(A \cup B) = k(A) + k(B)$.

Nëse të dy bashkësitë priten, atëherë prerja është nënbashkësi edhe e bashkësisë $A$ edhe e bashkësisë $B$. Kjo do të thotë se nëse mbledhim numrin kardinal të bashkësisë $A$ dhe numrin kardinal të bashkësisë $B$, do ta kemi mbledhur prerjen dy herë, prandaj duhet ta zbresim një herë, siç është dhënë në formulën: $k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B)$.

### SHEMBULLI 6

Nëse $k(A) = 10$, $k(B) = 20$ dhe $k(A \cap B) = 4$, sa është $k(A \cup B)$?

Duke përdorur formulën për njehsimin e numrit kardinal të unionit të dy bashkësive, marrim $k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B) = 10 + 20 - 4 = 26$.

### DETYRA 4

Njehsoni:

a) $k(A \cup B)$, nëse $k(A) = 23$, $k(B) = 17$ dhe $k(A \cap B) = 7$

b) $k(A \cup B)$, nëse $A \cap B = \emptyset$, $k(A) = 35$ dhe $k(B) = 78$

c) $k(A \cap B)$, nëse $k(A) = 24$, $k(B) = 18$ dhe $k(A \cup B) = 35$

### SHEMBULLI 7

Në një shkollë ka 20 profesesorë. Nga ata, 12 ligjërojnë matematikë ($M$) dhe 4 ligjërojnë matematikë dhe fizikë ($F$). Sa profesorë ligjërojnë fizikë?

Sipas kushteve në detyrë $k(M \cup F) = 20$, $k(M) = 12$ dhe $k(M \cap F) = 4$.
Me zëvendësim në formulën për njehsimin e numrit kardinal të unionit
$k(M \cup F) = k(M) + k(F) - k(M \cap F)$ marrim $20 = 12 + k(F) - 4$ nga ku gjejmë se
$k(F) = 12$. Gjithsej 12 profesorë ligjërojnë fizikë.

### DETYRA 5

Nga 35 nxënës në një klasë, 15 nxënës duan të luajnë hendboll ($H$), kurse 26 nxënës duan të luajnë futboll ($F$). Sa nxënës duan të luajnë futboll dhe hendboll?

## Ndryshimi i dy bashkësive

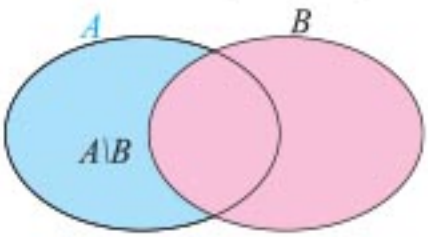
Le të jetë $A$ bashkësia e nxënësve të seksionit të shahut në klasë, dhe $B$ bashkësia e nxënësve të seksionit të dramës në klasë. Nga këto dy bashkësi mund të formohen dy bashkësitë e reja të mëposhtme.

E para prej tyre është bashkësia e nxënësve të seksionit të shahut, të cilët nuk janë anëtarë të seksionit të dramës. Këtë bashkësi e quajmë ndryshim i bashkësisë $A$ me bashkësinë $B$, e shënojmë në mënyrë simbolike $A \setminus B$, dhe lexojmë $A$ ndryshim $B$.

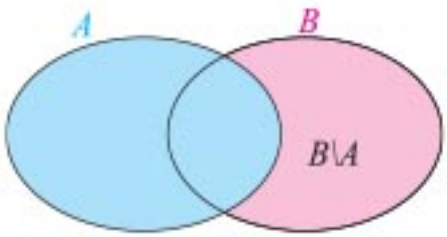
Në mënyrë analogjike, bashkësia e dytë përfaqëson bashkësinë e nxënësve të seksionit të dramës, të cilët nuk janë anëtarë në seksionin e shahut. Kjo bashkësi është gjithashtu ndryshim, por i bashkësisë $B$ me bashkësinë $A$. Shkruajmë $B \setminus A$.

**Ndryshimi** i bashkësisë $A$ me bashkësinë $B$ quhet bashkësia $A \setminus B$ e cila përbëhet nga të gjithë elementet e bashkësisë $A$, të cilët nuk i përkasin bashkësisë $B$, pra $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ dhe $x \notin B\}$. Në mënyrë të ngjashme, $B \setminus A = \{x \mid x \in B$ dhe $x \notin A\}$.

Ndryshimet $A \setminus B$ dhe $B \setminus A$ janë paraqitur me diagram të Venit në vizatimin 5 dhe vizatimin 6.



Vizatimi 5



Vizatimi 6

## SHEMBULLI 8

a) $\{2, 4, 5, 7, 8\} \setminus \{3, 5, 7, 9\} = \{2, 4, 8\}$

b) Le të jetë $A$ bashkësia e nxënësve në një klasë që janë më të gjatë se 150 cm, ndërsa $B$ bashkësia e nxënësve të së njëjtës klasë që janë 11 vjeç.

Ndryshimi $A \setminus B$ përbëhet nga ata nxënës që janë më të gjatë se 150 cm dhe nuk janë 11 vjeç, ndërsa ndryshimi $B \setminus A$ përbëhet nga ata nxënës që janë 11 vjeç dhe nuk janë më të gjatë se 150 cm.

## DETYRA 6

Janë dhënë bashkësitë $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 6\}$ dhe $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

a) Shkruani në mënyrë tabelare bashkësitë $A \setminus B$, $B \setminus A$, $B \setminus C$ dhe $A \setminus (B \setminus C)$.

b) A vlen barazia $A \setminus B = B \setminus A$?

c) Verifikoni barazinë $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Me siguri e keni vënë re se për veprimin e ndryshimit të bashkësive nuk vlen as ligji komutativ, as ligji asociativ.

## DETYRA 7

Janë dhënë bashkësitë $M = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ dhe $x < 6\}$, $P = \{3, 5, 7, 9\}$ dhe $T = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ dhe $x$ është numër çift nga dhjetëshja e parë$\}$. Përcaktoni bashkësitë:

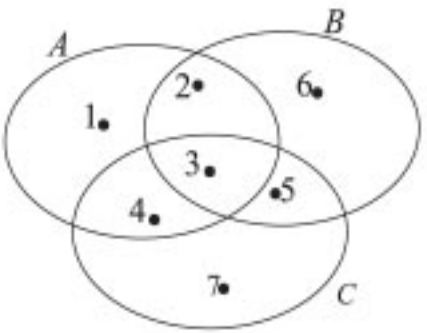
a) $T \setminus M$ b) $P \cup (M \setminus T)$ c) $T \cap (M \setminus P)$

## DETYRA 8

Bashkësitë $A$, $B$ dhe $C$ janë dhënë me diagram të Venit (vizatimi 7). Shkruani në mënyrë tabelare bashkësitë:

a) $A \cap C$ b) $B \cup A$ c) $B \setminus C$

ç) $(A \cap B) \setminus C$ d) $(B \cup C) \setminus A$

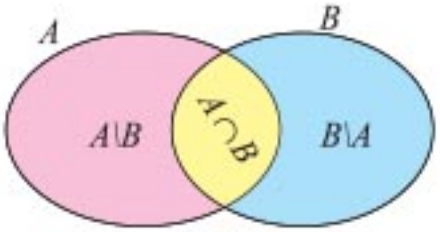


Vizatimi 7

Le të jenë dhënë dy bashkësi A dhe B. Sa është numri kardinal i bashkësisë $A \setminus B$?

Mund të shkruajmë $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ (vizatimi 8).

Bashkësitë $A \setminus B$ dhe $A \cap B$ janë disjunkte, prandaj me zbatimin e formulës së numrit kardinal të unionit të dy bashkësive, fitojmë $k(A) = k(A \setminus B) + k(A \cap B)$ prej nga rrjedh $k(A \setminus B) = k(A) - k(A \cap B)$.



Vizatimi 8

## SHEMBULLI 9

Gjithsej 120 persona i janë ekspozuar veprimit të kimikatit $C_1$ dhe 50 persona i janë ekspozuar veprimit të kimikatit $C_2$, ndërsa 30 persona u janë ekspozuar veprimit të të dy kimikateve $C_1$ dhe $C_2$.

a) Sa persona i janë ekspozuar kimikatit $C_1$, por jo edhe kimikatit $C_2$?

b) Sa persona i janë ekspozuar kimikatit $C_2$, por jo edhe kimikatit $C_1$?

Në bazë të kushteve të detyrës kemi $k(C_1) = 120$, $k(C_2) = 50$ dhe $k(C_1 \cap C_2) = 30$.

Me zbatimin e formulës për njehsimin e numrit kardinal të ndryshimit të dy bashkësive fitojmë

a) $k(C_1 \setminus C_2) = k(C_1) - k(C_1 \cap C_2) = 120 - 30 = 90$ b) $k(C_2 \setminus C_1) = k(C_2) - k(C_1 \cap C_2) = 50 - 30 = 20$

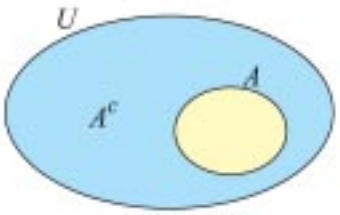
Pra 90 persona i janë ekspozuar kimikatit $C_1$, por jo edhe kimikatit $C_2$, ndërsa 20 persona i janë ekspozuar kimikatit $C_2$ por jo edhe kimikatit $C_1$.

Gjatë përcaktimit të ndryshimit të dy bashkësive $A$ dhe $U$, na intereson rasti kur $A \subset U$ (vizatimi 9).

Atëherë ndryshimi $U \setminus A$ quhet **komplementi** i bashkësisë A ndaj bashkësisë $U$ dhe shënohet me $A^c$. Pra, $A^c = U \setminus A$.

Bashktësia U ndaj së cilës kërkojmë komplementin zakonisht është e fiksuar dhe quhet **bashkësi universale**.

Nga kjo, numrin kardinal të komplementit të bashkësisë $A$ ndaj bashkësisë universale $U$ mund ta njehsojmë nga formula $k(A^c) = k(U) - k(A)$.



Vizatimi 9

## SHEMBULLI 10

Komplementi i bashkësisë $A = \{$e martë, e enjte$\}$ i dhënë në vizatimin 10, ndaj bashkësisë universale $U = \{x \mid x$ është ditë e javës$\}$ është bashkësia $A^c = \{$e hënë, e mërkurë, e premte, e shtunë, e djelë$\}$ (vizatimi 11).



Vizatimi 10



Vizatimi 11

Mund të njehsojmë se $k(A^c) = k(U) - k(A) = 7 - 2 = 5$.

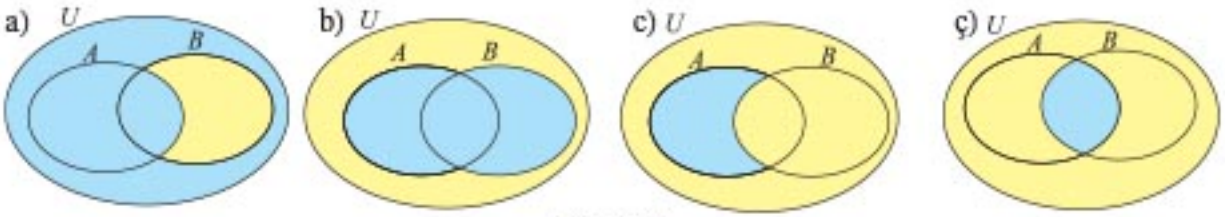
## DETYRA 9

Nga 400 nxënës në një shkollë, 100 nxënës konsumojnë lëng dredhëze, 150 nxënës konsumojnë lëng molle, kurse 75 nxënës konsumojnë lëng dredhëze dhe lëng molle. Sa nxënës nuk konsumojnë as lëng dredhëze e as lëng molle?
Përdorni barazinë $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

## DETYRA PËR USHTRIME

**1.** Është dhënë bashkësia $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Gjeni bashkësinë:
a) $A \cap A$ b) $A \cap \varnothing$ c) $A \cup A$ ç) $A \cup \varnothing$ d) $A \setminus A$ dh) $A \setminus \varnothing$ e) $\varnothing \setminus A$

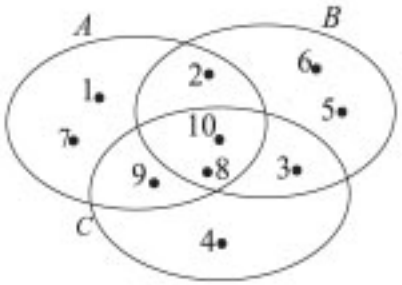
**2.** Me ndihmën e bashkësive $A$, $B$ dhe $U$ bashkësinë me ngjyrë të verdhë të dhënë në diagramin e Venit në vizatimin 12.



Vizatimi 12

**3.** Janë dhënë bashkësitë $M = \{x \mid x \text{ është pjesëtues i } 6\}$, $P = \{x \mid x \text{ është shumëfish i } 6 \text{ dhe } x < 20\}$ dhe $N = \{x \mid x \text{ është pjesëtues i përbashkët i } 12 \text{ dhe } 18\}$. Shkruani në mënyrë tabelare bashkësitë:
a) $M \cap N$ b) $M \cup P$ c) $N \setminus P$ ç) $M \setminus (N \cap P)$ d) $M \setminus (N \cup P)$

**4.** Sipas diagramit të Venit në vizatimin 13, shkruani në mënyrë tabelare bashkësinë:
a) $A \cap B \cap C$ b) $A \cap B \cap C^c$
c) $A \cap B^c \cap C$ ç) $A \cap B^c \cap C$
d) $A \cap (B \cup C)^c$ dh) $A^c \cap B \cap C$
e) $C \cap (A \cup C)^c$ ë) $B \cap (A \cup C)^c$



Vizatimi 13

**5.** Shkruani komplementin e bashkësisë, nëse bashkësia universale është bashkësia e numrave natyrorë:
a) $\{x \mid x \text{ është numër i thjeshtë}\}$ b) $\{x \mid x \text{ është i pjesëtueshëm me 3 dhe me 5}\}$
c) $\{x \mid x \text{ është katror i plotë}\}$ ç) $\{x \mid x + 5 = 8\}$
d) $\{x \mid x \geq 5\}$ dh) $\{x \mid 2x + 1 \geq 9\}$

**6.** Gjeni vlerën e $x$, nëse:
a) $\{-4, 1, 0\} \cap \{-5, x, 1, 11\} = \{0, 1\}$ b) $\{5, x, -7\} \cap \{-5, 2, 4, 5, -7, 18\} = \{2, 5, -7\}$

**7.** Janë dhënë bashkësitë $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ dhe $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.
Gjeni bashkësinë:
a) $A \setminus B$ b) $B \setminus C$ c) $B \setminus A$ ç) $(A \cup B) \setminus C$ d) $(C \setminus A) \cap B$ dh) $(A \cup B) \setminus (B \cup C)$
Më pas përcaktoni numrin kardinal të secilës nga bashkësitë e fituara.

**8.** Gjeni bashkësitë $A$ dhe $B$ nëse $A \cup B = \{a, 6, 8, 4, 7, 9\}$, $A \setminus B = \{4, 6\}$ dhe $B \setminus A = \{b, 7\}$.

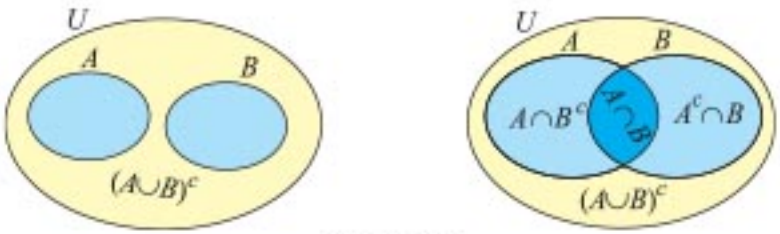
**9.** Në një grup nxënësish, 100 nxënës flasin anglisht, 50 nxënës flasin gjermanisht dhe 25 nxënës i flasin të dy gjuhët. Çdo nxënës flet të paktën një gjuhë.

Sa nxënës ka në grup?

**10.** Në një shkollë 70 nxënës stërviten në futboll, 50 nxënës stërviten në basketboll, dhe 100 nxënës stërviten në të paktën një nga këto dy sporte. Sa nxënës stërviten në futboll dhe basketboll?

## 1.4. Zgjidhja e problemeve me zbatim të bashkësive

Le të jenë dhënë bashkësia universale $U$ dhe dy nënbashkësi të saj $A$ dhe $B$. Këto dy nënbashkësi $A$ dhe $B$ do ta ndajnë bashkësinë universale $U$ në 3 ose 4 nënbashkësi disjunkte, unioni i të cilave është bashkësia universale, në varësi të faktit nëse janë disjunkte apo priten (vizatimi 1).



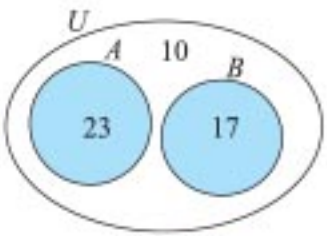

Vizatimi 1

**SHEMBULLI 1**

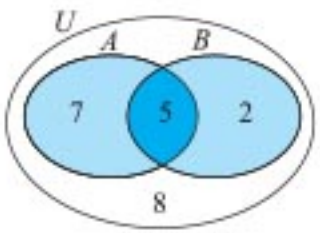
Janë dhënë bashkësia universale U dhe dy nënbashkësi të saj $A$ dhe $B$.

a) Sipas vizatimit 2, në të cilin është paraqitur diagrami i Venit të nënbashkësive disjunkte $A$ dhe $B$ kemi: $k(A) = 23$, $k(C) = 17$ dhe $k(A \cup C)^c = 10$.

Nga kjo gjejmë, për shembull, $k(A \cup B) = 23 + 17$ dhe $k(U) = 23 + 17 + 10 = 50$.




Vizatimi 2




Vizatimi 3

b) Sipas vizatimit 3 në të cilin është paraqitur diagrami i Venit të nënbashkësive $A$ dhe $B$ që priten: $k(A \cap B^c) = 7$, $k(A \cap C) = 5$, $k(B \cap A^c) = 2$ dhe $k(A \cup C)^c = 8$.

Nga kjo gjejmë se

$k(A) = 7 + 5 = 12$, $k(B) = 2 + 5 = 7$, $k(A \cap B) = 5$,

$k(A \cup B) = 7 + 5 + 2 = 14$ dhe $k(U) = 7 + 5 + 2 + 8 = 22$.

## SHEMBULLI 2

Në një klub sportiv janë anëtarësuar 35 vajza. Nga to, 22 luajnë volejboll ($V$), 25 luajnë tenis ($T$), dhe 4 nuk luajnë as volejboll as tenis. Sa vajza luajnë volejboll dhe tenis?

Le të jetë $x$ numri i vajzave që luajnë volejboll dhe tenis (vizatimi 4).

Gjithsej 22 vajza luajnë volejboll, pra numri i vajzave që luajnë volejboll, por nuk luajnë tenis është $22 - x$.

Gjithsej 25 vajza luajnë tenis, pra numri i vajzave që luajnë tenis, por nuk luajnë volejboll është $25 - x$.

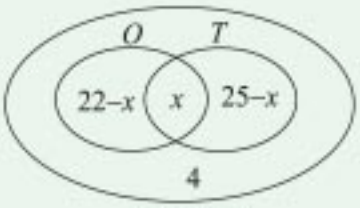
Katër vajza nuk luajnë as volejboll as tenis.

Numri i përgjithshëm i vajzave në klub është 35.

Formojmë barazimin $(22 - x) + x + (25 - x) + 4 = 35$

zgjidhja e të cilit është $x = 16$.

Numri i vajzave që luajnë volejboll dhe tenis është 16.



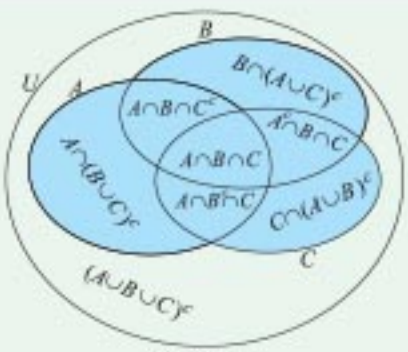
Vizatimi 4

## DETYRA 1

Rada dhe Era shërbejnë supë dhe sallatë së bashku me gjellën kryesore në një darkë martese. Në darkën e martesës morën pjesë gjithsej 150 të ftuar. Nga ata, 92 të ftuar porositën supë, 85 të ftuar porositën sallatë, ndërsa 23 të ftuar nuk porositën as supë as sallatë. Sa të ftuar porositën supë dhe sallatë?

## SHEMBULLI 3

Le të jenë dhënë bashkësia universale $U$ dhe tri nënbashkësi të saj $A$, $B$ dhe $C$, të cilat priten me njëra-tjetrën. Ato e ndajnë bashkësinë universale në 8 nënbashkësi disjunkte, unioni i të cilave është bashkësia universale vizatimi 5).

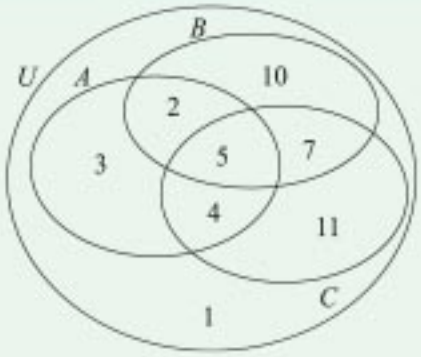


Vizatimi 5

## SHEMBULLI 4

Sipas vizatimit 6, në të cilin është paraqitur diagrami i Venit të nënbashkësive $A$, $B$ dhe $C$, që priten:
$k(A \cap (B \cup C)^c) = 3$, $k(A \cap B \cap C^c) = 2$, $k(A \cap B^c \cap C) = 4$, $k(A \cap B \cap C) = 5$,
$k(B \cap (A \cup C)^c) = 10$, $k(A^c \cap B \cap C) = 7$, $k(C \cap (A \cup C)^c) = 11$ dhe $k(A \cup B \cup C)^c = 1$.

Nga kjo gjejmë, për shembull,
$k(A) = 3 + 2 + 5 + 4 = 14$,
$k(B) = 10 + 2 + 5 + 7 = 24$,
$k(C) = 11 + 4 + 7 + 5 = 27$,
$k(A \cap B) = 2 + 5 = 7$,
$k(A \cap C) = 4 + 5 = 9$,
$k(B \cap C) = 5 + 7 = 12$,
$k(A \cup B \cup C) = 3 + 10 + 11 + 2 + 4 + 7 + 5 = 42$ dhe
$k(U) = 3 + 10 + 11 + 2 + 4 + 7 + 5 + 1 = 43$.



Vizatimi 6

## SHEMBULLI 5

Në një klub sportiv janë anëtarësuar 38 anëtarë.
3 anëtarë luajnë futboll ($F$), basketboll ($B$) dhe tenis ($T$).
4 anëtarë nuk luajnë as futboll, as basketboll, as tenis.
19 anëtarë luajnë futboll, 16 luajnë basketboll dhe 12 luajnë tenis.
7 luajnë futboll dhe basketboll, 4 luajnë basketboll dhe tenis.
a) Paraqiteni me diagram të Venit. b) Sa anëtarë luajnë futboll dhe tenis?

Le të jetë $x$ numri i anëtarëve që luajnë futboll dhe tenis (vizatimi 7). Sipas kushtit në detyrë: 3 anëtarë luajnë futboll, basketboll dhe tenis.

$x - 3$ anëtarë luajnë futboll dhe tenis, por nuk luajnë basketboll.

$4 - 3 = 1$ anëtar luan basketboll dhe tenis, por nuk luan futboll.

$7 - 3 = 4$ anëtarë luajnë basketboll dhe futboll, por nuk luajnë tenis.

$16 - 1 - 3 - 4 = 8$ anëtarë luajnë basketboll, por nuk luajnë as futboll as tenis.

$19 - 4 - 3 - (x - 3) = 15 - x$ anëtarë luajnë futboll, por nuk luajnë as basketboll as tenis.

$12 - 1 - 3 - (x - 3) = 11 - x$ anëtarë luajnë tenis, por nuk luajnë as futboll as basketboll.

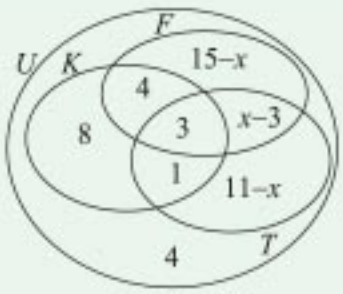
4 anëtarë nuk luajnë as futboll, as basketboll, as tenis.

Sipas kësaj, formojmë barazimin

$8 + 1 + 4 + 3 + (x - 3) + (15 - x) + (11 - x) + 4 = 38$

zgjidhja e të cilit është $x = 5$.

Numri i anëtarëve që luajnë futboll dhe tenis është 5.



Vizatimi 7

## SHEMBULLI 6

Sa nxënës më së shumti mësojnë në vitin e parë të një gjimnazi nëse:
47 nxënës janë anëtarë të klubit të basketbollit ($B$);
45 nxënës janë anëtarë të klubit të futbollit ($F$);
13 nxënës janë anëtarë të klubit të shahut ($Sh$);

37 nxënës janë anëtarë të klubit të gjuhës angleze ($A$);
15 nxënës janë anëtarë të klubit të matematikës ($M$);
12 nxënës janë anëtarë të klubit të basketbollit dhe futbollit;
15 nxënës janë anëtarë të klubit të basketbollit dhe klubit të gjuhës angleze;
17 nxënës janë anëtarë të klubit të futbollit dhe klubit të gjuhës angleze;
10 nxënës janë anëtarë të klubit të shahut dhe klubit të matematikës;
2 nxënës janë anëtarë të klubit të futbollit, basketbollit dhe gjuhës angleze;
5 nxënës nuk janë anëtarë të asnjë klubi?

Le të jetë $x$ numri i nxënësve që mësojnë në vitin e parë të gjimnazit (vizatimi 8).

Sipas kushtit në detyrë:

$12 - 2 = 10$ nxënës janë anëtarë të klubit të basketbollit dhe futbollit, por jo të klubit të gjuhës angleze;

$17 - 2 = 15$ nxënës janë anëtarë të klubit të futbollit dhe klubit të gjuhës angleze, por jo të klubit të basketbollit;

$15 - 2 = 13$ nxënës janë anëtarë të klubit të basketbollit dhe klubit të gjuhës angleze, por jo të klubit të futbollit;

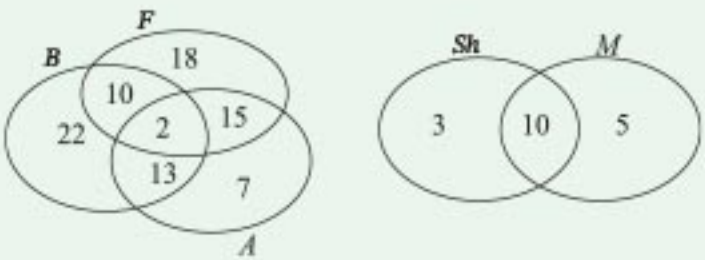
Kështu, marrim se:

$47 - 13 - 10 - 2 = 22$ nxënës janë anëtarë të klubit të basketbollit, por jo të futbollit dhe klubit të gjuhës angleze;

$45 - 15 - 10 - 2 = 18$ nxënës janë anëtarë të klubit të futbollit, por jo të basketbollit dhe klubit të gjuhës angleze;

$37 - 15 - 13 - 2 = 7$ nxënës janë anëtarë të klubit të gjuhës angleze, por jo të futbollit dhe basketbollit;

$22 + 18 + 7 + 10 + 13 + 15 + 2 = 87$ nxënës janë anëtarë të klubit të futbollit ose basketbollit ose gjuhës angleze;




Vizatimi 8

$15 - 10 = 5$ nxënës janë anëtarë të klubit të matematikës, por jo të klubit të shahut;

$13 - 10 = 3$ nxënës janë anëtarë të klubit të shahut, por jo të klubit të matematikës;

$3 + 5 + 10 = 18$ nxënës janë anëtarë të klubit të shahut ose të klubit të matematikës;

Ne duam të maksimizojmë numrin e përgjithshëm të nxënësve, që do të thotë se duhet të minimizojmë prerjet e bashkësive (përveç atyre që janë dhënë). Kështu, numrër më të madh të nxënësve do të kemi nëse asnjë nga nxënësit që janë anëtarë të klubit të basketbollit ose futbollit ose gjuhës angleze nuk është anëtar i klubit të matematikës ose shahut. Meqenëse 5 nxënës nuk janë anëtarë të asnjë klubi, mund të formojmë pabarazimin $x \leq 87 + 18 + 5$ zgjidhja e së cilës është $x \leq 110$.

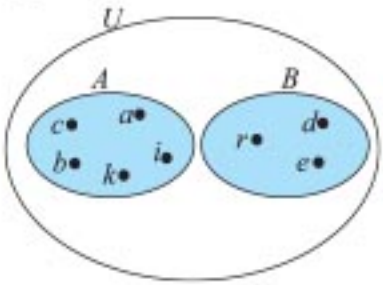
Më së shumti 110 nxënës studiojnë në vitin e parë të gjimnazit.

## DETYRA 2

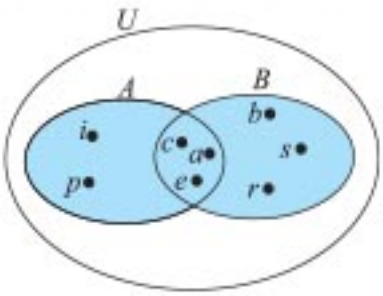
Një grup prej 50 njerëzish që morën pjesë në një konferencë dhe që porositën drekë paraprakisht, mund të zgjedhnin supë, sallatë ose sandviç sipas zgjedhjes së tyre. Gjithsej 17 persona zgjodhën supë, 29 persona zgjodhën sallatë dhe 35 persona zgjodhën sandviç. Nga këto porosi, 11 pjesëmarrës zgjodhën supë dhe sallatë, 10 pjesëmarrës zgjodhën supë dhe sandviç dhe 18 zgjodhën sallatë dhe sandviç. Sa pjesëmarrës zgjodhën supë, sallatë dhe sandviç?

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Le të jetë dhënë bashkësia universale $U = \{a, b, c, \ldots, z\}$.
   a) Sipas diagramit të Venit në vizatimin 9, gjeni: $k(A)$, $k(C)$ dhe $k(A \cup C)^c$.
   b) Sipas diagramit të Venit në vizatimin 10, gjeni: $k(A)$, $k(B)$, $k(A \cap B)$, $k(A \cup B)$ dhe $k(U)$.



Vizatimi 9



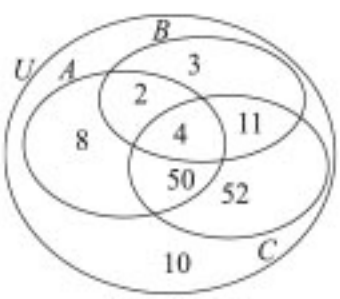
Vizatimi 10

2. Davidi shërben tortë dhe akullore në festën e 15-vjetorit të tij. Në festë ka gjithsej 54 të ftuar. Le të supozojmë se 30 të ftuar morën tortë, 20 të ftuar morën akullore dhe 12 të ftuar nuk morën as tortë as akullore. Sa të ftuar morën tortë dhe akullore?

3. Nga 50 turistë që vizituan Heraklenë, 35 turistë flasin anglisht, 20 turistë flasin gjermanisht dhe 15 turistë i flasin të dy gjuhët. Sa turistë nuk e flasin asnjë nga këto dy gjuhë?

4. Në një shkollë ka 600 nxënës. Nga ata, 150 nxënës duan çaj, 225 nxënës duan limonadë, 100 nxënës duan çaj dhe limonadë?
   Sa nxënës nuk duan as çaj as limonadë?

5. Sipas diagramit të Venit në vizatimin 11, gjeni:
   $k(A)$, $k(B)$, $k(C)$, $k(A \cap B)$, $k(A \cap C)$, $k(B \cap C)$, $k(A \cup B \cup C)$ dhe $k(U)$.



Vizatimi 11

6. Klubi i arteve në një shkollë kreu një anketë midis 42 anëtarëve të tij dhe zbuloi se 23 prej tyre përdorën ngjyra vaji, 28 përdorën ngjyra uji dhe 17 përdorën ngjyra druri. Nga ata, 10 anëtarë të klubit përdorën të tre llojet e ngjyrave, 18 përdorën ngjyra vaji dhe uji, 11 përdorën ngjyra uji dhe druri dhe 12 përdorën ngjyra vaji dhe druri. Anëtarët e tjerë të klubit nuk përdorën asnjë nga tre llojet e ngjyrave.
   a) Sa anëtarë të klubit përdorën vetëm ngjyra vaji?
   b) Sa anëtarë të klubit nuk përdorën asnjë nga tre llojet e ngjyrave?

7. Në një studim të kryer në një grup prej 60 të anketuarve, 25 të anketuar lexuan revistën A, 26 të anketuar lexuan revistën B, 26 të anketuar lexuan revistën C, 9 lexuan revistën A dhe revistën C, 11 lexuan revistën A dhe revistën B, 8 lexuan revistën B dhe revistën C dhe 3 të anketuar lexuan të tri revistat.

   a) Sa të anketuar lexuan të paktën një revistë?

   b) Sa të anketuar lexuan saktësisht një revistë?

8. Në një shkollë të mesme, nxënësit ndjekin kurse zgjedhore në shkencat natyrore:

   50 nxënës ndjekin kursin e biologjisë (B);

   38 nxënës ndjekin kursin e kimisë (K);

   36 nxënës ndjekin kursin e fizikës (F);

   20 nxënës ndjekin kursin e astronomisë (A);

   18 nxënës ndjekin kurset e biologjisë dhe kimisë;

   15 nxënës ndjekin kurset e kimisë dhe fizikës;

   10 nxënës ndjekin kurset e biologjisë dhe fizikës;

   5 nxënës ndjekin kurset e astronomisë dhe fizikës;

   6 nxënës ndjekin të tre kurset: biologji, kimi dhe fizikë;

   7 nxënës nuk ndjekin asnjë nga këto kurse.

   Më së shumti sa nxënës mund të ketë në shkollë?

**HULUMTIM**

Le të jenë dhënë bashkësia universale U dhe katër nënbashkësi të saj A, B, C dhe D, të cilat priten me njëra-tjetrën. Ato e ndajnë bashkësinë universale në nënbashkësi disjunkte, unioni i të cilave është bashkësia universale.

a) Në sa nënbashkësi disjunkte është ndarë bashkësia universale?

b) Vizatoni një diagram të Venit dhe shkruani të gjitha nënbashkësitë e tilla.

# 1.5. Prodhimi Kartezian i bashkësive

## Çifti i renditur

**AKTIVITET**

Roma ndodhet në gjerësinë gjeografike 42° dhe gjatësi gjeografike 12°. Xhibuti ndodhet në gjerësinë gjeografike 12° dhe gjatësi gjeografike 42°.

A janë të përcaktuara plotësisht pozitat gjeografike të Romës dhe Xhibutit me bashkësitë {42°, 12°} dhe {12°, 42°}?

### SHEMBULLI 1

Bashkësitë $\{1, 2\}$ dhe $\{2, 1\}$ janë të barabarta, d.m.th. $\{1, 2\} = \{2, 1\}$, sepse renditja e elementeve të një bashkësie nuk ka rëndësi.

Në matematikë dhe në jetën e përditshme, ndonjëherë radhitja e elementeve të një bashkësie ka rëndësi (i pari, i dyti, i treti, ...). Për shembull, secili prej nesh bën dallim midis këpucës së majtë dhe të djathtë, midis dorezës së majtë dhe të djathtë, etj.

### SHEMBULLI 2

Le të shqyrtojmë thyesat $\frac{4}{5}$ dhe $\frac{5}{4}$. Ato, megjithëse shkruhen me të njëjtët numra natyrorë 4 dhe 5, ndryshojnë në radhën e shkrimit, leximit dhe vlerës. Në thyesën e parë, numri 4 është në vendin e parë, në numërues, mbi vijën thyesore, ndërsa numri 5 është në vendin e dytë, në emërues, nën vijën thyesore. Në thyesën e dytë, numri 4 është në vendin e dytë, ndërsa numri 5 në vendin e parë. Themi se këto thyesa, dhe në rastin e përgjithshëm çdo thyesë, përfaqësojnë një çift të renditur numrash natyrorë.

### SHEMBULLI 3

Le t'i kthejmë vëmendjen numrave dyshifrorë 27 dhe 72. Ata, megjithëse shkruhen me të njëjtat shifra 2 dhe 7, ndryshojnë në radhitjen e shkrimit dhe leximit. Shifra 2 në numrin 27 është në vendin e parë dhe tregon dhjetëshet, ndërsa në numrin 72 ajo është në vendin e dytë dhe tregon njëshet.

Prandaj, themi se shifrat me të cilat shkruhen numrat dyshifrorë formojnë çifte të renditura shifrash, sepse gjatë shkrimit të tyre ka rëndësi se cila shifër është në vendin e parë dhe cila në të dytin.



Për çiftin e elementeve $a$, $b$, nëse elementi a është shpallur si i pari, ndërsa elementi $b$ si element i dytë, themi se paraqet **çift të renditur** dhe simbolikisht e shënojmë me $(a, b)$. Elementi $a$ i çiftit të renditur $(a, b)$ quhet **komponenti i parë**, ndërsa b quhet **komponenti i dytë** i $(a, b)$.

### SHEMBULLI 4

Komponenti i parë i çiftit të renditur (4, 7) është numri 4, ndërsa komponenti i dytë numri 7.

### DETYRA 1

Shkruani çiftin e renditur komponenti i parë i të cilit është shkronja $M$, ndërsa i dyti numri 3.

Elementet e çiftit të renditur mund të jenë edhe të barabartë $(a, a)$, vetëm se në këtë rast është e pakuptimtë të flitet për rradhitje të elementeve.

### DETYRË 2

Shkruani çiftet e renditura nga elementet e bashkësisë $P = \{0, 1\}$. Sa çifte të renditura keni shkruar? Sa çifte të renditura kanë komponentin e parë dhe të dytë të barabartë?

### DETYRË 3

Vendet për t'u ulur në teatër mund të shënohen me çifte të renditura numrash, ku i pari tregon rreshtin, dhe i dyti ulësen (figura 1).

A janë të barabartë çiftet e renditura (1, 2) dhe (2, 1)?

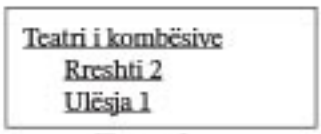


Figura 1

Dy çifte të renditura $(a, b)$ dhe $(c, d)$ janë të barabarta nëse dhe vetëm nëse $a = c$ dhe $b = d$. Në këtë rast shkruajmë $(a, b) = (c, d)$.

Sipas përkufizimit të barazisë së dy çifteve të renditura, nëse $a \neq b$ atëherë $(a, b) \neq (b, a)$.

### DETYRA 4

A është e saktë barazia $(3, 4) = (4, 3)$? Po barazia $\{3, 4\} = \{4, 3\}$?

### DETYRA 5

Gjeni $x$ dhe $y$ në mënyrë që të vlejë barazimi:

a) $(5, x) = (5, 3)$ b) $(12, y) = (x, 10)$ c) $(4 + x, 5) = (7, y + 2)$

## Prodhimi Kartezian i dy bashkësive

### AKTIVITET

Në shkollë ka 2 rreshta me nga 3 banka. Le t'i grupojmë në bashkësinë e rreshtave $R = \{\text{I, II}\}$ dhe bashkësinë e numrave rendor të bankave $K = \{1, 2, 3\}$.

Për çdo bankë shkruani një çift të renditur, ku komponenti i parë do të jetë rreshti, dhe i dyti numri rendor i bankës. Shkruani në formë tabelare bashkësinë e çifteve të renditura të fituara.

### SHEMBULLI 5

Le të jenë dhënë bashkësitë $A = \{a, b, c\}$ dhe $B = \{x, y\}$. Le të formojmë të gjitha çiftet e renditura ku komponenti i parë është element i bashkësisë $A$, dhe komponenti i dytë është element i bashkësisë $B$. Këto janë çiftet e renditura: $(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)$. Ato përcaktojnë një bashkësi të re, të cilën e shënojmë simbolikisht:

$A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$, dhe e quajmë **prodhim Kartezian** të bashkësisë $A$ dhe bashkësisë $B$. Lexohet: $A$ herë $B$.

**Prodhimi Kartezian** i bashkësisë A dhe bashkësisë B quhet bashkësia $A \times B$ (lexohet $A$ herë $B$), e përbërë nga të gjitha çiftet e renditura (x, y), ku komponenti i parë i përket $A$, dhe i dyti i përket $B$, d.m.th. $A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$,

Nëse të paktën njëra nga bashkësitë $A$ dhe $B$ është bashkësi boshe, atëherë sipas përkufizimit marrim se edhe Prodhimi Kartezian është bashkësi boshe: $A \times \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \times B = \emptyset$ dhe $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$.

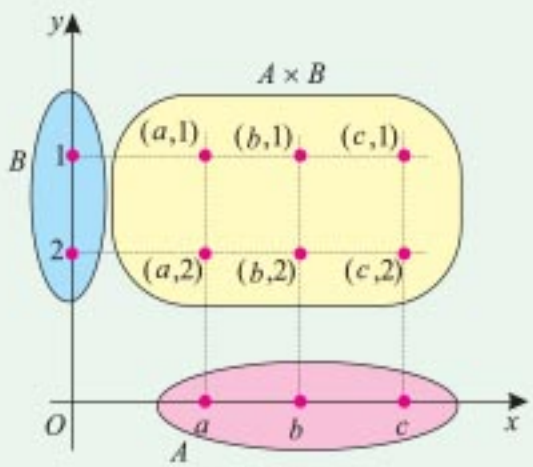
## SHEMBULLI 6

Nëse $A = \{a, b, c\}$ dhe $B = \{1, 2\}$, atëherë
$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$, ndërsa $B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$.

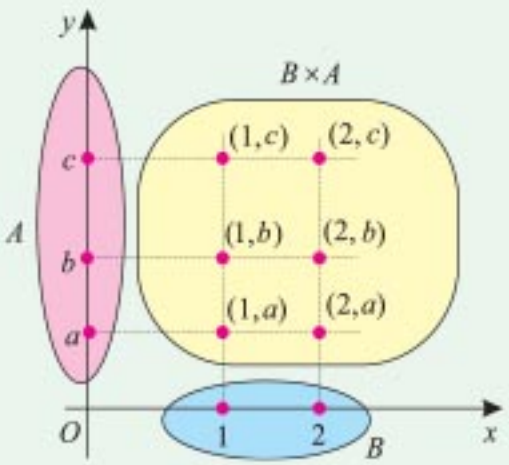
Siç e vërejmë, $A \times B \neq B \times A$. Prandaj, operacioni i prodhimit Kartezian nuk është komutativ.

Çiftet e renditura $(a, b)$, që janë elemente të prodhimit Kartezian të dy bashkësive $A$ dhe $B$, mund të shqyrtohen si koordinata të pikave në rrafshin koordinativ, me abshisë $a$ dhe ordinatë $b$. Kështu, çdo çifti të renditur i përgjigjet saktësisht një pikë në rrafshin koordinativ. Prandaj, çiftet e renditura shpesh i quajmë "pika në rrafsh" ose thjesht "pika".

Në vizatimin 1 dhe vizatimin 2 është dhënë **skema Karteziane** për ilustrim gjeometrik të bashkësive $A \times B$ dhe $B \times A$.




Vizatim 1




Vizatim 2

## DETYRA 6

Shkruani në formë tabelare bashkësitë prodhimi Kartezian i të cilave është:

a) $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$ b) $C \times D = \{(2, 5), (9, 5), (2, 7), (9, 3), (2, 3), (9, 7)\}$

## SHEMBULLI 7

Prodhimi Kartezian i bashkësisë $A = \{x, y\}$ është $A \times A = \{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y)\}$.
Bashkësinë $A \times A$ shpesh e quajmë katror Kartezian të bashkësisë A dhe e shënojmë me $A^2$. Lexojmë $A$ në katror.

**Katrori Kartezian** i bashkësisë $A$ quhet bashkësia $A^2 = A \times A$, e përbërë nga të gjitha çiftet e renditura $(x, y)$ të elementeve të bashkësisë A, gjegjësisht

$A^2 = A \times A = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dhe } y \in A\}$

Nënbashkësia $D$ e bashkësisë $A^2$ e përbërë nga elementet $(x, x)$, ku $x \in A$, quhet **diagonale** e bashkësisë $A$. Shkruajmë

$D(A) = \{(x, x) \mid x \in A\}$.

## SHEMBULLI 8

Le të jetë $A = \{a, b, c\}$, atëherë për Katrorin Kartezian dhe diagonalen e A kemi
$A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$, $D(A) = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$.

## DETYRA 7

Shkruani katrorin Kartezian të bashkësisë $K = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ dhe } 3 < x < 6\}$.

## AKTIVITET

Janë dhënë bashkësitë $A = \{2, 4\}$, $B = \{1, 3\}$ dhe $C = \{1, 2, 3\}$. A janë të sakta barazitë:

a) $A \times (B \cap C) = (A \times C) \cap (A \times C)$ dhe $(A \cap C) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

b) $A \times (B \cup C) = (A \times C) \cup (A \times C)$ dhe $(A \cup C) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

c) $A \times (B \setminus C) = (A \times C) \setminus (A \times C)$ dhe $(A \setminus C) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

Çfarë vëreni?

Për çfarëdo bashkësish të fundme $A$, $B$ dhe $C$ vlejnë barazitë:

a) $A \times (B \cap C) = (A \times C) \cap (A \times C)$ — Ligji distributiv i prodhimit Kartezian
$(A \cap C) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ — në lidhje me prerjen;

b) $A \times (B \cup C) = (A \times C) \cup (A \times C)$ — Ligji distributiv i prodhimit Kartezian
$(A \cup C) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ — në lidhje me unionin;

c) $A \times (B \setminus C) = (A \times C) \setminus (A \times C)$ — Ligji distributiv i prodhimit Kartezian
$(A \setminus C) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ — në lidhje me ndryshimin.

## SHEMBULLI 9

Janë dhënë bashkësitë $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{a, b\}$. Le të përcaktojmë numrin e elementeve të bashkësisë $A \times B$.

Kemi $k(A) = 3$ dhe $k(B) = 2$.

$(2, a), (2, b)$ Të gjitha çiftet e renditura me komponentin e parë 2.

$(4, a), (4, b)$ Të gjitha çiftet e renditura me komponentin e parë 4.

$(6, a), (6, b)$ Të gjitha çiftet e renditura me komponentin e parë 6.
$n(A \times B) = k(B) + k(B) + k(B) = k(A) \cdot k(B) = 3 \cdot 2 = 6.$



Për çfarëdo bashkësish të fundme $A$ dhe $B$ vlen barazimi $k(A \times B) = k(A) \cdot k(B)$.

## DETYRA 8

Gjeni numrin e elementeve të katrorit Kartezian të bashkësisë $M = \{a, b, c\}$.

## DETYRA 9

Një nxënës programon një pajisje Arduino për matje në kushte të ndryshme. Ka në dispozicion tre lloje sensorësh $S = \{$të temperaturës, të zërit, të dritës$\}$, dhe dy programe të ndryshme që mund t'i lidhë me sensorin $M = \{$programi $A$, programi $B\}$.

a) Shkruani Prodhimin Kartezian $S \times M$. Çfarë përfaqëson secili çift i renditur?

b) Sa mundësi të ndryshme ka për lidhjen e një sensori me një program?

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Shkruani të gjitha çiftet e renditura ku komponenti i parë është numri më i vogël i thjeshtë, dhe i dyti është numër i thjeshtë më i vogël se 10.

2. Shkruani të gjitha çiftet e renditura të numrave natyrorë $(a, b)$ të tillë që:
   a) $a + b = 6$ b) $a \cdot b = 6$

3. Gjeni $x$ dhe $y$ që të vlejë barazia:
   a) $(x + 2, y - 3) = (8, 2)$ b) $(4 \cdot x, 3) = (12, y - 2)$
   c) $(x, x + 1) = (y + 2, 3)$ ç) $(x, 2y) = (y - 1, 10)$

4. Janë dhënë bashkësitë $M = \{a, b, c\}$ dhe $N = \{a, b\}$. Shkruani prodhimin Kartezian të bashkësive dhe vizatoni skemën Karteziane të prodhimit:
   a) $M \times N$ b) $N \times M$

5. Paraqitni në formë tabelare bashkësitë prodhimi Kartezian i të cilave është:
   a) $A \times B = \{(1,1), (2,1), (3,1), (1,3), (2,3), (3,3)\}$,
   b) $M \times N = \{(m,1), (n,1), (p,1), (m,3), (n,3), (p,3), (m,5), (n,5), (p,5)\}$.

6. Shkruani katrorin Kartezian të bashkësisë:
   a) $S = \{2, 4, 6\}$, b) $P = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ dhe $6 < x < 9\}$.

7. Shkruani katrorin dhe diagonalen e bashkësisë $M = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ dhe $1 < x < 5\}$.
   Pastaj përcaktoni bashkësitë:
   a) $M^2 \setminus D(M)$ b) $M^2 \cup D(M)$ c) $(M^2 \cap D(M)) \setminus D(M))$ ç) $(M^2 \setminus D(M)) \cap D(M))$

8. 8. Janë dhënë bashkësitë:
$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ dhe } 2 < x < 6\}, B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ dhe } 3 \leq x < 7\}$ dhe $C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ dhe } 4 < x \leq 8\}$.
Shkruani bashkësitë: a) $(B \setminus A) \times C$ b) $(B \cap C) \times A$

9. Në laborator, nxënësit kryejnë eksperimente mbi bimët me ndihmën e kushteve të ndryshme të ndriçimit dhe llojeve të plehrave. Në dispozicion janë llojet e ndriçimit:
$L = \{$dritë e kuqe, dritë e kaltër, dritë e bardhë$\}$, dhe llojet e plehrave
$G = \{$organike, minerale$\}$.
a) Shkruani prodhimin Kartezian $L \times G$.
b) Nëse secili eksperiment zgjat 3 ditë, sa ditë do të duhen për të përfunduar të gjitha eksperimentet nëse bëhen një nga një?

# 1.6. Numrat natyrorë

## Renditja në bashkësinë e numrave natyrorë

Bashkësia themelore e numrave është bashkësia e **numrave natyrorë** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$.
Bashkësinë $\mathbb{N} \cup \{0\}$ e shënojmë me $\mathbb{N}_0$ dhe e quajmë **bashkësia e zgjeruar e numrave natyrorë** $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$.

Për çdo dy elemente $m, n \in \mathbb{N}_0$, e vërtetë është një dhe vetëm një nga pohimet e mëposhtme: ose $m = n$, ose $m + c = n$, për ndonjë $c \in \mathbb{N}$, ose $m = n + d$ për ndonjë $d \in \mathbb{N}$.
Në rastin e dytë themi se $m$ është **më e vogël se** $n$ dhe shkruajmë $m < n$, ndërsa në rastin e tretë themi se m është **më e madh se** $n$ dhe shkruajmë $m > n$. Sipas kësaj, numrat natyrorë mund të renditen në mënyrën në vazhdim: $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots < n < n + 1 < \ldots$

Numri $n + 1$ quhet **pasardhës** i numrit $n$, ndërsa numri $n$ quhet **paraardhës** i numrit $n + 1$. Çdo numër natyror ka një pasardhës të vetëm, numri 0 nuk ka paraardhës, ndërsa çdo numër tjetër natyror ka një paraardhës të vetëm.

Një mënyrë e dobishme dhe e qartë për paraqitjen e bashkësisë $\mathbb{N}_0$ është **gjysmëdrejtëza numerike**.
Në një drejtëz $p$ zgjedhim dy pika $O$ dhe $E$, të cilat e përcaktojnë gjysmëdrejtëzën me fillim në $O$.
Duke e bartur segmentin $OE$ djathtas, fitojmë pafund shumë pika (vizatimi 1).
Pikës $O$ i shoqërojmë numrin 0, pikës $E$ numrin 1, pikës së ardhshme në të djathtë i shoqërojmë numrin 2, etj. Nëse pikës $A$ i shoqërojmë numrin $n$, atëherë pikës së ardhshme në të djathtë i shoqërojmë pasardhësin e menjëhershëm $n + 1$.



Vizatimi 1



Vizatimi 2

Në këtë mënyrë, çdo numri natyror i shoqërojmë pika të gjysmëdrejtëzës $OE$ (vizatimi 2).
Gjysmëdrejtëza numerike mund të na shërbejë për krahasimin e elementeve të bashkësisë $\mathbb{N}_0$.
Në këtë kuptim, $m < n$ nëse pika së cilës i është shoqëruar numri m është në të majtë të pikës së cilës i është shoqëruar numri $n$.

**DETYRA 1**

Krahasoni numrat natyrorë: a) 1 dhe 6 b) 8 dhe 4 c) 16 dhe 22 ç) 0 dhe 32

## Veprimet (operacionet) në bashkësinë e numrave natyrorë

**AKTIVITET**

a) Ana ka 8 lapsa me ngjyrë të kaltër dhe 7 lapsa me ngjyrë të kuqe. Sa lapsa me ngjyrë gjithsej ka Ana?

b) Nëse A dhe B janë dy bashkësi të fundme disjunkte të tilla që $k(A) = a$ dhe $k(B) = b$, sa është $k(A \cup B)$?

Le të jenë $A$ dhe $B$ dy bashkësi të fundme disjunkte të tilla që $k(A) = a$ dhe $k(B) = b$.
**Shuma** e numrave natyrorë $a$ dhe $b$ është numri natyror $c$ i tillë që $c = k(A \cup B)$.
Shkruajmë $a + b = c$.
Numrat $a$ dhe $b$ quhen **mbledhës**, ndërsa operacioni i kryer quhet **mbledhje**.

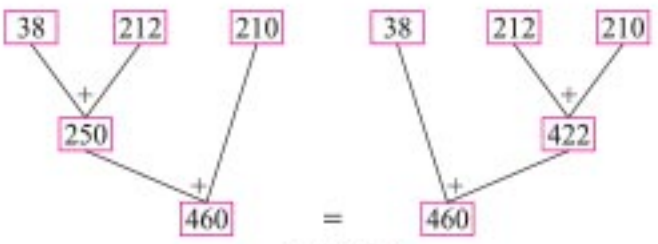
Për mbledhjen e numrave natyrorë vlejnë vetitë (ligjet) e mëposhtme:

a) nëse $a, b \in \mathbb{N}$, atëherë edhe $a + b \in \mathbb{N}$ — Ligji i mbyllësisë së mbledhjes

b) $a + b = b + a$, për çdo $a, b \in \mathbb{N}$ — Ligji komutativ i mbledhjes

c) $(a + b) + c = a + (b + c)$, për çdo $a, b, c \in \mathbb{N}$ — Ligji asociativ i mbledhjes

Ligji komutativ tregon se shuma nuk varet nga renditja e mbledhësve, për shembull $12 + 7 = 19$ dhe $7 + 12 = 19$.
Ligji asociativ tregon se shuma nuk varet nga mënyra e grupimit të mbledhësve, gjë që mund të vërehet në vizatimin 3.
Prandaj, shumën e tre ose më shumë mbledhësve gjithmonë mund t'a shkruajmë pa kllapa.



Vizatimi 3

**SHEMBULLI 1**

Njehsoni shumën e numrave natyrorë në mënyrën më të thjeshtë:
a) $147 + 33 + 17 + 503$ b) $1 + 2 + 3 + \ldots + 19$

a) $147 + 33 + 17 + 503 = (147 + 33) + (17 + 503) = 180 + 520 = 700$

b) $1 + 2 + 3 + \ldots + 19 = (1 + 19) + (2 + 18) + \ldots + (9 + 11) + 10 = 9 \cdot 20 + 10 = 190$

**Prodhimi** i dy numrave natyrorë a dhe $b$ quhet shuma e $a$ mbledhësve, secili prej të cilëve është i barabartë me $b$ dhe shënohet me $ab$ $\underbrace{b+b+\ldots+b}_{a-\text{mbledhësve}}=ab$

Numrat $a$ dhe $b$ quhen **shumëzues**, ndërsa operacioni i kryer quhet **shumëzim**.

## DETYRA 2

Kontrolloni vërtetësinë e barazive:

a) $8\cdot 9=9\cdot 8$ b) $(7\cdot 4)\cdot 5=7\cdot(4\cdot 5)$

c) $4\cdot(3+8)=4\cdot 3+4\cdot 8$ ç) $(3+8)\cdot 4=3\cdot 4+8\cdot 4$

Për shumëzimin e numrave natyrorë vlejnë vetitë (ligjet) e mëposhtme:

a) nëse $a, b\in\mathbb{N}$, atëherë edhe $a\cdot b\in\mathbb{N}$ — Ligji i mbyllësisë së shumëzimit

b) $a\cdot b=b\cdot a$, për çdo $a, b\in\mathbb{N}$ — Ligji komutativ i shumëzimit

c) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$, për çdo $a, b, c\in\mathbb{N}$ — Ligji asociativ i shumëzimit

ç) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$, dhe $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$, për çdo $a, b, c\in\mathbb{N}$ — Ligji distributiv i shumëzimit në lidhje me mbledhjen

## AKTIVITET

Shpjegoni procedurën për njehsimin e mbledhësit të panjohur në barazimin $5+x=9$.

**Ndryshimi** i numrit natyror $a$ me numrin natyror $b$ quhet numri natyror $c$, i cili i mbledhur me numrit $b$ e jep numrin $a$. Shkruajmë $a-b=c$, nëse $a=c+b$.
Numri $a$ quhet **i zbritshmi**, numri $b$ quhet **zbritësi**, ndërsa operacioni i kryer quhet **zbritje**.

### SHEMBULLI 2

Shkruani në formë tabelare bashkësitë $A=\{x\mid x\in\mathbb{N}$ dhe $3<x<26\}$ dhe $B=\{x\mid x\in\mathbb{N}$ dhe $2<x<8\}$, pastaj gjeni bashkësinë $C=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B$ dhe $a-7=b\}$

$A=\{4, 5,\ldots,25\}$, $B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$ dhe $C=\{(10, 3), (11, 4), (12, 5), (13, 6), (14, 7)\}$.

### SHEMBULLI 3

a) Për operacionin e zbritjes në bashkësinë e numrave natyrorë **nuk vlen ligji i mbyllësisë**. Kështu, për shembull, $2-3$ nuk është numër natyror, sepse nuk ekziston numër natyror i cili i mbledhur me numrin 3 të japë numrin 2.

b) Për operacionin e zbritjes në bashkësinë e numrave natyrorë nuk vlejnë **ligji komutativ dhe ligji asociativ**. Kështu, për shembull,
$15 - 8$ është numër natyror, ndërsa $8 - 15$ nuk është numër natyror;
$15 - (8 - 3) \neq (15 - 8) - 3$.

## DETYRA 3

Kontrolloni vërtetësinë e barazive:

a) $7 \cdot (6 - 2) = 7 \cdot 6 - 7 \cdot 2$ b) $(6 - 2) \cdot 7 = 6 \cdot 7 - 2 \cdot 7$



Nëse $a$ dhe $b$ janë numra natyrorë të tillë që $a - b \in \mathbb{N}$, atëherë vlen
$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c = c \cdot (a - b)$, për çdo $c \in \mathbb{N}$ Ligji distributiv i shumëzimit në lidhje me zbritjen

Mbledhja dhe shumëzimi i numrave natyrorë mund të zgjerohen në bashkësinë $\mathbb{N}_0$ duke marrë:
$a + 0 = 0 + a = a$ dhe $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, për çdo $a \in \mathbb{N}_0$.

## AKTIVITET

Shpjegoni procedurën për njehsimin e shumëzuesit të panjohur në barazimin $x \cdot 32 = 384$.



**Herësi** i numrit natyror $a$ me numrin natyror $b$ quhet numri natyror $c$, i cili i shumëzuar me numrin $b$ e jep numrin $a$. Shkruajmë $a : b = c$, nëse $a = b \cdot c$.

Numri $a$ quhet **i pjesëtueshmi**, numri $b$ quhet **pjesëtuesi**, ndërsa operacioni i kryer quhet **pjesëtim**.

## SHEMBULLI 4

Për operacionin e pjesëtimit në bashkësinë e numrave natyrorë nuk vlen ligji i mbylltësisë, pra ekzistojnë $a, b \in \mathbb{N}$ të tillë që $a : b \notin \mathbb{N}$. Kështu, për shembull, $2 : 3$ nuk është numër natyror, sepse nuk ekziston numër natyror që i shumëzuar me numrin 3 të japë numrin 2.

## DETYRA 4

Kontrolloni vërtetësinë e barazive:

a) $(6 + 2) : 2 = 6 : 2 + 2 : 2$ b) $(6 - 2) : 2 = 6 : 2 - 2 : 2$



Nëse $a$ dhe $b$ janë numra natyrorë të tillë që $a : c, b : c, (a - b) : c \in \mathbb{N}$, atëherë vlen
$(a + b) : c = a : c + b : c$, dhe Ligji distributiv i djathtë i pjesëtimit në lidhje me mbledhjen dhe zbritjen
$(a - b) : c = a : c - b : c$, për çdo $a, b, c \in \mathbb{N}$

### DETYRA 5

Një test përmban 15 detyra. Për çdo detyrë të zgjidhur saktë jepen 4 pikë, ndërsa për çdo detyrë të zgjidhur gabimisht zbriten 2 pikë. Maja, Marko dhe Iliri i zgjidhën të gjitha detyrat.

a) Sa pikë fitoi Maja, nëse saktë ka zgjidhur vetëm 9 detyra?

b) Sa pikë ka Marko i cili saktë zgjidhi vetëm 5 detyra?

c) Sa detyra ka zgjidhur gabimisht Iliri, nëse ai ka fituar 48 pikë?

## Pjesëtueshmëria në $\mathbb{N}_0$

### AKTIVITET

Sa është: a) $246 : 6$ b) $182 : 9$?

Me siguri gjetët se $246 : 6 = 41$.

Më tej gjetët se 182 nuk mund të pjesëtohet me 9, sepse nuk ekziston numër natyror i cili i shumëzuar me 9 të japë numrin 182. Nga ana tjetër, $182 = 9 \cdot 20 + 2$.



Numri natyror $b$ është **pjesëtues** i numrit natyror $a$, nëse dhe vetëm nëse ekziston numri natyror $c$ i tillë që $a = b \cdot c$. Për numrin a themi se është **i pjesëtueshëm** me numrin $b$. Shënojmë $b \mid a$.

### SHEMBULLI 5

Numri 4 është pjesëtues i numrit 28, gjegjësisht numri 28 është i pjesëtueshëm me numrin 4, sepse $28 = 4 \cdot 7$ dhe shkruajmë $4 \mid 28$.

Numri 4 nuk është pjesëtues i numrit 30, sepse nuk ekziston numër natyror që i shumëzuar me 4 të japë numrin 30.



Sipas vetive të pjesëtueshmërisë, një numër natyror është i pjesëtueshëm:

a) me 2 nëse dhe vetëm nëse mbaron me shifër çift;
b) me 3 nëse dhe vetëm nëse shuma e shifrave të tij është numër i pjesëtueshëm me 3;
c) me 4 nëse dhe vetëm nëse dy shifrat e fundit të tij formojnë numër të pjesëtueshëm me 4 ose mbaron me 00;
ç) me 5 nëse dhe vetëm nëse mbaron me 0 ose 5;
d) me 9 nëse dhe vetëm nëse shuma e shifrave të tij është numër i pjesëtueshëm me 9;
dh) me 10 nëse dhe vetëm nëse mbaron me 0.

### SHEMBULLI 6

Me ndihmën e vetive të pjesëtueshmërisë mund të konstatojmë se:

a) numri 56 është i pjesëtueshëm me 2, sepse mbaron me shifër çift;

b) numri 96 është i pjesëtueshëm me 3, sepse shuma e shifrave të tij është numër i pjesëtueshëm me 3;

c) numrat 524 dhe 200 janë të pjesëtueshëm me 4. Dy shifrat e fundit të numrit 524 formoj numër të pjesëtueshëm me 4, ndërsa numri 200 mbaron me 00;

ç) numrat 45 dhe 270 janë të pjesëtueshëm me 5. Numri 45 mbaron me shifrën 5, ndërsa numri 270 mbaron me shifrën 0;

d) numri 620 është i pjesëtueshëm me 10, sepse mbaron me 0.

Meqenëse pjesëtimi nuk është operacion i mbyllur në $\mathbb{N}$, ne e sjellim pjesëtimin me **mbetje**.



Për çdo $a, b \in \mathbb{N}$, ekzistojnë numra të vetëm $p, q \in \mathbb{N}_0$ të tillë që $a = bp + q$ dhe $0 \leq q < b$.

Numri $p$ quhet **herës**, ndërsa numri $q$ quhet **mbetje** gjatë pjesëtimit të të **pjesëtueshmit** $a$ me **pjesëtuesin** $b$. Nëse $q = 0$, pjesëtimi me mbetje, i cili në të vërtetë është pjesëtim, quhet **pjesëtim pa mbetje**.

### SHEMBULLI 7

Çdo numër natyror gjatë pjesëtimit me 2 mund të ketë mbetje 0 ose 1.

Numrat çift gjatë pjesëtimit me 2 kanë mbetje 0, ndërsa numrat tek gjatë pjesëtimit me 2 kanë mbetje 1. Për këto arsye, numrat çift mund t'i shkruajmë në formën $2n$, $n \in \mathbb{N}$, ndërsa numrat tek në formën $2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.

### SHEMBULLI 8

Çdo numër natyror gjatë pjesëtimit me 5 mund të ketë mbetje 0, 1, 2, 3 ose 4. Sipas kësaj, çdo numër natyror mund të shkruhet në formën $5n$, $5n + 1$, $5n + 2$, $5n + 3$ dhe $5n + 4$, për $n \in \mathbb{N}_0$.



Numri natyror më i madh se 1, i cili është i pjesëtueshëm vetëm me 1 dhe me vetveten, quhet **numër i thjeshtë**.
Numrat natyrorë më të mëdhenj se 1 që nuk janë thjeshtë quhen **numra të përbërë.**

Nga përkufizimi menjëherë përfundojmë se çdo numër i thjeshtë ka saktësisht dy pjesëtues, ndërsa çdo numër i përbërë ka më shumë se dy pjesëtues.

### SHEMBULLI 9

Numri 11 është numër i thjeshtë, sepse pjesëtues të tij janë vetëm numrat 1 dhe 11, ndërsa numri 10 është numër i përbërë sepse pjesëtuesit e tij janë 1, 2, 5 dhe 10. Numri 1 nuk është as i thjeshtë as i përbërë. Çdo numër i përbërë mund të paraqitet si prodhim i numrave të thjeshtë.

Paraqitja e një numri në formën e prodhimit të numrave të thjeshtëë quhet **zbërthim i numrit në shumëzues të thjeshtë.**

## SHEMBULLI 10

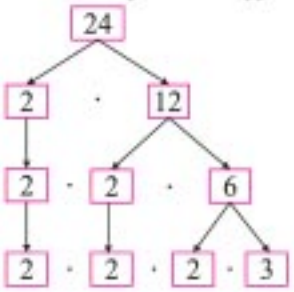
Numri 24 është zbërthyer në pjesëtues të thjeshtë:

a) me anë të një tabele vertikale

| | |
|---|---|
| 24:2=12 | 24 \| 2 |
| 12:2=6 | 12 \| 2 |
| 6:2=3 | 6 \| 2 |
| 3:3=1 | 3 \| 3 |
| | 1 |

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$

b) me anë të pemës së pjesëtuesve




## DETYRA 6

Me anë të tabelës vertikale, zbërthejeni në shumëzues të thjeshtë numrin: a) 60 b) 120 c) 153 ç) 425

## SHEMBULLI 11

Zbërthejeni në shumëzues të thjeshtë numrin 167.

Sipas vetive të pjesëtueshmërisë konstatojmë se numri 167 nuk është i pjesëtueshëm me 2, 3 dhe 5. Numrat e thjeshtë të ardhshëm janë 7 dhe 11, dhe me kontroll konstatojmë se 167 nuk është i pjesëtueshëm me asnjërin prej tyre. Meqenëse $167 < 169 = 13 \cdot 13$, rrjedh që 167 nuk mund të ketë pjesëtues më të mëdhenj se 13, sepse atëherë do të kishte edhe pjesëtues të thjeshtë më të vogël se 13, por nuk ka të tillë, prandaj ai është numër i thjeshtë. Prandaj, $167 = 1 \cdot 167$.



Nëse numri natyror $p$ nuk është i pjesëtueshëm me asnjë numër të thjeshtë katrori i të cilit nuk është më i madh se $p$, atëherë numri $p$ është numër i thjeshtë.

## SHEMBULLI 12

Janë dhënë numrat 8, 12 dhe 20.

a) Gjeni të gjithë pjesëtuesit e secilit prej numrave. b) Gjeni të gjithë pjesëtuesit e tyre të përbashkët.

Bashkësitë e pjesëtuesve janë: $D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$, $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ dhe $D_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

b) Bashkësia e pjesëtuesve të përbashkët është prerja $D_8 \cap D_{12} \cap D_{20} = \{1, 2, 4\}$.



**Pjesëtues i përbashkët** i dy ose më shumë numrave natyrorë, midis të cilëve të paktën njëri është i ndryshëm nga zero, është çdo numër natyror me të cilin pjesëtohet secili prej numrave.

Numri më i madh midis pjesëtuesve të përbashkët të dy ose më shumë numrave natyrorë quhet **pjesëtuesi më i madh i përbashkët i numrave** (PMP).

## DETYRA 7

Gjeni të gjithë pjesëtuesit e përbashkët të numrave 45, 75 dhe 165.

## SHEMBULLI 13

Gjeni PMP(90, 135, 315).
Për të gjetur pjesëtuesin më të madh të përbashkët të dy ose më shumë numrave, është e nevojshme t'i zbërthejmë numrat në shumëzues të thjeshtë.
Zbërthimin mund ta bëjmë njëkohësisht me një tabelë vertikale.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 90, | 135, | 315 | 3 |
| 30, | 45, | 105 | 3 |
| 10, | 15, | 35 | 5 |
| 2, | 3, | 7 | |

PMP(90, 135, 315) = 3 · 3 · 5 = 45

Me siguri e keni vënë re se numri më i madh midis pjesëtuesve të përbashkët të dy ose më shumë numrave është i barabartë me prodhimin e fuqive të shumëzuesve të tyre të thjeshtë të përbashkët, ku për tregues të çdo shumëzuesi të thjeshtë marrim treguesin më të vogël.

## DETYRA 8

Gjeni PMP të numrave: a) 24 dhe 30 b) 30, 105 dhe 210 c) 9 dhe 16

Nëse për numrat $a$ dhe $b$ vlen PMP$(a, b) = 1$, atëherë themi se $a$ dhe $b$ janë **numra të thjeshtë ndërmjet vete (ose relativisht të thjeshtë).**

## DETYRA 9

Një inxhinier ka dy kabllo elektrike, njëri 36 metra i gjatë, dhe tjetri 60 metra i gjatë. Cila është gjatësia më e madhe me të cilën kabllot e dhëna mund të ndahen në pjesë të barabarta

## SHEMBULLI 14

Janë dhënë numrat 5 dhe 15.
a) Gjeni bashkësinë e shumëfishave të secilit prej numrave.
b) Gjeni bashkësinë e shumëfishave të tyre të përbashkët.

a) Bashkësitë e shumëfishave janë:
$S_5 = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, ...\}$ dhe $S_{15} = \{15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, ...\}$.
b) Bashkësia e shumëfishave të përbashkët është prerja $S_5 \cap S_{15} = \{15, 30, 45, 60, ...\}$.

Numrin natyror $a$ e quajmë **shumëfish** të numrit natyror $b$, nëse $b$ është pjesëtues i $a$, pra nëse $b \mid a$.

**Shumëfish i përbashkët** i dy ose më shumë numrave natyrorë është çdo numër natyror që është i pjesëtueshëm me secilin prej numrave. Numri më i vogël midis shumëfishave të përbashkët quhet **shumëfishi më i vogël i përbashkët i numrave** (SHVP).

## DETYRA 10

Gjeni të gjithë shumëfishat e përbashkët të numrave 60, 72 dhe 90.

## SHEMBULLI 15

Për të gjetur shumëfishin më të vogël të përbashkët të dy ose më shumë numrave, është e nevojshme t'i zbërthejmë numrat në shumëzues të thjeshtë. Zbërthimin mund ta bëjmë njëkohësisht me një tabelë vertikale.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 54, | 120, | 140, | 450, | 2 |
| 27, | 60, | 70, | 225 | 2 |
| 27, | 30, | 35, | 225 | 2 |
| 27, | 15, | 35, | 225 | 3 |
| 9, | 5, | 35, | 75 | 3 |
| 3, | 5, | 35, | 25 | 3 |
| 1, | 5, | 35, | 25 | 5 |
| | 1, | 7, | 5 | 5 |
| | | 7, | 1 | 7 |
| | | 1, | | |

$\text{SHVP}(54, 120, 140, 450) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$

$= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 37\,800$

Me siguri e keni vënë re se numri më i vogël midis shumëfishave të përbashkët të dy ose më shumë numrave është i barabartë me prodhimin e fuqive të shumëzuesve të thjeshtë të përbashkët të tyre, ku për tregues të çdo shumëzuesi të thjeshtë marrim treguesin më të madh.

## DETYRA 11

Gjeni SHVP të numrave: a) 6 dhe 12 b) 15 dhe 16 c) 9 dhe 16

Me siguri e keni vënë re se shumëfishi më i vogël i përbashkët i dy ose më shumë numrave të thjeshtë ndërmjet vete është prodhimi i tyre. Përveç kësaj, nëse numri $a$ është shumëfish i numrit $b$, atëherë $\text{SHVP}(a, b) = a$.

## DETYRA 12

Përgjatë një rruge nga qyteti $A$ në qytetin $B$ janë vendosur shtylla në çdo 35 metra nga njëra-tjetra. Më pas, shtyllat janë të zhvendosur në distancë 50 metra nga njëra-tjetra. Në çfarë distance më të vogël nga qyteti A një shtyllë e vjetër nuk do të jetë e zhvendosur?

## DETYRA PËR USHTRIME

1. A është i saktë pohimi:
   a) numri 5 është paraardhës i numrit 12 b) numri 18 është pasardhës i numrit 6
   c) numri 30 është paraardhës i numrit 29 ç) numri 5 është pasardhës i 4

2. Kryeni operacionet e shënuara në mënyrën më të thjeshtë:
   a) $234 + 457 + 146 + 473$ b) $13 + 47 + 28 + 62 + 91 + 89$
   c) $1 + 2 + \ldots + 50$ ç) $125 \cdot 25 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 4$

3. Cila shifër duhet të qëndrojë në vend të * në numrin:
   a) 23 * 469, që ai të jetë i pjesëtueshëm me 3 b) 113*, që ai të jetë i pjesëtueshëm me 4?

4. Në një shportë ka më pak se 100 limonë. Ato mund të shpërndahen në mënyrë të barabartë në 2, 3 ose 5 shporta më të vogla, por nuk mund të shpërndahen në mënyrë të barabartë në 4 shporta. Sa limonë ka në shportë?

5. Njehsoni pjesëtuesin nëse i pjesëtueshmi është 170 dhe mbetja është 11.

6. Zbërthejeni në shumëzues të thjeshtë numrin: a) 96 b) 120 c) 231

7. Gjeni pjesëtuesit e përbashkët të numrave:
   a) 24 dhe 36 b) 15 dhe 18 c) 240 dhe 360 ç) 30, 70 dhe 105
   Pastaj gjeni pjesëtuesin e tyre më të madh të përbashkët.

8. Një fabrikë e vogël për pjekje në një turn prodhon 420 gjevrekë dhe 130 biskota të kripura. Ato i paketon në kuti me numër të barabartë gjevrekësh dhe biskotash. Sa gjevrekë, dhe sa biskota, do të ketë në çdo kuti?

9. Gjeni shumëfishin më të vogël të përbashkët të numrave:
   a) 6, 10, 12 dhe 15 b) 12, 75, 100 dhe 240 c) 525 dhe 625

10. Në lulishte ka më shumë se 100, por më pak se 250 trëndafila. Shiten buketa me nga 3, 5 ose 7 trëndafila. Sa trëndafila ka në lulishte nëse gjatë përgatitjes së buketave nuk ka mbetur asnjë trëndafil?

11. Marko shkon në not çdo të tretën ditë, mëson gjuhën kineze çdo të katërtën ditë dhe nget biçikletën çdo të katërmbëdhjetën ditë. Nëse sot Marko i ka të tre aktivitetet, përcaktoni për sa ditë do t'i ketë përsëri të tre aktivitetet në të njëjtën ditë.

12. Polin e jugut e kalojnë njëkohësisht 3 satelitë. I pari e përshkon tokën për 90 minuta, i dyti për 105 minuta, dhe i treti për 120 minuta. Sa herë do ta përshkojë tokën sateliti i parë deri në momentin kur të tre satelitët do të gjenden përsëri mbi Polin e jugut?

**HULUMTIM**

Procedura për përcaktimin e numrave të thjeshtë nga një varg i fundëm numrash natyrorë njihet me emrin **Sita e Eratostenit.**

Numri 1 nuk është as i thjeshtë as i përbërë, e shlyejmë.

Numri 2 është numër i thjeshtë, pas tij shlyejmë çdo numër çift.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ~~1~~ | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 | ~~6~~ | 7 | ~~8~~ | ~~9~~ | ~~10~~ |
| 11 | ~~12~~ | 13 | ~~14~~ | ~~15~~ | ~~16~~ | 17 | ~~18~~ | 19 | ~~20~~ |

Numri 3 është numër i thjeshtë, pas tij shlyejmë çdo të tretin numër (numër të pjesëtueshëm me 3).

Procedura vazhdon për çdo numër të thjeshtë të ardhshëm të pashlyer.

Me ndihmën e procedurës së mësipërme, gjeni të gjithë numrat e thjeshtëë deri në 100.

**HULUMTIM**

Almiri mendoi një numër më të vogël se 150. Nëse atë numër e pjesëton me 2 do të fitosh mbetjen 1, nëse e pjesëton me 3 do të fitosh mbetjen 2, nëse e pjesëton me 4 do të fitosh mbetjen 3, nëse e pjesëton me 5 do të fitosh mbetjen 4, nëse e pjesëton me 6 do të fitosh mbetjen 5, nëse e pjesëton me 7 do të fitosh mbetjen 0.

Hulumtoni dhe zbuloni numrin që mendoi Almiri.

# 1.7. Numrat e plotë dhe veprimet me numra të plotë

## Numrat e plotë

Veprimi i zbritjes nuk është gjithmonë i mundshëm në bashkësinë e numrave natyrorë. Kështu, për shembull, ndryshimi 5 – 7 nuk është numër natyror. Gjithashtu, në praktikë hasim dukuri të cilat matematikisht nuk mund të përshkruhen nëpërmjet numrave natyrorë.

### AKTIVITET

a) Zhiva e termometrit në Shkup tregon 10 °C nën zeron.

b) Mirko dëshironte të blinte dhuratë prej 600 denarësh, por me vete kishte vetëm 500 denarë. Mirko huazoi 100 denarë nga prindërit e tij dhe e bleu dhuratën.

Në atë moment Mirko nuk posedonte asnjë denar dhe për më shumë ju kishte borxh prindërve 100 denarë. A mund të shprehni temperaturën në Shkup, si dhe gjendjen financiare të Mirkon me ndihmën e numrave natyrorë? Me cilët numra do e bëni atë?

Për tejkalimin e problemit me zbritjen në bashkësinë e numrave natyrorë, si përshkrimi matematik i disa dukurive, bashkësinë $\mathbb{N}_0$ e zgjerojmë deri në një bashkësi të re, të quajtur **bashkësia e numrave të plotë.**

Në drejtëzën numerike në të djathtë të zeros i vëndojmë numrat 1, 2, 3, ... Atë kahje do ta konsiderojmë si **kahje pozitive**, ndërsa numrat e vendosur në atë kahje do t'i quajmë **numra të plotë pozitivë** (vizatimi 1). Për ta themi se kanë parashenjë pozitive ( + ).



Vizatimi 1



Vizatimi 2

Kahja e kundërt e drejtëzës numerike quhet **kahje negative**. Në atë kahje, me vendosjen e gjatësive të barabarta, vendosim **numrat e plotë negativë** –1, –2, –3, ... (vizatimi 2). Për ata themi se kanë parashenjë negative (–).

Numri 0 nuk është as numër i plotë pozitiv e as negativ. Ai i ndanë numrat e plotë pozitivë nga ata negativë (vizatimi 3).



Vizatimi 3



Vizatimi 4

Bashkësia e të gjithë numrave të plotë negativë $\mathbb{Z}^- = \{..., -3, -2, -1\}$, numri 0 (zero) dhe të gjithë numrave të plotë pozitivë $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$, e përbëjnë **bashkësinë e numrave të plotë** të cilën e shënojmë me $\mathbb{Z}$, dmth $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$.

Çdo element i bashkësisë $\mathbb{Z}$ quhet **numër i plotë**.

## DETYRA 1

Vitet para lindjes së Krishtit numërohen si "viti 1 p.e.s", "viti 2 p.e.s" etj. Vitet, para erës sonë mund t'i shkruajmë me numrat e plotë negativë, ndërsa vitet e erës sonë me numrat e plotë pozitivë.
Vizatoni drejtëzën numerike dhe shënoni numrin që i përgjigjet:

a) 2 vite para lindjes së Krishtit

b) vitin e lindjes së matematikanëve: Arkimedi 287 p.e.s., Pitagora 570 p.e.s., Rene Dekart 1596 dhe Leonard Ojler 1707.

### SHEMBULLI 1

Në vijën numerike tregoni pikat: $-3$, 3, $-4$ dhe 4. Çfarë vëreni?

Numrat $-3$ dhe 3, si dhe numrat $-4$ dhe 4, janë të vendosur në mënyrë simetrike në lidhje me zeron.
Numra të tillë i quajmë **numra të kundërt**.



Për çdo numër të plotë $a$ ekziston një numër i vetëm $b$, i tillë që numrat $a$ dhe b janë të kundërt:

a) nëse $a = c$, atëherë $b = -c$;

b) nëse $a = -c$, atëherë $b = c$;

c) nëse $a = 0$, atëherë $b = 0$.

Vetëm numri i plotë 0 është i kundërt me vetveten.

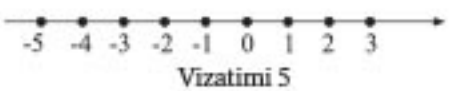
$-(a) = -a$
$-(-a) = a$
$-0 = 0$

## DETYRA 2

Shkruani numrin e kundërt të secilit prej numrave: 9, 0, $-(+3)$, $-(-7)$.

### SHEMBULLI 2

Pika e shoqëruar me numrin 3 është e larguar 3 njësi nga zeroja, ndërsa pika e shoqëruar me numrin $-5$ është e larguar 5 njësi nga zeroja (vizatimi 5).



Vizatimi 5

Për çdo numër të plotë mund të themi se sa është i larguar nga numri 0.



Largesa e çdo numri të plotë $a$ nga 0 në drejtëzën numerike quhet **vlerë absolute** e numrit të plotë a dhe shënohet me $|a|$.
Sipas përkufizimit dhe vëzhgimeve nga shembulli i mëparshëm mund të shkruajmë

$$|a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}.$$

## DETYRA 3

Njehsoni: a) $|-3+5|+|-2\cdot(-3)-11|$ b) $|-x-2|+|3-x|-|5-x|$, për $x=-20$

Gjatë **krahasimit** të numrave të plotë vlen i njëjti rregull si te numrat natyrorë, gjegjësisht një numër i plotë $a$ është më i vogël se një numër i plotë $b$ nëse dhe vetëm nëse në boshtin numerik numri a ndodhet në të majtën e numrit b dhe shkruajmë $a < b$.
Numrat e plotë sipas madhësisë mund të renditen në mënyrën e mëposhtme:

$$\ldots < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 \ldots$$

## DETYRA 4

Paraqitini në boshtin numerik numrat: 0, 2, 3, −7, 9, −8, −2, −10 dhe −1. Pastaj radhitini në:
a) radhitje rritëse, b) radhitje rënëse.

## DETYRA 5

Vizatoni drejtëzën numerike dhe shënoni vlerat e temperaturave të dhëna në tabelë.
Në cilin qytet bën më ftohtë:

a) Shkup apo Manastir b) Berovë apo Shkup
c) Manastir apo Berovë d) Shkup apo Strumicë?

| Qyteti | Shkup | Manastir | Berovë | Strumicë |
|---|---|---|---|---|
| Temperatura | −1 °C | 0 °C | −4 °C | 3 °C |

# Veprimet me numra të plotë

### SHEMBULLI 3

Zbatoni rregullat për mbledhjen e numrave të plotë:

a) $(+9)+(+18)=+27$
b) $(-7)+(-25)=-32$
c) $(+4)+(-19)=-15$
ç) $(+26)+(-17)=+9$
d) $(+5)+(-5)=0$
dh) $(-7)+0=-7$

Për çdo $a, b \in \mathbb{N}_0$ vlen:
$(+a)+(+b)=+(a+b)$
$(-a)+(-b)=-(a+b)$
$(+a)+(-b)=-(b-a)$, për $a<b$
$(+a)+(-b)=+(a-b)$, për $a\geq b$

## DETYRA 6

Krahasoni shumat:

a) $17+(-24)$ dhe $(-24)+17$ b) $[27+(-14)]+7$ dhe $27+[(-14)+7]$



Për mbledhjen e numrave të plotë vlejnë vetitë (ligjet) e mëposhtme:

a) nëse $a, b \in \mathbb{Z}$, atëherë edhe $a+b \in \mathbb{Z}$ — Ligji i mbyllësisë së mbledhjes
b) $a+b=b+a$, për çdo $a, b \in \mathbb{Z}$ — Ligji komutativ i mbledhjes
c) $(a+b)+c=a+(b+c)$, për çdo $a, b, c \in \mathbb{Z}$ — Ligji asociativ i mbledhjes

## DETYRA 7

Në stacionin e nisjes në një autobus urban u ngjitën 17 udhëtarë.
Në stacionin e parë u ngjitën 10, dhe zbritën 3 udhëtarë, në stacionin e dytë u ngjitën 7, dhe zbritën po ashtu 7 udhëtarë, në stacionin e tretë u ngjitën 4, dhe zbritën 12 udhëtarë.
Sa udhëtarë vazhduan udhëtimin?

Zbritja e numrave të plotë përcaktohet me ndihmën e mbledhjes, gjegjësisht nëse $a, b \in \mathbb{Z}$, atëherë $a - b = a + (-b)$. Kjo do të thotë se për zbritjen mund t'i përdorim rregullat e mbledhjes së numrave të plotë.

### SHEMBULLI 4

a) $12 - 17 = 12 + (-17) = -5$ b) $(-16 - 14) = (-16) + (-14) = -30$

## DETYRA 8

Sipërfaqja e Liqenit të Shkodrës ndodhet në 6 metra mbi nivelin e detit, ndërsa thellësia më e madhe e tij është 44 metra. Në çfarë lartësie mbi detare ndodhet fundi i liqenit?

### SHEMBULLI 5

Ndiqni rregullat për shumëzimin e numrave të plotë:

a) $(+9) \cdot (+7) = +63$
b) $(-14) \cdot (-27) = +378$
c) $(+102) \cdot (-11) = -1122$
ç) $(-6) \cdot (+39) = -234$
d) $(+5) \cdot (-1) = -5$
dh) $(-127) \cdot 0 = 0$

Për çfardo $a, b \in \mathbb{N}_0$ vlen:
$(+a) \cdot (+b) = +(a \cdot b)$
$(-a) \cdot (-b) = +(a \cdot b)$
$(+a) \cdot (-b) = -(a \cdot b)$
$(-a) \cdot (+b) = -(a \cdot b)$

## DETYRA 9

Njehsoni dhe krahasoni:

a) $(+55) \cdot (-42)$ dhe $(-42) \cdot (+55)$ b) $[(-42) \cdot (+5)] \cdot (-8)$ dhe $(-42) \cdot [(+5) \cdot (-8)]$
c) $[(+146) + (+72)] \cdot (-8)$ dhe $[(+146) \cdot (-8)] + [(+72) \cdot (-8)]$



Për shumëzimin e numrave natyrorë vlejnë vetitë (ligjet) e mëposhtme:

| | |
|---|---|
| a) nëse $a, b \in \mathbb{Z}$, atëherë dhe $a \cdot b \in \mathbb{Z}$ | Ligji i mbyllësisë së shumëzimit |
| b) $a \cdot b = b \cdot a$, për çdo $a, b \in \mathbb{Z}$ | Ligji komutativ i shumëzimit |
| c) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, për çdo $a, b, c \in \mathbb{Z}$ | Ligji asociativ i shumëzimit |
| ç) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, dhe $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, për çdo $a, b, c \in \mathbb{Z}$ | Ligji distributiv i shumëzimit në lidhje me mbledhjen |
| d) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, dhe $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$, për çdo $a, b, c \in \mathbb{Z}$ | Ligji distributiv i shumëzimit në lidhje me zbritjen |

## DETYRA 10

Njehsoni:
a) $12 \cdot 125 - [(-15) \cdot (-30)]$ b) $(-152) \cdot (-9) - [108 \cdot 125 + (-910) \cdot (-11)]$

## DETYRA 11

Në një proces ngrirjeje, temperatura e ajrit nga 40°C ulet për 5°C çdo orë. Sa do të jetë temperatura pas 10 orësh?

### SHEMBULLI 6

Ndiqni rregullat për pjesëtimin e numrave të plotë:
a) $(+9) : (+3) = +3$
b) $(-14) : (-2) = +7$
c) $(+121) : (-11) = -11$
ç) $(-36) : (+9) = -4$

Për çdo $a, b \in \mathbb{N}$ vlen:
$(+a) : (+b) = +(a : b)$
$(-a) : (-b) = +(a : b)$
$(+a) : (-b) = -(a : b)$
$(-a) : (+b) = -(a : b)$

### SHEMBULLI 7

Për operacionin e pjesëtimit në bashkësinë e numrave të plotë **nuk vlen ligji i mbyllësisë**, sepse ai përcaktohet përmes operacionit të pjesëtimit të numrave natyrorë, për të cilin nuk vlen ligji i mbyllësisë. Kështu, për shembull, $2 : (-3) = -(2 : 3)$ nuk është numër i plotë, sepse $2 : 3$ nuk është numër natyror.



Nëse $a$ dhe $b$ janë numra të plotë të tillë që $a : c, b : c, (a + b) : c \in \mathbb{Z}$, atëherë vlen $(a + b) : c = a : c + b : c$, për çdo $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Ligji distributiv i djathtë i pjesëtimit

## DETYRA 4

Njehsoni:
a) $5 + \{2 - [1 - (-3 + 8)]\}$ b) $\{20 - 3 \cdot [8 + (-4)]\} : [10 + 2 \cdot (-3)]$
c) $\{[50 - (20 + 15)] - 3\} : (-9 + 6)$ ç) $\{7 + 2 \cdot [(-12) - (-3)]\} : [2 \cdot 15 : (-6)]$

## DETYRA 12

Në një mesditë në Antarktik temperatura e matur ishte 0°C. Në 14 orët e ardhshme temperatura u ul në −42 °C. Sa gradë Celsius mesatarisht ka ndryshuar temperatura brenda një ore?

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Krahasoni numrat $a$ dhe $b$ nëse: a) $a = -15$ dhe $b = -(-5)$, b) $a = 25$ dhe $b = -(-15)$.
2. Cilat shifra mund të vendosen në vend të yllit që të jetë e saktë:
   a) $483 < 4*3$, b) $-2*5 > -225$, c) $-7*89 \leq -7589$?

3. Shkruani bashkësinë e numrave të plotë për të cilët vlen:
   a) $|x| < 2$, b) $|x| = 4$, c) $|x| = 0$, ç) $|x| \leq 3$.

4. Shumën e numrave −52 dhe 120 shumëzojeni me ndryshimin e numrit −52 me numrin 120.

5. Cili numër fitohet nëse vlerën absolute të shumës së numrave −15 dhe 25 e pjesëtojmë me vlerën absolute të ndryshimit të numrit −5 me numrin 5?

6. Në Shkup temperatura ishte -5°C të hënën, dhe më pas ra për 2°C të martën.
   a) Sa ishte temperatura në Shkup të martën?
   b) Të mërkurën temperatura u rrit për 4°C. Sa ishte temperatura të mërkurën?

7. Temperatura më e ulët e matur në Tokë është −70 °C. Në Neptun është për 150 °C më e ulët se në Tokë, në Saturn është për 40 °C më e ulët se në Neptun, në Uran është për 34 °C më e ulët se në Saturn, në Pluton është për 10 °C më e ulët se në Neptun, në Jupiter është për 30 °C më e ulët se në Saturn.
   a) Gjeni temperaturat më të ulëta në Jupiter, Saturn, Uran, Neptun dhe Pluton.
   b) Radhitni temperaturat e planetëve, duke filluar nga më e ulëta.

8. Milani investoi në bursë 70000 denarë para 6 muajsh. Muajin e parë realizoi fitim prej 3200 denarësh, 2 muajt e ardhshëm pat humbje prej nga 2400 denarë, ndërsa 3 muajt e ardhshëm fitim prej nga 2200 denarë. Sa para ka Milani pas gjashtëmujorit të tregtimit në bursë?

9. Një ashensor zbret në një minierë me shpejtësi 6 metra në minutë. Nëse zbritja fillon nga 10 metra mbi nivelin e tokës, sa kohë do të duhet për të arritur në −350 metra?

# 1.8. Numrat racionalë dhe veprimet me numra racionalë

## Numrat racionalë

**AKTIVITET**

a) Pesë miq duhet të ndajnë një mollë në pjesë të barabarta. Çfarë pjese të mollës mori secili prej miqve?
b) Për 4 fletore Eva pagoi 30 denarë. Sa denarë pagoi për 1 fletore?

A mund ta shprehni pjesën e mollës që duhet të marrë secili prej miqve, si dhe çmimin e 1 fletores me numrat e plotë?Me çfarë numrash do ta bëni këtë?

Ne pamë se operacioni i pjesëtimit nuk është gjithmonë i realizueshëm në bashkësinë e numrave të plotë. Si pasojë, ekzistojnë situata të përditshme që nuk mund të shprehen me ndihmën e numrave të plotë, prandaj lind nevoja për zgjerimin e bashkësisë së numrave të plotë me një bashkësi të re numrash të quajtur **bashkësia e numrave racionalë**.



Shënimi $\frac{a}{b}$, ku $a$ dhe $b$ janë numra të plotë, $b \neq 0$, quhet **thyesë**.

Numri a quhet **numërues**, numri $b$ quhet **emërues** dhe „–" quhet **vijë thyesore.**
Për dy thyesa $\frac{a}{b}$ dhe $\frac{c}{d}$ themi se janë **të barabarta** nëse dhe vetëm nëse $a \cdot d = b \cdot c$.

Çdo thyesë $\frac{a}{b}$ e konsideruar si pjesëtim i $a$ me $b$, përfaqëson një numër të ri, të quajtur **numër racional**. Në këtë rast, thyesat e barabarta përfaqësojnë të njëjtin numër racional. Të gjithë numrat racionalë e përbëjnë bashkësinë $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z} \text{ dhe } b \neq 0\}$ të quajtur **bashkësia e numrave racionalë**.
Bashkësia e numrave racionalë është bashkim i bashkësisë së numrave racionalë negativë, zeros dhe numrave racionalë pozitivë:
$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$ ku $\mathbb{Q}^- = \left\{\frac{-a}{b} | a, b \in \mathbb{N}\right\}$ dhe $\mathbb{Q}^+ = \left\{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{N}\right\}$.

## SHEMBULLI 1

Çdo numër i plotë $a$ mund të shkruhet si thyesë.
a) $4 = \frac{4}{1}$ ose $4 = \frac{8}{2}$ b) $-5 = \frac{-5}{1}$ ose $-5 = \frac{-15}{3}$



Çdo numër i plotë $a$ mund të shkruhet si thyesë me emërues 1, pra $a = \frac{a}{1}$.

Nëse numëruesi dhe emëruesi i një thyese shumëzohen me të njëjtin numër, të ndryshëm nga zero, fitohet një thyesë e barabartë me atë të dhënë, pra $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$, për $a, b, c \in \mathbb{Z}$ dhe $c \neq 0$.
Kjo procedurë quhet **zgjerim i thyesës.**

## SHEMBULLI 2

Zgjeroni thyesën $\frac{4}{7}$ me: a) numrin 4 b) numrin 7

a) $\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{16}{28}$ b) $\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 7}{7 \cdot 7} = \frac{28}{49}$

Nëse numëruesi dhe emëruesi i një thyese pjesëtohen me të njëjtin numër, të ndryshëm nga zero, fitohet një thyesë e barabartë me atë të dhënë, pra $\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$, për $a, b, c \in \mathbb{Z}$ dhe $c \neq 0$.
Kjo procedurë quhet **thjeshtim i thyesës.**

## SHEMBULLI 3

A mund të thjeshtohet thyesa: a) $\frac{8}{10}$ b) $\frac{6}{25}$

a) $\frac{8}{10} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 2}{5} = \frac{4}{5}$ Numëruesin dhe emëruesin i zbërthejmë në shumëzues të thjeshtë. Pjesëtuesin e përbashkët 2 e shlyejmë nga numëruesi dhe emëruesi.

b) $\frac{6}{25} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 5}$ PMP (6, 15) = 1. Thyesa është e pathjeshtueshme.

Nëse numëruesi dhe emëruesi i një thyese janë numra relativisht të thjeshtë, pra PMP $(a, b) = 1$, thyesa $\frac{a}{b}$ quhet **e pathjeshtueshme.**

Nga vetia e zgjerimit dhe thjeshtimit të thyesës mund të përfundojmë se dy thyesa janë të barabarta nëse dhe vetëm nëse njëra fitohet nga tjetra me zgjerim ose thjeshtim.

## SHEMBULLI 4

Sillni në emërues të përbashkët thyesat $\frac{3}{4}, \frac{1}{6}$ dhe $\frac{8}{3}$.

$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$ Gjejmë SHVP-në e emëruesve të thyesave: SHVP (4, 6, 3) = 12

$\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{2}{12}$ SHVP-në e pjesëtojmë me emëruesin e secilës thyesë.

$\frac{8}{3} = \frac{8 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{32}{12}$ Me herësat e fituar e zgjerojmë secilën thyesë.

## DETYRA 1

Sillni në emëruesin më të vogël të përbashkët thyesat:

a) $\frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{12}$ b) $\frac{3}{20}, \frac{5}{8}, \frac{15}{16}$ c) $\frac{7}{9}, \frac{5}{12}, \frac{8}{15}, \frac{3}{10}$

Nga dy thyesa $\frac{a}{b}$ dhe $\frac{c}{b}$ me emërues pozitivë të barabartë, më e vogël është ajo që e ka numëruesin më të vogël: $\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$ vetëm nëse $a < c$.

Thyesat me emërues të ndryshëm i krahasojmë duke i sjellë fillimisht në emërues të barabartë, e më pas i krahasojmë si thyesa me emërues të barabartë.

## DETYRA 2

Oqeani Atlantik zë $\frac{3}{10}$ e sipërfaqes së përgjithshme ujore të Tokës, ndërsa Oqeani Paqësor zë $\frac{9}{20}$. Cili prej tyre zë pjesë më të vogël të sipërfaqes ujore të Tokës?

## SHEMBULLI 5

Në drejtëzën numerike janë paraqitur disa numra racionalë (vizatimi 1).




Vizatimi 1

Kur krahasojmë dy numra racionalë $a$ dhe $b$, të paraqitur në drejtëzën numerike, numri $a$ është më i vogël se numri $b$ nëse në drejtëzën numerike $a$ është në të majtë të $b$.

### DETYRA 3

a) Paraqitni në drejtëzën numerike numrat racionalë: $-4\frac{1}{2}, 3, -\frac{5}{2}, 2\frac{1}{4}$ dhe $-\frac{1}{3}$.

b) Me ndihmën e drejtëzës numerike, shkruani numrat në varg rritës duke filluar nga më i vogli.

## Veprimet me numra racionalë

### AKTIVITET

Si do të llogarisni se çfarë pjese të ëmbëlsirës hëngrën së bashku Ilina dhe Iliri nëse:

a) Ilina hëngri $\frac{1}{8}$ e ëmbëlsirës, dhe Iliri $\frac{2}{8}$ e ëmbëlsirës.

b) Ilina hëngri $\frac{2}{7}$ e ëmbëlsirës, dhe Iliri $\frac{1}{6}$ e ëmbëlsirës.

### SHEMBULLI 6

Mblidhni thyesat: a) $\frac{3}{7}$ dhe $\frac{6}{7}$ b) $\frac{13}{8}$ dhe $\frac{4}{5}$

a) $\frac{3}{7}+\frac{6}{7}=\frac{9}{7}=1\frac{2}{7}$ b) $\frac{13}{8}+\frac{4}{5}=\frac{13\cdot 5+8\cdot 4}{8\cdot 5}=\frac{97}{40}=2\frac{17}{40}$

**Dy thyesa me emërues të njëjtë mblidhen** duke marrë shumën e numëruesve për numërues të thyesës-shumë, ndërsa për emërues merret emëruesi i njëjtë:

$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ dhe $c \neq 0$.

**Dy thyesa me emërues të ndryshëm mblidhen**, duke i sjellë fillimisht në emërues të përbashkët, pastaj duke i mbledhur si thyesa me emërues të njëjtë:

$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{ad+bc}{cd}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ dhe $c, d \neq 0$.

### SHEMBULLI 7

Njehsoni: a) $\frac{3}{4}+0$ b) $0+\frac{-7}{8}$ c) $\frac{15}{16}+\frac{-15}{16}$

a) $\frac{3}{4}+0=\frac{3}{4}+\frac{0}{4}=\frac{3+0}{4}=\frac{3}{4}$ b) $0+\frac{-7}{8}=\frac{0}{8}+\frac{-7}{8}=\frac{0-7}{8}=-\frac{7}{8}$

c) $\frac{15}{16}+\frac{-15}{16}=\frac{15+(-15)}{16}=\frac{0}{16}=0$

### DETYRA 4

Kontrolloni saktësinë e barazitë: a) $1\frac{2}{3}+2\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}$ b) $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)$



Operacioni i mbledhjes së numrave racionalë është i mbyllur, komutativ dhe asociativ.

## DETYRA 5

Njehsoni perimetrin e trekëndëshit, nëse gjatësitë e brinjëve të tij janë $3\frac{1}{2}$ cm, $2\frac{2}{3}$ cm dhe $4\frac{5}{6}$ cm.

## AKTIVITET

Për një shfaqje teatrale u shitën bileta për $\frac{5}{6}$ e ulëseve. Për shkak të kohës së keqe, u mbushën vetëm $\frac{3}{4}$ e ulëseve.
Si do të njehsoni se çfarë pjese e ulëseve, për të cilat u shitën bileta, mbetën të pambushura?

## SHEMBULLI 8

Njehsoni ndryshimin: a) $\frac{1}{5}-\frac{3}{5}$ b) $2\frac{3}{4}-7$

a) $\frac{1}{5}-\frac{3}{5}=-\frac{2}{5}$ b) $2\frac{3}{4}-7=\frac{11}{4}-\frac{7}{1}=\frac{11\cdot 1-4\cdot 7}{4\cdot 1}=\frac{-17}{4}=-4\frac{1}{4}$

**Dy thyesa me emërues të barabartë zbriten** kur nga numëruesi i thyesës së zbritshme zbritet numëruesi i thyesës zbritëse dhe ndryshimi i fituar merret për numërues të thyesës ndryshim, ndërsa duke marrë emëruesin e njëjtë për emërues, pra

$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$, $a, b, c\in\mathbb{Z}$ dhe $c\neq 0$.

**Dy thyesa me emërues të ndryshëm zbriten** duke i sjellë fillimisht në emërues të përbashkët, pastaj duke i zbritur si thyesa me emërues të barabartë:

$\frac{a}{c}-\frac{b}{d}=\frac{ad-bc}{cd}$, $a, b, c, d\in\mathbb{Z}$ dhe $c, d\neq 0$.

## DETYRA 6

Anika e lexoi lektyrën për 3 ditë. Ditën e parë lexoi $\frac{3}{5}$ e librit, të dytën për $\frac{3}{10}$ më pak se ditën e parë. Çfarë pjese të lektyrës e lexoi ditën e tretë?

## AKTIVITET

Merita shkoi në supermarket dhe mori me vete $\frac{3}{4}$ e kursimeve të saja. Nga paratë që mori, $\frac{4}{5}$ i shpenzoi për ushqim. Si do të njehsoni se çfarë pjese të kursimeve i shpenzoi për ushqim?

## SHEMBULLI 7

Njehsoni prodhimin: a) $\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}$ b) $\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{4}$.

a) $\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 5}{8\cdot 7}=\frac{15}{56}$ b) $\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{4}=\frac{5\cdot 6}{7\cdot 4}=\frac{30}{28}=\frac{15}{14}=1\frac{1}{14}$

**Prodhimi i dy thyesave** është thyesa numëruesi i së cilës është i barabartë me prodhimin e numëruesve të shumëzuesve, ndërsa emëruesi është prodhim i emëruesve të shumëzuesve:

$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ dhe $c, d \neq 0$.

## SHEMBULLI 8

Njehsoni prodhimin: a) $\frac{3}{8} \cdot 1$ b) $\frac{4}{9} \cdot 0$ c) $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4}$

a) $\frac{3}{8} \cdot 1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3 \cdot 1}{8 \cdot 1} = \frac{3}{8}$

b) $\frac{4}{9} \cdot 0 = \frac{4}{9} \cdot \frac{0}{1} = \frac{4 \cdot 0}{9 \cdot 1} = \frac{0}{9} = 0$

c) $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 4} = \frac{20}{20} = 1$

Thyesat $\frac{4}{5}$ dhe $\frac{5}{4}$ janë **reciproke**.

## DETYRA 7

Kontrolloni saktësinë e barazive:

a) $\frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$

b) $\left(\frac{1}{7} \cdot \frac{2}{9}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{7}\left(\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4}\right)$

c) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}$

ç) $\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$



Operacioni i shumëzimit të numrave racionalë është i mbyllur, komutativ, asociativ dhe distributiv në lidhje me mbledhjen dhe zbritjen.

## DETYRA 8

Sa metra katrorë parket duhet të blejë Osmani për dhomën e tij me përmasa $3\frac{1}{4}$ m dhe $4\frac{2}{3}$ m?

## AKTIVITET

Një shishe nxë $\frac{3}{4}$ l ujë.

Si do të njehsoni sa shishe të tilla mund të mbushen me $8\frac{1}{4}$ l ujë?

## SHEMBULLI 9

Njehsoni herësin: a) $\frac{3}{4} : \frac{7}{9}$ b) $\frac{5}{6} : \frac{25}{36}$.

a) $\frac{3}{4} : \frac{7}{9} = \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{7} = \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 7} = \frac{27}{28}$

b) $\frac{5}{6} : \frac{25}{36} = \frac{5}{6} \cdot \frac{36}{25} = \frac{5 \cdot 36}{6 \cdot 25} = \frac{1 \cdot 6}{1 \cdot 5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$

**Herësi i dy thyesave** është i barabartë me prodhimin e të pjesëtueshmit dhe thyesës reciproke të pjesëtuesit $\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ dhe $b, c, d \neq 0$.

## DETYRA 10

Njehsoni: a) $\left\{3 - \left[4\frac{1}{2} - \frac{1}{2} : \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{4}\right)\right]\right\} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$ b) $3 - \left\{\frac{1}{4} - \left(-4\frac{4}{9}\right)\left[(-2) - \frac{5}{6} : \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{7}\right)\right]\right\}$

Sqaroni renditjen e kryerjes së veprimeve.

### DETYRA 11

Për një kostum, rrobaqepësi harxhon $3\frac{1}{4}$ m pëlhurë. Sa kostume do të qepë nga $22\frac{3}{4}$ m pëlhurë?

### SHEMBULLI 10

Shkruani herësin në formë thyese të dyfishtë: a) $\frac{3}{4} : 5$ b) $4 : \frac{2}{3}$ c) $1\frac{3}{7} : \frac{4}{5}$

a) $\frac{3}{4} : 5 = \frac{\frac{3}{4}}{5}$ b) $4 : \frac{2}{3} = \frac{4}{\frac{2}{3}}$ c) $1\frac{3}{7} : \frac{4}{5} = \frac{1\frac{3}{7}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{10}{7}}{\frac{4}{5}}$

## Paraqitja dhjetore e numrave racionalë

### AKTIVITET

Thyesat $\frac{91}{10}$, $\frac{127}{100}$ dhe $\frac{3009}{1000}$ janë shembuj të thyesave dhjetore.
Shpjegoni procedurën me të cilën ato shkruhen pa emërues:

$\frac{91}{10} = \frac{90+1}{10} = \frac{90}{10} + \frac{1}{10} = 9 + \frac{1}{10} = 9{,}1$

$\frac{127}{100} = \frac{100+27}{100} = \frac{100}{100} + \frac{27}{100} = 1 + \frac{27}{100} = 1{,}27$

$\frac{3009}{1000} = \frac{3000+9}{1000} = \frac{3000}{1000} + \frac{9}{1000} = 3 + \frac{9}{1000} = 3{,}009$

Si quhen shënimet e fituara?



Nëse pranë një numri të plotë nga e djathta shkruhet presje, dhe më pas radhiten një numër i fundëm (ose pafundëm) shifrash, fitohet shënim i cili quhet numër dhjetor (decimal) i fundëm (ose i pafundëm). Shënimet e tilla, me një emër, quhen **numra dhjetorë (ose decimalë)**.

Çdo numër dhjetor përbëhet nga dy pjesë të ndara me presje: **pjesa e plotë** para presjes dhe **pjesa dhjetore** pas presjes. Vendet e shifrave në pjesën dhjetore quhen **vende dhjetore**, dhe shifrat përkatëse quhen **decimale**.
Çdo numër racional (thyesë) mund të shkruhet si **numër dhjetor**.

### SHEMBULLI 11

Shkruani si numër dhjetor thyesën: a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{9}{20}$

a) $\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{2}{10} = 0{,}2$ b) $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10} = 0{,}5$ c) $\frac{9}{20} = \frac{9 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{45}{100} = 0{,}45$

Thyesa mund të shkruhet si numër dhjetor duke pjesëtuar numëruesin me emëruesin.

### SHEMBULLI 12

Duke pjesëtuar shkruani në numër dhjetor thyesën: a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{7}{22}$

a) $\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0{,}25$

b) $\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0{,}333...$

c) $\frac{7}{22} = 7 : 22 = 0{,}31818...$

Kur pjesëtimi përfundon, fitohet **numër dhjetor i fundëm.**

Kur pjesëtimi nuk përfundon, fitohet **numër dhjetor periodik i pafundmë.**



Një numër dhjetor i pafundmë që ka një shifër ose një varg të fundmë shifrash që përsëriten në të njëjtën renditje menjëherë pas presjes dhjetore, **quhet numër dhjetor periodik i pastër.**

Një numër dhjetor i pafundmë në të cilin pas disa decimalesh jozero, një shifër ose një varg i fundmë shifrash përsëriten në të njëjtën renditje, quhet **numër dhjetor periodik i përzier.** Vargu i shifrave që përsëritet quhet **periodë e numrit dhjetor.**

### SHEMBULLI 13

a) Numri 2, 6666... është numër dhjetor periodik i pastër dhe shkruhet si 2, (6).

b) Numri 4, 12323... është numër dhjetor periodik i përzier dhe shkruhet si 4, 1(23).

Çdo numër dhjetor i fundëm ose periodik mund të shkruhet si numër racional (thyesë).

### SHEMBULLI 14

a) Numri 0, (18) mund të shkruhet si thyesë në mënyrën e mëposhtme:

$$0,(18) = x$$
$$0,(18) \cdot 10^2 = x \cdot 10^2$$
$$18,(18) = x \cdot 10^2$$
$$18 + 0,(18) = x \cdot 10^2$$
$$18 + x = x \cdot 10^2$$
$$18 = x \cdot 10^2 - x$$
$$18 = x(10^2 - 1)$$
$$x = \frac{18}{10^2 - 1} = \frac{18}{100 - 1} = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}$$

b) Numri 0,24(36) mund të shkruhet si thyesë në mënyrën e mëposhtme:

$$0,24(36) = x$$
$$0,24(36) \cdot 10^2 = x \cdot 10^2$$
$$24,(36) = x \cdot 10^2$$
$$24 + 0,(36) = x \cdot 10^2$$
$$24 + \frac{36}{10^2 - 1} = x \cdot 10^2$$
$$24(10^2 - 1) + 36 = x \cdot 10^2(10^2 - 1)$$
$$x = \frac{2412}{(10^2 - 1) \cdot 100} = \frac{2412}{9900} = \frac{67}{275}$$

### SHEMBULLI 15

Krahasoni numrat: a) 5,63 dhe 3,63 b) 3,8764 dhe 3,8774 c) −5,3712 dhe −5,3743

a) Kur të dy numrat dhjetorë janë pozitivë, atëherë fillimisht krahasohen pjesët e plota.
Nëse pjesët e plota nuk janë të njëjta, atëherë më i madh është numri me pjesën e plotë më të madhe.
$5{,}63 > 3{,}63$, sepse $5 > 3$.

b) Nëse pjesët e plota janë të njëjta, atëherë krahasohen decimalet, fillimisht të dhjetat, pastaj të qindtat, etj. $3{,}8764 < 3{,}8774$, sepse në decimalen e tretë $6 < 7$.

c) Nëse krahasojmë dy numra dhjetorë negativë, atëherë më i madh është numri me vlerë absolute më të vogël. $-5{,}3712 > -5{,}3743$, sepse $|-5{,}3712| < |-5{,}3743|$.

## Veprimet me numra dhjetorë

### AKTIVITET

Kryeni veprimet e shënuara: a) $238 + 56$ b) $769 - 79$ c) $56 \cdot 125$ ç) $873 : 32$

### SHEMBULLI 16

Njehsoni shumën dhe ndryshimin e numrave dhjetorë: a) $2{,}35 + 3{,}9$ b) $17{,}2 - 11{,}36$

a)
$$\begin{array}{r} 2{,}35 \\ +\ 3{,}9 \\ \hline 6{,}25 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 17{,}2 \\ -\ 11{,}36 \\ \hline 5{,}84 \end{array}$$

Mbledhja dhe zbritja fillojnë nga shifra më në të djathtë.
Presja dhjetore duhet të jetë në të njëjtën vertikale.

### DETYRA 12

Njehsoni: a) $23{,}7 - 35 + 0{,}353$ b) $3{,}235 - 6{,}55 - 4{,}6783$

### SHEMBULLI 17

Njehsoni prodhimin dhe herësin e numrave dhjetorë: a) $2{,}7 \cdot 3{,}47$ b) $6{,}342 : 0{,}25$

a)
$$\begin{array}{r} 27 \cdot 347 \\ \hline 189 \\ 108 \\ +\ 81 \\ \hline 9369 \end{array}$$

$2{,}7 \cdot 3{,}47 = 9{,}369$

Numrat dhjetorë shumëzohen si numrat natyrorë.

Në prodhim, veçohen nga e djathta në të majtë aq vende dhjetore sa ka vende dhjetore në të dy shumëzuesit së bashku.

b) $6{,}342 : 0{,}25 = 634{,}2 : 25 = 25{,}368$

$$\begin{array}{r} 50 \\ \hline 134 \\ 125 \\ \hline 92 \\ 75 \\ \hline 170 \\ 150 \\ \hline 200 \\ 200 \\ \hline 0 \end{array}$$

Para se të fillojë pjesëtimi i numrave dhjetorë, të pjesëtueshmin dhe pjesëtuesin i shumëzojmë me ndonjë njësi dhjetore në mënyrë që pjesëtuesi të bëhet numër i plotë.

Më pas pjesëtimi kryhet si pjesëtimi me numër natyror.

## DETYRA 13

Njehsoni: a) $9{,}758 : 3{,}4 - 2{,}08 : 4$ b) $(5{,}6 - 1{,}8 : 3) \cdot 0{,}08$

## DETYRA 14

Syprina e një drejtkëndëshi është 4,88 metra katrorë, dhe gjatësia e njërës brinjë është 1, 6 metra. Sa është:

a) gjatësia e brinjës tjetër b) perimetri i drejtkëndëshit?

## DETYRA PËR USHTRIME

**1.** Sillini në emërues të përbashkët thyesat: a) $\frac{5}{12}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}$ dhe $\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{6}, 1\frac{1}{6}, 3\frac{1}{3}$ dhe $\frac{2}{9}$

**2.** Radhitni thyesat, duke filluar nga më e vogla:

a) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{7}{12}$ dhe $\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{3}{4}, \frac{13}{12}$ dhe $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{3}, 1\frac{1}{2}, 3\frac{5}{6}$ dhe $-1\frac{7}{12}$.

Pastaj paraqitni ato në drejtëzën numerike.

**3.** Lina vrapoi $\frac{3}{4}$ e pistës së maratonës, Admiri $\frac{5}{7}$ e pistës, dhe Simoni $\frac{8}{9}$ e pistës. Cili nga ata vrapoi pjesën më të madhe të pistës, dhe cili pjesën më të vogël?

**4.** Njehsoni: a) $\frac{13}{4} - 2\frac{5}{6} + 2\frac{1}{9} - 1$ b) $\left(\frac{3}{4} - 2\frac{1}{7}\right) \cdot \left(3\frac{1}{4} - 1\right)$ c) $\left(3\frac{1}{6} - 2\frac{3}{4}\right) : \frac{7}{12}$

**5.** Njehsoni: a) $\left(\frac{5}{6} + \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{7}{8} - \frac{1}{12}\right)$ b) $\dfrac{\frac{5}{6} + \frac{3}{4}}{\frac{7}{8} - \frac{1}{12}}$ c) $\dfrac{\frac{5}{21} - \frac{17}{21} : \frac{34}{7} - \frac{1}{2}}{\frac{8}{7} - \frac{7}{2} + \frac{8}{21} \cdot \frac{9}{4}}$

**6.** Një pishinë mbushet me një tub për 8 orë, ndërsa me një tub tjetër për 12 orë. Çfarë pjese e pishinës do të mbushet me të dy tubat për 2 orë?

**7.** Shkruani si numër dhjetor thyesën: a) $\frac{13}{8}$ b) $\frac{9}{5}$ c) $\frac{11}{25}$ ç) $\frac{3}{7}$

**8.** Shkruani në thyesë të pathjeshtueshme numrin: a) 0,34 b) 0,02 c) 4,125 ç) 1,25

**9.** Shkruani në thyesë numrin: a) 0,(7) b) 3,(51) c) 1,3(4) ç) 5,24(3)

**10.** Njehsoni: a) $14{,}16 \cdot 3{,}7 - 12{,}24 : 3{,}3 + 5{,}8$ b) $4{,}2 : 3{,}5 \cdot 2{,}6 - (5{,}4 : 0{,}02) : 0{,}6$

**11.** Distanca nga Toka në Mars është afërsisht 225, 3 milionë kilometra, ndërsa deri në Afërditë 108.2 milionë kilometra.

a) Cili planet është më larg nga Toka?

b) Sa është ndryshimi i distancës nga Toka në Mars me distancën nga Toka në Afërditë?

# 1.9. Numrat realë dhe intervalet në drejtëzën reale

## Numrat realë

**AKTIVITET**

a) Shkruani në formë thyese numrin dhjetor −0,75.

b) Shkruani në numra dhjetorë thyesat $\frac{3}{4}$ dhe $\frac{11}{45}$.

Pamë se çdo numër i fundmë dhe çdo numër periodik i pafundmë mund të shkruhet si thyesë, pra si numër racional.

**SHEMBULLI 1**

Njehsoni gjatësinë e hipotenuzës së një trekëndëshi kënddrejtë barakrahës me katete $a = 1$ cm.

Gjatësia e hipotenuzës $c = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}$ cm. Zbatojmë teoremën e Pitagorës.

Në shembullin e mësipërm e hasëm numrin $\sqrt{2}$. Nëse e llogarisim vlerën e tij me ndihmën e një kalkulatori, fitojmë $\sqrt{2} = 1{,}4142...$ Sikur $\sqrt{2}$ të ishte numër racional, pra $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, ku $PMP(a, b) = 1$, atëherë $a^2 = 2b^2$, andaj $a$ është numër çift, $a = 2a_1$. Atëherë $4a_1^2 = 2b^2$, $2a_1^2 = b^2$, andaj edhe $b$ duhet të jetë numër çift. Kjo është në kundërshtim me kushtin që $a$ dhe $b$ janë numra relativisht të thjeshtë, prandaj përfundojmë që $\sqrt{2}$ nuk është numër racional.

Numrat dhjetorë të pafundmë joperiodikë quhen **numra irracionalë**. Ata e përbëjnë **bashkësinë e numrave irracionalë** e cila shënohet me I.

**SHEMBULLI 2**

a) Numrat $\sqrt{3}$ dhe $-\sqrt{5}$ janë shembuj të numrave irracionalë,

b) Numrat irracionalë nuk shfaqen vetëm me rrënjëzim. Numrat $\frac{1}{\pi}$, $\pi$, $\pi^2$, $\pi^3$, 1,323323332..., 2,070070007... janë gjithashtu numra irracionalë.



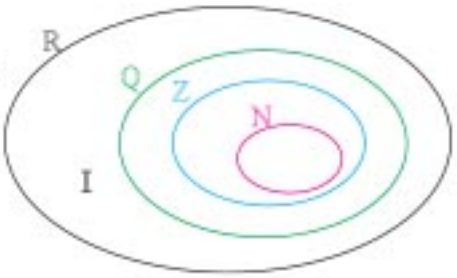
Bashkësia e numrave racionalë dhe bashkësia e numrave irracionalë përbëjnë bashkësinë e **numrave realë**

$R = Q \cup I$.

## DETYRA 1

Në vizatimin 1 me diagramin e Venit janë paraqitur bashkësitë: N, Z, Q, I dhe R. A është i saktë pohimi:

a) $N \subset Z$ b) $Z \subset Q$ c) $Q \cap I = \emptyset$
ç) $Q \cup I = R$ d) $Q \cup Z = R$ dh) $N \subset Q$
e) $Z \subset Q$ ë) $N \subset R$ f) $Z \subset R$
g) $Q \subset R$ gj) $R \setminus Q = Z$ h) $I \subset R$



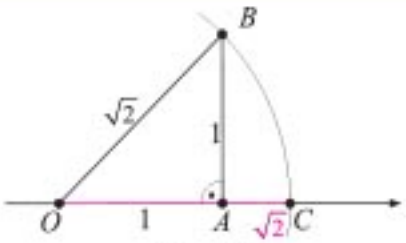
Vizatimi 1

Çdo pike në drejtëzën numerike mund t'i shoqërohet saktësisht një numër real dhe anasjelltas, çdo numri real mund t'i shoqërohet vetëm një pikë në drejtëzën numerike. Me fjalë të tjera, ekziston një korrespondencë bijektive ndërmjet pikave të drejtëzës numerike dhe bashkësisë së numrave realë. Prandaj, drejtëzën numerike e quajmë **drejtëza reale**.

## SHEMBULLI 3

Përcaktoni në drejtëzën reale pikën që i përgjigjet numrit $\sqrt{2}$.

Ndërtojmë një trekëndësh kënddrejtë barakrahës $OAB$ me katete $\overline{OA} = \overline{AB} = 1$. Atëherë për hipotenuzën e tij vlen $\overline{OB} = \sqrt{2}$ (vizatimi 1). Nëse këtë gjatësi e bartim në drejtëzën numerike, fitojmë pikën $C$ që i përgjigjet numrit $\sqrt{2}$.



Vizatimi 2

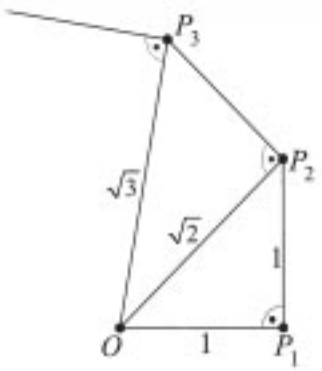
## AKTIVITET

Merrni një fletë të gjerë letre dhe ndërtoni "**spiralen e rrënjëve katrore**" në mënyrën në vijim:

- ✓ Shënoni pikën $O$ dhe vizatoni segmentin $OP_1$ me gjatësi njësi. Vizatoni segmentin $P_1P_2$ me gjatësi njësi i cili është normal në segmentin $OP_1$.
- ✓ Vizatoni segmentin $P_2P_3$ me gjatësi njësi i cili është normal në segmentin $OP_2$.
- ✓ Vizatoni segmentin $P_3P_4$ me gjatësi njësi i cili është normal në segmentin $OP_3$.

Duke vazhduar në këtë mënyrë fitojmë segmente me gjatësi: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}$.... etj. (vizatimi 3).

Bartni në drejtëzën numerike gjatësitë $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ dhe $\sqrt{4}$.



Vizatimi 3

## DETYRA 2

Paraqitni në drejtëzën reale numrat $\sqrt{5}$ dhe $-\sqrt{5}$.

## SHEMBULLI 4

Krahasoni numrat: a) $\sqrt{2}$ dhe $\frac{7}{5}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ dhe $\sqrt{2}$

a) $\frac{7}{5} = 1{,}4$ dhe $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ b) $\frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}118$ dhe $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$

$\frac{7}{5} < \sqrt{2}$ $\frac{\sqrt{5}}{2} < \sqrt{2}$

Në bashkësinë e numrave realë përcaktohen veprimet e mbledhjes dhe shumëzimit në pajtueshmëri me veprimet e mbledhjes dhe shumëzimit në bashkësinë e numrave racionalë dhe kanë të njëjtat veti si në bashkësinë e numrave racionalë.

### SHEMBULLI 5

Kryeni veprimet e shënuara: a) $(2\sqrt{2}+5\sqrt{3})+(\sqrt{2}-3\sqrt{3})$ b) $6\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}$

a) $(2\sqrt{2}+5\sqrt{3})+(\sqrt{2}-3\sqrt{3}) = (2\sqrt{2}+\sqrt{2})+(5\sqrt{3}-3\sqrt{3})$

$= (2+1)\sqrt{2}+(5-3)\sqrt{3} = 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

b) $6\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5} = 6\cdot 2\cdot \sqrt{5}\cdot\sqrt{5} = 12\cdot 5 = 60$

**Vlera absolute e një numri** real përkufizohet në të njëjtën mënyrë si vlera absolute e një numri të plotë, pra për çdo numër real $a$:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Gjeometrikisht, vlera absolute e numrit real $a$ është e barabartë me largesën e numrit $a$ nga numri 0. Largesa ndërmjet dy pikave në drejtëzën numerike është gjithmonë një numër jonegativ, nga ku rrjedh se vlera absolute e numrit $a$ është numër jonegativ.

### SHEMBULLI 6

Njehsoni: a) $|-\sqrt{5}|$ b) $|\pi|$ c) $\left|-\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}\right|$ ç) $\left|\frac{\sqrt{11}}{-\pi\sqrt{3}}\right|$

a) $|-\sqrt{5}| = \sqrt{5}$ b) $|\pi| = \pi$

c) $\left|-\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}\right| = \frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$ ç) $\left|\frac{\sqrt{11}}{-\pi\sqrt{3}}\right| = \frac{\sqrt{11}}{\pi\sqrt{3}}$

### DETYRA 3

Le të jetë $a = -1$ dhe $b = 1{,}5$. Verifikoni nëse është e saktë:

a) $a \leq |a|$ b) $|a-b| = |b-a|$

c) $|a+b| \leq |a|+|b|$ ç) $|a-b| \geq |a|-|b|$

d) $|a\cdot b| = |a|\cdot|b|$ dh) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

## Njehsimet e përafërta me numra realë

Numrat irracionalë janë numra dhjetorë të pafundëm joperiodikë, të cilët nuk jemi në gjendje t'i shkruajmë saktësisht. Prandaj, më së shpeshti ne i zëvendësojmë me numra racionalë të përafërt, me **pakësim** ose me **tepricë**.

### SHEMBULLI 7

Gjeni vlerën e $\sqrt{2}$ me tri decimale.

| Vlerësojmë: | Rrënjëzojmë: | Zëvendësojmë me numër racional të përafërt: |
|---|---|---|
| $1^2 < 2 < 2^2$ | $1 < \sqrt{2} < 2$ | $\sqrt{2} \approx 1$ deri në një njësi me pakësim, dhe<br>$\sqrt{2} \approx 2$ deri në një njësi me tepricë; |
| $1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$ | $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ | $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ deri në një decimale me pakësim, dhe<br>$\sqrt{2} \approx 1{,}5$ deri në një decimale me tepricë; |
| $1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$ | $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ | $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ deri në dy decimale me pakësim, dhe<br>$\sqrt{2} \approx 1{,}42$ deri në dy decimale me tepricë. |
| $1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2$ | $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ | $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ deri në tri decimale me pakësim, dhe<br>$\sqrt{2} \approx 1{,}415$ deri në tri decimale me tepricë. |

Procedura e përshkruar për gjetjen e vlerës së përafërt të një numri irracional quhet "**vlerëso dhe qëlloja**".

### DETYRA 4

Gjeni vlerën e $\sqrt{11}$ me dy decimale, dhe pastaj kontrolloni vlerësimin tuaj me një kalkulator.

### SHEMBULLI 8

Shprehjet numerike $2+\sqrt{3}$, $5-\sqrt{3}$, $3\cdot\sqrt{2}$ dhe $\frac{5}{\sqrt{3}}$ janë shembuj të shprehjeve irracionale, sepse përfaqësojnë numra irracionalë.
Vlerat e përafërta të shprehjeve irracionale i fitojmë kur numrat irracionalë i zëvendësojmë me vlerat e tyre të përafërta racionale.

### SHEMBULLI 9

Njehsoni: a) $\frac{2}{9}+\sqrt{3}$ me dy decimale  b) $\sqrt{345}-\sqrt{344}$ me tri decimale

a) Rrumbullakojmë:
$\frac{2}{9} \approx 0{,}22$ dhe $\sqrt{3} \approx 1{,}73$
Njehsojmë: $\frac{2}{9}+\sqrt{3} \approx 0{,}22+1{,}73 \approx 1{,}95$

b) $\sqrt{345} \approx 18{,}574$  $\sqrt{344} \approx 18{,}547$
$\sqrt{345}-\sqrt{344} = 18{,}574-18{,}547 = 0{,}027$

Numrat në shprehjen e dhënë i rrumbullakojmë deri në numrin e kërkuar të decimaleve.
Nëse shifra e parë e fshirë është 0, 1, 2, 3 ose 4, atëherë shifra e fundit që rrumbullakohet mbetet e pandryshuar.
Nëse shifra e parë e fshirë është 5, 6, 7, 8 ose 9, atëherë shifra e fundit që rrumbullakohet rritet për 1.

Nëse duhet të rrumbullakojmë numër më të madhë të mbledhësve për shembull me dy decimale, atëherë është e pëlqyeshme që secili nga mbledhësit të përfaqësohet të paktën me tre decimale, të kryhet mbledhja ose zbritja dhe rezultati të rrumbullakohet në dy decimale. Pse?

## Intervalet në drejtëzën reale

Le të jenë $a, b \in \mathbb{R}$ dhe $a < b$.
Bashkësinë e numrave realë $x$ të tillë që $a < x < b$ e shënojmë me $(a, b)$ dhe e quajmë **interval të hapur**:
$(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ dhe } a < x < b\}$



Vizatimi 2

Në drejtëzën reale, intervali i hapur është bashkësia e pikave që ndodhen midis pikave $x = a$ dhe $x = b$, ku pikat $x = a$ dhe $x = b$ nuk i përkasin intervalit (vizatimi 2).

Bashkësinë e të gjithë numrave realë $x$ të tillë që $a \leq x < b$ e shënojmë me $[a, b)$ dhe e quajmë **interval gjysmë të hapur nga e djathta**: $[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ dhe } a \leq x < b\}$.



Vizatimi 3

Në drejtëzën reale, intervali gjysmë i hapur nga e djathta është bashkësia e pikave që ndodhen ndërmjet pikave $x = a$ dhe $x = b$, ku pika $x = a$ i përket intervalit, ndërsa pika $x = b$ nuk i përket intervalit (vizatimi 3).

Bashkësinë e të gjithë numrave realë $x$ të tillë që $a < x \leq b$ e shënojmë me $(a, b]$ dhe e quajmë **interval gjysmë të hapur nga e majta**: $(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ dhe } a < x \leq b\}$.



Vizatimi 4

Në drejtëzën reale, intervali gjysmë i hapur nga e majta është bashkësia e pikave që ndodhen ndërmjet pikave $x = a$ dhe $x = b$, ku pika $x = a$ nuk i përket intervalit, ndërsa pika $x = b$ i përket intervalit (vizatimi 4).

Bashkësinë e të gjithë numrave realë $x$ të tillë që $a \leq x \leq b$ e shënojmë me [a, b] dhe e quajmë **interval të mbyllur**: $[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ dhe } a \leq x \leq b\}$.



Vizatimi 5

Në drejtëzën reale intervali i mbyllur është bashkësia e pikave që ndodhen midis pikave $x = a$ dhe $x = b$, ku të dyja pikat $x = a$ dhe $x = b$ i përkasin intervalit (vizatimi 5).

Bashkësitë $[a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ dhe } x \geq a\}$ dhe $(-\infty, a] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ dhe } x \leq a\}$ i quajmë **intervale të pakufizuara të mbyllura** (vizatimi 6 dhe vizatimi 7).



Vizatimi 6



Vizatimi 7

Bashkësitë $(a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ dhe } x > a\}$ dhe $(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ dhe } x < a\}$ i quajmë **intervale të pakufizuara të hapura** (vizatimi 8 dhe vizatimi 9).



Vizatimi 8

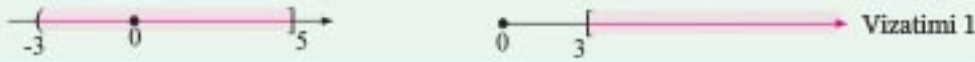


Vizatimi 9

### SHEMBULLI 10

Shkruani në mënyrë përshkruese dhe paraqitni në drejtëzën reale intervalin (vizatimi 10):
a) $(-3, 5]$ b) $[3, +\infty)$

a) $(-3, 5] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ dhe } -3 < x \leq 5\}$ b) $[3, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ dhe } x \geq 3\}$



Vizatimi 10

## DETYRA 5

Shkruani në mënyrë përshkruese dhe paraqitni në drejtëzën reale intervalin:
a) $(-2, 4)$ b) $[-3, -1)$ c) $(5, 8]$ ç) $[-5, 4]$
d) $[-2, +\infty)$ dh) $(-\infty, 1]$ e) $(4, +\infty)$ ë) $(-\infty, 3)$

### SHEMBULLI 11

Gjeni: a) $(-1, 4] \cup [2, 7]$ b) $[-7, 5] \cap [-8, 2)$

a) $(-1, 4] \cup [2, 7] = (-1, 7]$ b) $[-7, 5] \cap [-8, 2) = [-7, 2)$

## DETYRA 6

Një radar mat shpejtësinë në intervalin [50, 120] kilometra në orë. A mund të matet shpejtësia e një shoferi që vozit me shpejtësi 120 kilometra në orë? Po me 49.9 kilometra në orë?

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Cilët nga pohimet e mëposhtëm janë të saktë:
   a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ b) $\mathbb{Z} \cap \mathrm{I} = \emptyset$ c) $\mathrm{Q} \subset \mathrm{I}$ ç) $\mathrm{Q} \subset \mathbb{R}$
2. 2. Krahasoni numrat realë:
   a) $-13{,}0010\ldots$ dhe $-13{,}0001$ b) $\sqrt{3}$ dhe $\frac{7}{5}$ c) $\frac{36}{25}$ dhe $\sqrt{2}$
3. Le të jenë $a = -3{,}7$ dhe $b = -11{,}5$. Njehsoni vlerën e:
   a) $|a + b|$ b) $|a - b|$ c) $|a \cdot b|$ ç) $\frac{|a|}{|b|}$
4. 4. Njehsoni me tri decimale:
   a) $\sqrt{49} - \sqrt{3} + \pi$ b) $5 : \sqrt{5} + 2\sqrt{7}$ c) $3\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} - 1\frac{3}{4} \cdot \sqrt{5}$ ç) $3\pi + 4 \cdot \sqrt{6} - \sqrt{17}$
5. Një qelizë ka formën e një topi me rreze $r = 2.1$ mikrometra.
   Vëllimi i topit njehsohet me formulën $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.
   Njehsoni përafërsisht vëllimin e qelizës, nëse $\pi \approx 3{,}14$.
6. Cilat nga pohimet e mëposhtme janë të sakta:
   a) $2 \in (2, 5)$ b) $3 \in (-7, 3]$ c) $\sqrt{2} \in [1, 3]$ ç) $7 \in (-\infty, -7]$

**7.** Shkruani në formë të intervalit bashkësinë:

a) $A=\{x \mid x\in\mathbb{R} \text{ dhe } -2\le x<1\}$ b) $B=\{x \mid x\in\mathbb{R} \text{ dhe } -2,4<x<6,7\}$

c) $C=\{x \mid x\in\mathbb{R} \text{ dhe } -\infty<x\le\sqrt{5}\}$ ç) $D=\{x \mid x\in\mathbb{R} \text{ dhe } -\sqrt{3}<x<\infty\}$

**8.** Paraqitni në boshtin numerik dhe shkruani në mënyrë përshkruese intervalin:

a) $[-3, 5]$ b) $(1, 3)$ c) $[-6, 7)$ ç) $(-\infty, 1)$ d) $[3, +\infty)$

**9.** Në boshtin numerik gjeni unionin e intervaleve:

a) $(-3, 4]$ dhe $[2, 7)$ b) $(-1, 1)$ dhe $[0, 3]$ c) $(-\infty, 3)$ dhe $(0, 5)$ ç) $[-4, 1)$ dhe $[-5, 3)$

**10.** Gjeni:

a) $[0, 3]\cap(1, 8)$ b) $(-5, 2]\cup(2, 4)$ c) $((-\infty, 3)\cap[0, +\infty))\cup(-5, 5]$

**11.** Vlera neutrale e pH është 7. Tretësirat acidike kanë pH vlerën më të vogël se 7, ndërsa tretësirat bazike kanë pH vlerën më të madhe se 7.

Shkruani intervalet për: a) tretësirat acidike b) tretësirat bazike.

**HULUMTIM**

Përveç procedurës për gjetjen e vlerës së përafërt të një numri irracional "vlerëso dhe qëlloja", ekzistojnë edhe procedura të tjera që nuk i kemi përmendur. Njëra prej tyre është procedura babilonase për gjetjen e vlerës së përafërt të një numri irracional.

Hulumtoni dhe studioni procedurën babilonase dhe zbuloni disa nga përparësitë dhe mangësitë e saj në krahasim me procedurën "vlerëso dhe qëlloja".

# 1.10. Raportet dhe përpjesëtimet

## Raportet dhe vetitë e raporteve

Në matematikë dhe në jetën e përditshme hasim probleme në të cilat duhet të llogarisim:

a) Sa herë një madhësi është më e madhe se një tjetër?

b) Çfarë pjese të një madhësie përfaqëson madhësia tjetër?

**AKTIVITET**

a) Si do të llogarisnit sa herë numri 18 është më i madh se numri 6?

b) Një enë mbushet me 12 litra ujë. Si do të llogarisnit çfarë pjese të enës nxënë 6 litra ujë?



Herësi $a : b$ (ose $\frac{a}{b}$), $b \neq 0$ i numrave matës të dy madhësive të së njëjtës natyrë quhet **raport** i atyre madhësive.

Numri $a$ a quhet **anëtari i parë**, ndërsa numri $b$ quhet **anëtari i dytë i raportit.**

Vlera e herësit $a : b$ quhet **vlera e raportit** ose **koeficienti i përpjesëtimit** dhe zakonisht shënohet me $k$.

Raporti $a : b$ përveç mënyrës së njohur ($a$ pjesëtuar me $b$) lexohet edhe si "$a$ ndaj $b$".

### SHEMBULLI 1

Një mur është lyer me përzierje të 3 pjese ngjyre dhe 2 pjese rëre. Shkruani përzierjen si raport të:
a) ngjyrës ndaj rërës b) rërës ndaj ngjyrës.

a) Raporti i ngjyrës ndaj rërës është $3 : 2$. b) Raporti i rërës ndaj ngjyrës është $2 : 3$.

### DETYRA 1

Një shirit me gjatësi 20 cm ndahet në raport $3 : 2$. Sa janë gjatësitë e pjesëve të fituara?

### SHEMBULLI 2

Raportet $2 : 3$ dhe $3 : 2$ janë shembuj të **raporteve reciproke të anasjellta**, sepse ato ndryshojnë vetëm në vendet e anëtarëve të tyre: Prodhimi i tyre është i barabartë me 1, gjegjësisht
$(2 : 3) \cdot (3 : 2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1.$

### SHEMBULLI 3

Për dy raporte themi se janë të barabartë nëse kanë vlerë të barabartë. Kështu, për shembull, raportet:

$\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ dhe $\frac{5}{6} : \frac{5}{9}$ janë të barabarta, sepse $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} = \frac{3}{2}$ dhe $\frac{5}{6} : \frac{5}{9} = \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{5} = \frac{3}{2}$, ndërsa raportet $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$ dhe $\frac{4}{5} : \frac{3}{6}$ nuk janë të barabarta, sepse $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$ dhe $\frac{4}{5} : \frac{3}{6} = \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{3} = \frac{8}{5}$.

### SHEMBULLI 4

a) Raporti $3 : 4$ përbëhet nga dy anëtarë dhe e quajmë **raport të thjeshtë.**
b) Nga raportet $5 : 6$ dhe $6 : 8$ mund të formojmë **raportin e zgjeruar** $5 : 6 : 8$, i cili përbëhet nga më shumë se dy anëtarë.
c) Me raportin e zgjatur $4 : 9 : 6$ përcaktohen tre raporte të thjeshta: $4 : 9$, $9 : 6$ dhe $4 : 6$.

### SHEMBULLI 5

Raportet $2 : 3$ dhe $4 : 6$ janë të barabartë. Ndiqni njehsimet:

$2 : 3 = 4 : 6 = (2 \cdot 2) : (2 \cdot 3)$ dhe $4 : 6 = 2 : 3 = (4 : 2) : (6 : 2)$.

Çfarë përfunduat në lidhje me vlerën e raportit, kur anëtarët e tij shumëzohen ose pjesëtohen me një numër të njëjtë, të ndryshëm nga zero?



**Vetia themelore e raporteve.** Vlera e raportit nuk ndryshon nëse anëtarët e tij shumëzohen ose pjesëtohen me një numër të njëjtë, të ndryshëm nga zero.

### SHEMBULLI 6

Shkruani raportin 5 : 13 ashtu që anëtari i dytë i raportit të fituar të jetë numri 52.

Nëse anëtarin e dytë, 13, e zëvendësojmë me numrin 52, kjo do të thotë se anëtarin 13 e kemi shumëzuar me numrin 4. Në mënyrë që të ngelet vlera e raportit e barabartë, duhet që edhe numrin 5 t'a shumëzojmë me numrin 4. Kemi $5 : 13 = (5 \cdot 4) : (13 \cdot 4) = 20 : 52$.

## DETYRA 2

Shkruani raportin ashtu që anëtari i parë i raportit të fituar të jetë 1.

a) 3 : 6 b) 20 : 400 c) 70 : 28 ç) 45 : 0,9 d) 0,25 : 0,07

### SHEMBULLI 7

Me ndihmën e vetisë themelore të raporteve, thjeshtoni raportin $2\frac{1}{4} : 1\frac{2}{7}$.

$2\frac{1}{4} : 1\frac{2}{7} = \frac{9}{4} : \frac{9}{7} = \frac{1}{4} : \frac{1}{7} = \frac{7}{28} : \frac{4}{28} = 7 : 4.$

### SHEMBULLI 8

Një kilogram çaj i përzier përbëhet nga 350 gramë çaj indian, 500 gramë çaj indonezian, ndërsa pjesa e ngelur është çaj kinez.

a) Sa është raporti i çajit kinez ndaj çajit indian?

b) Cakto raportin çaji indian ndaj çajit indonezian ndaj çajit kinez.

c) Çfarë pjese përbën çaji indian në këtë përzierje?

a) Sasia e çajit kinez është: $1000 - (350 + 500) = 150$ gramë.
Raporti i çajit kinez ndaj çajit indian është $150 : 350 = 3 : 7$.

b) Raporti i çajit indian ndaj çajit indonezian ndaj çajit kinez është $350 : 500 : 150 = 7 : 10 : 3$.

c) Çaji është ndarë në 20 pjesë $(7 + 10 + 3)$. Shtatë pjesë janë çaj indian, 10 janë çaj indonezian dhe 3 janë çaj kinez. Pra, pjesa e çajit indian është $\frac{7}{20}$.

### SHEMBULLI 9

Sa është distanca ndërmjet qyteteve Shkup dhe Kërçovë, nëse distanca në hartën gjeografike me raport 1 : 200 000 është 55 cm?

Nëse në hartën gjeografike me raport 1 : 200 000 distanca e matur është 55 cm, atëherë 1 cm distancë në hartë i përgjigjet 200 000 cm = 2 km distancë reale, prandaj 55 cm do t'i përgjigjen $55 \cdot 2 = 110$ km distancë reale.

### DETYRA 3

Dyshemeja e një klase është në formë drejtkëndëshi me brinjë 9 metra dhe 6 metra. Sa do të jenë gjatësia dhe gjerësia e dyshemesë në një vizatim me raport 1 : 300?

## Përpjesëtimet dhe vetitë e përpjesëtimeve

### AKTIVITET

A janë të barabarta raportet 3 : 2 dhe 18 : 6? Arsyetoni përgjigjen tuaj.

Nëse raportet $a : b$ dhe $c : d$ janë të barabarta, atëherë shkruajmë $a : b = c : d$ dhe themi se $a$ ndaj $b$ është sikur $c$ ndaj $d$ ose raporti i $a$ ndaj $b$ është i barabartë me raportin e $c$ ndaj $d$.
Barazia $a : b = c : d$ quhet **përpjesëtim** (**proporcion**). Me fjalë të tjera, nëse $a : b = k$ dhe $c : d = k$, atëherë $a : b = c : d$ është një përpjesëtim. Për numrat $a$ dhe $c$ themi se janë në përpjesëtim me numrat $b$ dhe $d$, përkatësisht. Numri $k$ quhet **koeficient i përpjesëtimit**.

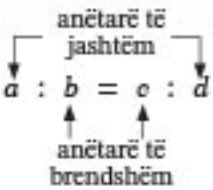
### SHEMBULLI 10

Kontrolloni nëse barazitë në vijim janë përpjesëtime: a) $12 : 3 = 20 : 5$ b) $\frac{1}{4} : 3 = \frac{5}{6} : 10$

a) $12 : 3 = 20 : 5$, sepse $12 : 3 = 4$ dhe $20 : 5 = 4$

b) $\frac{1}{4} : 3 = \frac{5}{6} : 10$, sepse $\frac{1}{4} : 3 = \frac{1}{12}$ dhe $\frac{5}{6} : 10 = \frac{1}{12}$

Çdo përpjesëtim përbëhet nga katër anëtarë, të cilët nga e majta në të djathtë quhen anëtari i parë, i dytë, i tretë dhe i katërt i përpjesëtimit. Anëtari i parë dhe i katërt i përpjesëtimit quhen **anëtarë të jashtëm** të përpjesëtimit, ndërsa anëtari i dytë dhe i tretë quhen **anëtarë të brendshëm** të përpjesëtimit.




### SHEMBULLI 11

Në përpjesëtimin $3 : 15 = 5 : 25$, numrat 3 dhe 25 janë anëtarë të jashtëm, ndërsa numrat 15 dhe 5 janë anëtarë të brendshëm.

$3 \cdot 25 = 75$ Prodhimi i anëtarëve të jashtëm është i barabartë me
$15 \cdot 5 = 75$ prodhimin e anëtarëve të brendshëm.

Në vazhdim do të japim disa veti të përpjesëtimeve.



**Vetia themelore e përpjesëtimeve.** Prodhimi i anëtarëve të jashtëm të një përpjesëtimi është i barabartë me prodhimin e anëtarëve të brendshëm të përpjesëtimit.

### SHEMBULLI 12

Në përpjesëtimin $7 : 21 = 2 : 6$ vlen $7 \cdot 6 = 21 \cdot 2$



Nëse prodhimi i dy numrave të ndryshëm nga zero është i barabartë me prodhimin e dy numrave të tjerë, atëherë nga këta katër numra mund të formohet një përpjesëtim.

### SHEMBULLI 13

Nga numrat 2, 3, 6 dhe 9 mund të formohet një përpjesëtim, sepse $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$.

Përpjesëtimi është $2 : 3 = 6 : 9$.



Përpjesëtimi nuk ndryshon nëse një anëtar i jashtëm dhe një anëtar i brendshëm, ose të gjithë anëtarët e tij, shumëzohen ose pjesëtohen me të njëjtin numër të ndryshëm nga zero.

Vetia e fundit përdoret për thjeshtimin e përpjesëtimeve edhe atë: kur disa nga anëtarët e përpjesëtimit janë thyesa ose numra dhjetorë, ose kur një anëtar i brendshëm dhe një i jashtëm ose të gjithë anëtarët e përpjesëtimit kanë një shumëzues të përbashkët.

### SHEMBULLI 14

Thjeshtoni përpjesëtimin $\frac{2}{3} : \frac{1}{5} = x : \frac{7}{15}$.

$\frac{2}{3} : \frac{1}{5} = x : \frac{7}{15}$ I shumëzojmë të gjithë anëtarët e përpjesëtimit me SHVP $(3, 5, 15) = 15$.

$10 : 3 = 15x : 7$

$10 : 45 = x : 7$ I pjesëtojmë anëtarin e parë dhe të dytë me numrin 5.

$2 : 9 = x : 7$

Me **zgjidhjen e një përpjesëtimi** nënkuptohet gjetja e anëtarit të panjohur në të, kur njihen tre anëtarët e tjerë.

### SHEMBULLI 15

Gjeni anëtarin e panjohur në përpjesëtimin $8 : 5 = x : 7.5$.

$8:5=x:7.5$ Zbatojmë vetinë themelore të përpjesëtimeve.
$5\cdot x=8\cdot 7.5$
$5x=60$
$x=12$

## DETYRA 4

Njehsoni anëtarin e panjohur $x$ në përpjesëtimin:

a) $3x:8=9:5$ b) $12:(x+1)=3:4$ c) $3:4=(7-x):(7+x)$

## Përpjesëtimi i zgjeruar

### SHEMBULLI 16

Nëse raportet e barabarta 2 : 1, 4 : 2 dhe 8 : 4 i lidhim me shenjën e barazisë, fitojmë përpjesëtimin $2:1=4:2=8:4$, i cili është shembull i një përpjesëtimi të zgjeruar.

Barazia e tre ose më shumë raporteve quhet **përpjesëtim i zgjeruar**. Me fjalë të tjera, nëse $a_1:b_1=k$, $a_2:b_2=k,\ldots,a_n:b_n=k$, atëherë $a_1:b_1=a_2:b_2=\ldots=a_n:b_n$ është një përpjesëtim i zgjeruar. Për numrat $a_1, a_2,\ldots, a_n$ themi se janë në përpjesëtim me numrat $b_1, b_2,\ldots, b_n$, përkatësisht. Numri $k$ quhet **koeficient i përpjesëtimit.**

Përpjesëtimet e zgjeruara shpesh shkruhen si: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ ose $a_1:a_2:\ldots:a_n=b_1:b_2:\ldots:b_n$.

### SHEMBULLI 17

Formoni një përpjesëtim të zgjatur nga përpjesëtimet $a:b=4:3$, $b:c=3:8$ dhe $c:d=4:5$.

Nga $c:d=4:5$ gjejmë se $c:d=8:10$, prandaj përpjesëtimi i zgjeruar do të jetë
$a:b:c:d=4:3:8:10$.

## DETYRA 5

Gjeni $x$ dhe $y$ nga përpjesëtimi i zgjeruar $x:4=6:y=3:2$.

Përpjesëtimi i zgjeruar nuk ndryshon nëse shumëzohen ose pjesëtohen me të njëjtin numër të ndryshëm nga zero, cili do anëtar i parë dhe anëtari i dytë përkatës i tij, ose të gjithë anëtarët e parë ose të gjithë anëtarët e dytë. Vetia e fundit përdoret për thjeshtimin e përpjesëtimeve të zgjeruara.

### SHEMBULLI 18

Thjeshtoni përpjesëtimin e zgjeruar $a_1:a_2:a_3=\frac{7}{8}:\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$

$a_1:a_2:a_3=\frac{7}{8}:\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ I shumëzojmë ë gjithë anëtarët e dytë me SHVP (8, 4, 2) = 8.
$a_1:a_2:a_3=7:6:4$



Shuma e të gjithë anëtarëve të parë të raporteve në një përpjesëtim të zgjeruar ndaj shumës së të gjithë anëtarëve të dytë sillen njëjtë si çdo anëtar i parë ndaj anëtarit të dytë përkatës, gjegjësisht për përpjesëtimin e zgjeruar $a_1 : a_2 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : \ldots : b_n$ vlen

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}.$$

### SHEMBULLI 19

Ndani numrin 450 në katër pjesë që janë në raport 2 : 3 : 5 : 8.

Le t'i shënojmë pjesët e kërkuara me $x, y, z$ dhe $w$. Sipas kushtit të detyrës kemi

$x + y + z + w = 450$ dhe $x : y : z : w = 2 : 3 : 5 : 8$

Nga këtu gjejmë se $x = 2k, y = 3k, z = 5k$ dhe $w = 8k$, ku $k$ është koeficienti i përpjesëtimit.

Sipas vetive të përpjesëtimeve të zgjeruara fitojmë

$2k + 3k + 5k + 8k = 450$, $18k = 450$ dhe $k = 25$.

Pjesët e kërkuara janë

$x = 2k = 2 \cdot 25 = 50$, $y = 3k = 3 \cdot 25 = 75$, $z = 5k = 5 \cdot 25 = 125$ dhe $w = 8k = 8 \cdot 25 = 200$.

### DETYRA 6

Për gjatësitë e brinjëve të një trekëndëshi vlen $a : b : c = 5 : 7 : 11$, ndërsa perimetri i tij është 115 cm. Sa janë gjatësitë e brinjëve të trekëndëshit?

## Përpjesëtimi i drejtë dhe i zhdrejtë

### SHEMBULLI 20

Nëse 1 kilogram mollë kushton 30 denarë, sa do të kushtojnë 2, 3, 4, 5, ... kilogramë mollë?
Kjo është paraqitur në tabelën e mëposhtme:

| Sasia e mollëve në kilogramë | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Vlera në denarë | 30 | 60 | 90 | 120 | 150 | 180 | 210 | ... |

Nga tabela përfundojmë se $1 : 2 = 30 : 60$, $2 : 3 = 60 : 90$, $3 : 4 = 90 : 120$ etj.

Domethënë, kur njëra madhësi (sasia) rritet 2, 3, 4, 5, ... herë, atëherë madhësia tjetër (vlera e mallrave) do të rritet po aq herë dhe anasjelltas.



Themi se dy madhësi të ndryshueshme $X$ dhe $Y$ janë në **varshmëri të drejtë përpjesëtimore** (**proporcionale**) nëse raporti i cilëve do dy vlerave të lejuara të njërës madhësi është i barabartë me raportin e vlerave përkatëse të madhësisë tjetër.

Madhësitë midis të cilave ekziston një varshmëri e drejtë përpjesëtimore quhen **madhësi me përpjesëtim të drejtë.**

### SHEMBULLI 21

Shembuj të madhësive me përpjesëtim të drejtë janë: perimetri i katrorit dhe brinja e tij; pesha dhe vëllimi i një trupi me densitet konstant; numri i punëtorëve dhe puna e kryer prej tyre, etj.

Le të jenë $X$ dhe $Y$ dy madhësi me përpjesëtim të drejtë. Nëse $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ janë disa vlera arbitrare të lejuara të madhësisë $X$, dhe $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ janë vlerat përkatëse të madhësisë $Y$, atëherë herësi i vlerave përkatëse është një numër konstant, gjegjësisht kemi

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_n}{x_n} = k$$

Numri $k$ quhet **koeficienti i përpjesëtimit** të madhësive me përpjesëtim të drejtë $X$ dhe $Y$.

### SHEMBULLI 22

a) Perimetri i vijës rrethore dhe rrezja e tij janë madhësi me përpjesëtim të drejtë me koeficient përpjesëtimi $k = 2\pi$.

b) Perimetri i trekëndëshit barabrinjës është në përpjesëtim të drejtë me gjatësinë e brinjës së tij me koeficient përpjesëtimi $k = 3$.

### SHEMBULLI 23

Në një vizatim teknik janë vizatuar dy vija rrethore. Njëra prej tyre ka rreze 10 cm dhe perimetër 62,8 cm. Sa do të jetë perimetri i vijës tjetër rrethore nëse rrezja e saj është 25 cm?

Madhësitë e dhëna janë në përpjesëtim të drejtë. Koeficienti i përpjesëtimit është

$k = \frac{62{,}8}{10} = 6{,}28.$

Nëse e shënojmë me x perimetrin e vijës rrethore me rreze 25 cm, atëherë $\frac{x}{25} = 6{,}28$, nga njehsojmë $x = 157$ cm.

Perimetri i vijës tjetër rrethore është 157 cm.

## DETYRË 7

Një 3D printer mund të shtypë 5 modele për 2 orë. Sa modele do të shtypë i njëjti printer për 6 orë nëse punon me të njëjtën shpejtësi?

### SHEMBULLI 24

Distanca midis dy qyteteve është 120 km. Ajo mund të përshkohet në kohë të ndryshme në varshmëri të shpejtësisë së lëvizjes. Për të studiuar varshmërinë midis shpejtësisë dhe kohës së nevojshme për të përshkuar rrugën, do të ndërtojmë tabelën e mëposhtme:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Shpejtësia në km/orë | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 60 | 120 | ... |
| Koha në orë | 24 | 12 | 8 | 6 | 4 | 2 | 1 | ... |
| Rruga në km | 120 | 120 | 120 | 120 | 120 | 120 | 120 | ... |

Nga tabela përfundojmë se $5 : 10 = 12 : 24$, $5 : 15 = 8 : 24$, $5 : 30 = 4 : 24$, $15 : 60 = 2 : 8$, etj.

Gjithashtu vërejmë se $5 \cdot 24 = 10 \cdot 12 = 15 \cdot 8 = 20 \cdot 6 = 30 \cdot 4 = \ldots = 120 \cdot 1 = 120$.

Domethënë, kur njëra madhësi (shpejtësia) rritet 2, 3, 4, 5,... herë, atëherë madhësia tjetër (koha) zvogëlohet po aq herë dhe anasjelltas.



Themi se dy madhësi të ndryshueshme $X$ dhe $Y$ janë në **varshmëri të zhdrejta përpjesëtimore** (**proporcionale**) nëse raporti i cilave do dy vlera të lejuara të njërës madhësi është i barabartë me raportin e anasjelltë të vlerave përkatëse të madhësisë tjetër.

Madhësitë ndërmjet të cilave ekziston një varshmëri e zhdrejtë përpjesëtimore quhen **madhësi me përpjesëtim të zhdrejtë**.

## SHEMBULLI 25

Madhësi me përpjesëtim të zhdrejtë janë: gjatësia dhe gjerësia e një drejtkëndëshi, me syprinë konstante; presioni dhe vëllimi i një sasie të caktuar gazi në temperaturë konstante; numri i punëtorëve dhe koha që u duhet për të përfunduar një punë të caktuar, etj.

Le të jenë $X$ dhe $Y$ dy madhësi me përpjesëtim të zhdrejtë. Nëse $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ janë disa vlera arbitrare të lejuara të madhësisë $X$, dhe $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ janë vlerat përkatëse të madhësisë Y, atëherë prodhimi i vlerave përkatëse është numër konstant, pra kemi $y_1x_1 = y_2x_2 = \ldots = y_nx_n = k$. Numri $k$ quhet **koeficient i përpjesëtimit** të madhësive me përpjesëtim të zhdrejtë $X$ dhe $Y$.

## SHEMBULLI 26

Sa orë do të zgjasë mbushja e një baterie me tension prej 10 voltësh, nëse mbushja me tension prej 5 voltësh zgjat 10 orë?

Për mbushjen e baterive përdoren tensione të ndryshme. Sa më i lartë të jetë tensioni, aq më pak kohë duhet për mbushje, domethënë tensioni dhe koha janë madhësi me përpjesëtim të zhdrejtë. Koeficienti i përpjesëtimit është $k = 5 \cdot 10 = 50$.

Nëse e shënojmë me x numrin e orëve për mbushjen e baterisë me tension prej 10 voltësh, atëherë $10x = 50$, $x = 5$ orë. Mbushja e baterisë me tension prej 10 voltësh do të zgjasë 5 orë.

## DETYRA 8

Dymbëdhjetë punëtorë e përfunduan një punë të caktuar për 10 ditë. Sa ditë do t'u duhen 15 punëtorëve për të përfunduar të njëjtën punë nëse punojnë me të njëjtin produktivitet?

### DETYRA PËR USHTRIME

1. Në një shkollë ka 900 nxënës dhe 26 mësues.
   a) Shkruani raportin e nxënësve ndaj mësuesve në formë të thjeshtuar.
   b) Vitin shkollor pasardhës, numri i nxënësve u rrit për 60 dhe u punësuan 4 mësues të rinj. Përcaktoni raportin e ri të nxënësve ndaj mësuesve.
   c) Në cilin raport ka më shumë nxënës?

2. Gjeni largesën ndërmjet dy qyteteve, nëse në një hartë gjeografike me raport 1 : 300 000, ato janë të larguara 18.5 cm.

3. Shkruani raportin e zgjeruar që fitohet nga raportet e thjeshta: 2 : 3, 5 : 6 dhe 9 : 10.

4. Shqyrtoni vërtetësinë e përpjesëtimeve:
   a) $3 : 5 = 12 : 20$  b) $4 : 5 = \frac{1}{5} : \frac{1}{4}$  c) $x^2 : y^2 = xy : \frac{y^3}{x}, x \neq 0, y \neq 0$

5. Thjeshtoni përpjesëtimin: a) $\frac{1}{6} : \frac{2}{5} = \frac{3}{8} : x$  b) $x : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} : \frac{1}{8}$  c) $\frac{3}{4} : x = \frac{2}{5} : \frac{1}{6}$

6. Njehsoni anëtarët e panjohur në përpjesëtimin $2 : 3 = x : 6 = 8 : y = z : 18$

7. Formoni një përpjesëtim të zgjeruar nga përpjesëtimet: $a : b = 2 : 3$, $b : c = 6 : 5$ dhe $c : d = 15 : 11$.

8. Numrin 600 ndajeni në pjesë që janë në raport 1 : 3 : 6.

9. Nga një serrë çdo ditë merren 1376 trëndafila të verdhë, të kuq dhe të bardhë. Nga sa trëndafila prej secilës ngjyrë merren nëse numri i trëndafilave të verdhë dhe të kuq është në raport 5 : 6, ndërsa numri i trëndafilave të kuq dhe të bardhë është në raport 4 : 7?

10. Në çfarë varësie gjenden perimetri dhe brinja e një gjashtëkëndëshi të rregullt? Cili është koeficienti i përpjesëtimit?

11. Një trekëndësh le të ketë brinjë 3 cm, 4 cm dhe 5 cm, dhe një trekëndësh tjetër i ngjashëm me të ka brinjën më të shkurtër 6 cm. Gjeni brinjët tjera të trekëndëshit.

12. Cila është varshmëria e shpejtësisë me të cilën një tub mbush një basen (e matur në litra në minutë) dhe koha e mbushjes së basenit (e matur në minuta)? Sa është koeficienti i përpjesëtimit?

13. Një rezervuar zbrazet me një pompë për 18 orë. Sa orë do të duhen për të zbrazur të njëjtin rezervuar nëse kyçen 3 pompa që punojnë me të njëjtën shpejtësi?

# 1.11. Njehsimi me përqindje

## Shndërrimi i përqindjeve në numra dhjetorë dhe thyesa

### AKTIVITET

Emërtoni dhe shënoni raportin e formës: a) 1 : 100  b) 50 : 100  c) 100 : 100.
Çfarë pjese të tërësisë përcakton secili nga këta raporte?

Në çdo veshje, prodhuesi vendos një etiketë ku shënon përbërjen e materialit nga i cili është bërë veshja. Materiali nga i cili është qepur fustani i Monikës ishte i përbërë nga 80% mëndafsh.

$80\% = \frac{80}{100} = \frac{4 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{4}{5}$ Përbërja e mëndafshit e shndërruar në thyesë.

$80\% = \frac{80}{100} = 0{,}8$ Përbërja e mëndafshit e shndërruar në numër dhjetor.

### SHEMBULLI 1

a) Numri dhjetor 0,16 i shndërruar në përqindje:

$0{,}16 = \frac{16}{100} = 16\%$

b) Thyesa $\frac{3}{5}$ e shndërruar në përqindje:

$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100} = 60\%$

### DETYRË 1

Rivizatoni dhe plotësoni tabelat me thyesa, numra dhjetorë dhe përqindje ekuivalente:

| thyesa | numri dhjetor | përqindja |
|---|---|---|
| $\frac{5}{8}$ | | |
| | 0,34 | |
| | | 1,5% |

| thyesa | numri dhjetor | përqindja |
|---|---|---|
| $\frac{3}{4}$ | | |
| | 0,25 | |
| | | 93% |

### SHEMBULLI 2

Radhitni sipas madhësisë numrat në vijim, duke filluar nga më i vogli: 0,1; $\frac{9}{50}$; 9%

Më e thjeshtë është numrat t'i shkruajmë në përqindje:

$\frac{9}{50} = \frac{18}{100} = 18\%$ dhe $0{,}1 = \frac{10}{100} = 10\%$.

Numrat e radhitur sipas madhësisë, duke filluar nga më i vogli, janë: 9%, 0,1 dhe $\frac{9}{50}$.

### DETYRA 2

**Radhitni sipas madhësisë numrat në vijim, duke filluar nga më i madhi:**

a) 0,57, $\frac{26}{50}$, 56% b) 33%, $\frac{4}{11}$, 0,3 c) 0,5, $\frac{1}{5}$, 5%

## Vlera bazë, vlera e përqindjes dhe përqindja

Siç e përmendëm, raporti i formës a : 100 quhet **përqindje**, dhe shënohet me $a\%$. Në praktikë, është e zakonshme që suksese dhe dështime të ndryshme, rritja ose ulja e çmimeve të mallrave ose e prodhimit të shprehen me këto lloje të veçanta raportesh. Duke qenë se përqindja, para së gjithash është një raport, të gjitha vetitë e raportit barten edhe te përqindja. Por llogaritja me përqindje, për shkak të rëndësisë së saj, e mban emrin **llogaritje me përqindje**.

### SHEMBULLI 3

Në një garë shkollore të matematikës, Ina iu përgjigj saktë 17 pyetjeve nga gjithsej 25 pyetjet e parashtruara. Në të njëjtën garë, Mirku u dha përgjigje të sakta 13 pyetjeve nga gjithsej 20 pyetjet e parashtruara. Shtrohet pyetja se cili prej garuesve ishte më i suksesshëm?

Ina iu përgjigj saktë 17 pyetjeve nga gjithsej 25 pyetje. Rezultatin mund ta shprehim me raportin $17 : 25$. Në mënyrë të ngjashme, rezultati i Mirkut, i përbërë nga 13 pyetje të përgjigjura saktë nga gjithsej 20, mund ta shprehim me raportin $13 : 20$. Tani, përgjigjja e pyetjes së shtruar reduktohet në përfundimin nëse raporti $17 : 25$ është më i madh apo më i vogël se raporti $13 : 17$?

Le të formojmë përpjesëtimet e mëposhtme: Ina: $17 : 25 = x : 100$ prej nga rrjedh $x = 68$, dhe Mirku: $13 : 20 = y : 100$ prej nga rrjedh $y = 65$.

Sipas kësaj, rezultati i Inës prej $17 : 25$ është ekuivalent me $68 : 100$, ndërsa rezultati i Mirkut prej $13 : 20$ është ekuivalent me $65 : 100$. Mund të konstatojmë se Ina tregoi rezultat më të mirë në test sepse iu përgjigj saktë 68% të pyetjeve të parashtruara, ndryshe nga Mirku që iu përgjigj saktë 65% të pyetjeve të parashtruara.

Siç e vumë re nga shembulli, në llogaritjen me përqindje hasim: konstantën 100, **vlerën bazë** $S$, **përqindjen** $p$, dhe **vlerën e përqindjes** $P$, të cilat lidhen me përpjesëtimin
$P : S = p : 100$.

Nëse njihen dy nga vlerat në përpjesëtimin e mësipërm, atëherë vlera e tretë mund të llogaritet duke përdorur një nga formulat: $P = \frac{S \cdot p}{100}$ ose $S = \frac{100 \cdot P}{p}$ ose $p = \frac{100 \cdot P}{S}$.

### SHEMBULLI 4

Irina kishte 5000 denarë. Për sa denarë u rrit llogaria e saj, nëse ajo mori një honorar për pjesëmarrje në projekt në lartësinë prej 12% të shumës totale që kishte?

Janë dhënë vlera bazë $S = 5000$ dhe përqindja $p = 12$, ndërsa kërkohet vlera e përqindjes $P$.

Sipas formulës për llogaritjen e vlerës së përqindjes kemi $P = \frac{S \cdot p}{100} = \frac{5000 \cdot 12}{100} = 600$.
Llogaria e Irinës u rrit për 600 denarë.

### SHEMBULLI 5

Çmimi i një palë këpucëve u rrit për 12%. Rritja e çmimit të këpucëve kap vlerën 840 denarë. Sa ishte çmimi i këpucëve para rritjes?

Janë dhënë vlera e përqindjes $P = 840$ dhe përqindja $p = 12$, dhe kërkohet vlera bazë $S$.

Sipas formulës për llogaritjen e vlerës bazë kemi $S = \frac{100 \cdot P}{p} = \frac{100 \cdot 840}{12} = 7000$
Çmimi i këpucëve para rritjes ka qenë 7000 denarë.

### SHEMBULLI 6

Një kompani bleu 30 ton fruta në ambalazh prej 3 ton. Sa është përqindja e ambalazhit?

Janë dhënë vlera bazë $S = 30$ dhe vlera e përqindjes $P = 3$, ndërsa kërkohet përqindja $p$.

Sipas formulës për llogaritjen e përqindjes kemi $p = \frac{100 \cdot P}{S} = \frac{100 \cdot 3}{30} = 10$.
Përqindja e ambalazhit është $p = 10$.

### SHEMBULLI 7

Në një punëtori u prodhuan 1800 prodhime artizanale dhe me këtë norma u tejkalua për 20%.
a) Sa ishte norma e prodhimeve artizanale? b) Për sa prodhime artizanale u tejkalua norma?

Janë dhënë përqindja $p = 20$ dhe shuma e vlerës bazë dhe vlerës së përqindjes $S + P = 1800$, dhe kërkohet të përcaktohen vlera bazë $S$ dhe vlera e përqindjes $P$.

a) Kemi $S + P = S + \frac{S \cdot p}{100} = S(1 + \frac{p}{100})$. Sipas kushteve të detyrës kemi
$S(1 + \frac{20}{100}) = 1800$ prej nga rrjedh $\frac{120}{100}S = 1800$.
Pra, vlera bazë, e cila në fakt paraqet normën, është $S = 1500S = 1500$ prodhime artizanale.

b) Norma u tejkalua për vlerën e përqindjes $P = (S + P) - S = 1800 - 1500 = 300$ prodhime artizanale.

### DETYRA 3

Në cilën shitore printeri është më i lirë, nëse në njërën shitore çmimi i printerit u rrit për 20%, kurse në tjetrën shitore, i njëjti printer me çmim fillestar të njëjtë, u rrit dy herë nga 10%?

### DETYRA 4

Cila është pajisja më e shtrenjtë dhe më e lirë para rritjes së çmimeve të dhëna në tabelë:

| Pajisja | Rritja | Çmimi i ri në euro |
|---|---|---|
| Telefon celular | 30% | 200 |
| Laptop | 12,5% | 1250 |
| Tablet | 4,5% | 155 |
| Kompjuter | 10% | 1750 |

### SHEMBULLI 8

Gjatë periudhës së likuidimit veror, çmimi i një këmishe është ulur për 12% dhe çmimi me zbritje është 1276 denarë.
a) Sa ishte çmimi fillestar i këmishës? b) Për sa u ul çmimi i këmishës?

Janë dhënë ndryshimi i vlerës bazë me vlerën e përqindjes $S - P = 1276$ dhe përqindja $p = 12$, ndërsa kërkohet të përcaktohen vlera bazë $S$ dhe vlera e përqindjes $P$.

a) Kemi $S - P = S - \frac{S \cdot p}{100} = S(1 - \frac{p}{100})$. Sipas kushteve të detyrës gjejmë se
$S(1 - \frac{12}{100}) = 1276$ prej nga rrjedh $\frac{88}{100}S = 1276$.
Pra, vlera bazë, e cila në fakt paraqet çmimin fillestar të këmishës, është $S = 1450$ denarë.

b) Çmimi i këmishës është ulur për vlerën e përqindjes $P = S - (S - P) = 1450 - 1276 = 174$ denarë.

### DETYRA 5

Në cilën shitore pajisja e klimës është më e lirë, nëse në njërën shitore pajisja e klimës ka 30% zbritje, kurse në shitoren tjetër e njëjta pajisje, me çmim fillestar të njëjtë, ka zbritje tri herë nga 10%?

### DETYRA 6

Cila është veshja më e shtrenjtë dhe cila më e lirë para zbritjes së dhënë në tabelë:

| Veshja | Zbritja | Çmimi i ri në denarë |
|---|---|---|
| Xhinse | 25% | 1200 |
| Xhemper | 17,5% | 1238 |
| Bluzë | 7,5% | 555 |
| Çorape | 10% | 45 |

### DETYRA 7

Një ekip kërkimor kishte buxhet vjetor 2 000 000 denarë. Vitin e ardhshëm, buxheti fillimisht është ulur për 15%, e më pas është rritur për 10% të shumës së re.

a) Sa është buxheti pas uljes së parë? b) Sa është buxheti pas rritjes?

c) A është buxheti përfundimtar më i madh apo më i vogël se ai fillestar dhe për sa përqind?

## Zbatimi i llogaritjes me përqindje në ekonomi

### SHEMBULLI 9

Një kompani instaloi panele diellore dhe arriti të fitonte 240 000 denarë nga shitja e energjisë elektrike. Nga fitimi, 25% i shpenzuan për mirëmbajtjen e paneleve, 18% për taksa dhe 30% për përmirësim energjetik. Pjesa e mbetur është fitim.

a) Sa fonde shpenzuan për mirëmbajtje, taksa dhe përmirësim energjetik, veç e veç?

b) Sa ishin shpenzimet totale të kompanisë? c) Sa fitim arriti kompania?

Të ardhurat paraqesin shumën totale të parave të fituara nga kompania nga shitja e energjisë elektrike. Sipas kushteve të detyrës, kompania arriti të ardhura vjetore prej 240 000 denarë.

a) Kompania shpenzoi për: mirëmbajtje $25\% \cdot 240\,000 = 60\,000$ denarë
taksa $18\% \cdot 240\,000 = 43\,200$ denarë
përmirësim energjetik $30\% \cdot 240\,000 = 72\,000$ denarë.

b) Shpenzimet totale të kompanisë ishin $60\,000 + 43\,200 + 72\,000 = 175\,000$ denarë.

c) Profiti ose fitimi është shuma që mbetet nga të ardhurat pasi zbriten të gjitha shpenzimet. Fitimi ndodh kur të ardhurat janë më të mëdha se shpenzimet.

Kompania arriti fitim prej $240\,000 - 175\,000 = 65\,000$ denarë.

### DETYRË 8

Një kompani e re start-up zhvilloi një aplikacion celular për menaxhimin e buxhetit personal. Aplikacioni ka 5000 përdorues të cilët paguajnë çdo muaj 120 denarë. Nga të ardhurat totale, 15% shpenzohen për marketing, 40% për pagat dhe 10% për serverët dhe teknologjitë. Pjesa e mbetur është fitim.

a) Sa janë të ardhurat mujore të kompanisë?
b) Sa janë shpenzimet për marketing, paga dhe servera?
c) Sa është fitimi i kompanisë?

### SHEMBULLI 10

Një punëtori e vogël shpenzoi 600 000 denarë për materiale, mjete dhe paga për prodhimin e çantave. Të gjitha çantat e prodhuara i shiti për 660 000 denarë. Përveç kësaj, ajo pagoi 15% të të ardhurave për transport.

a) Sa denarë u paguan për transport? b) Sa janë shpenzimet totale?
c) A ka fitim apo humbje punëtoria dhe sa është ajo?

Humbja ose deficiti ndodh kur shpenzimet janë më të mëdha se të ardhurat.

a) Punëtoria për transport pagoi $15\% \cdot 660\,000 = 99\,000$ denarë.

b) Shpenzimet totale janë $600\,000 + 99\,000 = 699\,000$ denarë.

c) Punëtoria ka humbje sepse shpenzimet totale janë më të mëdha se të ardhurat.

Humbja është $699\,000 - 660\,000 = 39\,000$ denarë.

## DETYRA 9

Një kompani që shet pajisje shtëpiake bleu një seri pajisjesh me çmim prej 12 000 denarësh për copë. Për shkak të problemeve teknike, ajo u detyrua t'i shesë pajisjet me humbje 20% për copë.

a) Sa është çmimi i shitjes për copë? b) Sa është humbja për copë?

c) Nëse janë shitur 50 copë, sa është humbja totale?

**Tatimi i vlerës së shtuar (TVSH)** është tatim i cili llogaritet në vlerën e mallrave ose shërbimeve dhe i shtohet vlerës së mallrave ose shërbimeve gjatë çdo faze të prodhimit dhe tregtisë. Në vendin tonë TVSH është 18% te të gjitha prodhimet dhe shërbimet, me përjashtim të disave prej tyre të cilat kanë normë të privilegjuar tatimore prej 5%. Si funksionon në praktikë llogaritja e TVSH-së?

### SHEMBULLI 11

Mulliri prodhon miell në vlerë prej 100 denarësh dhe ia shet bukëpjekësit me 18% TVSH të përfshirë, për $100 + 18\% \cdot 100 = 100 + 18 = 118$ denarë. Mulliri TVSH-në prej 18 denarëve ia paguan shtetit.

Bukëpjekësi e shfrytëzon miellin dhe prodhon bukë në vlerë prej 200 denarësh të cilën e shet në shitore me 18% TVSH të përfshirë, për $200 + 18\% \cdot 200 = 200 + 36 = 236$ denarë. Bukëpjekësi refuzon 18 denarët TVSH të paguara gjatë blerjes së miellit dhe shtetit i paguan vetëm $36 - 18 = 18$ denarë.

Shitorja ia shet bukën në vlerë prej 300 denarësh konsumatorit me 18% TVSH të përfshirë, për $300 + 18\% \cdot 300 = 300 + 54 = 354$ denarë. Shitorja refuzon 36 denarë TVSH dhe paguan vetëm $54 - 36 = 18$ denarë.

Konsumatori i fundit e paguan TVSH, pasi që ai e paguan çmimin e plotë me TVSH dhe nuk ka të drejtë të refuzojë atë TVSH sikur mundën ta bënin kompanitë.

Disa barëra dhe prodhime ushqimore kanë normë të privilegjuar tatimore prej 5%.

## DETYRA 10

Një librari e shet një libër me çmim prej 600 denarëve pa TVSH. Norma e TVSH-së për librin është 5%.
a) Sa kushton TVSH-ja? b) Sa është çmimi përfundimtar i librit duke përfshirë edhe TVSH-në?

**Dogana** është taksa që paguhet gjatë importit të mallrave nëpërmjet pikave kufitare të një shteti. Qëllimi i doganës është mbrojtja e prodhimtarisë vendore nga konkurrenca nga jashtë, të fitohen të ardhura në buxhetin shtetëror dhe të kontrollohet rrjedha e mallrave.

Dogana paguhet kur importohen mallra nga jashtë, gjegjësisht kur malli kalon kufij dhe hyn në një vend nga një vend tjetër.

Dogana llogaritet si përqindje e vlerës doganore të mallit, e cila rëndom i përfshin vlerën e faturuar të mallit, harxhimet e transportit të mallit, sigurimin e mallit etj. Pasi të mbarojë doganimi i mallit, konsumatori duhet të paguajë TVSH.

## SHEMBULLI 12

Itani dëshiron të importojë telefon celular nga jashtë në vlerë prej 200 eurosh dhe normë doganore prej 10%. Për transport duhet të paguajë 10 euro, ndërsa për sigurim 5 euro. gjithsej sa duhet të paguajë për telefonin celular nëse norma e TVSH-së për telefonat celularë është 18%?

Norma doganore është 10% dhe duhet t'a paguajë të llogaritur në vlerën e shumës faturore, transportit dhe sigurimit të mallit $10\%\,(200 + 10 + 5) = 21{,}5$ euro.

Vlera e telefonit celular me doganë të paguar është $215 + 21{,}5 = 236{,}5$ euro.

Vlerës së telefonit celular me doganë të paguar duhet t'i paguajë TVSH prej 18%
$18\% \cdot 236{,}5 = 42{,}57$ euro.

Për telefonin e tij celular Itani duhet të paguajë gjithsej $236{,}5 + 42{,}57 = 279{,}07$ euro.

## DETYRA 13

Sanja porositi fritezë nga jashtë e cila kushton 100 euro. Për transport duhet të paguajë 20 euro, ndërsa për sigurim 8 euro. Norma doganore është 15% dhe norma e TVSH-së është 18%.
a) Sa duhet të paguajë Sanja doganë? b) Sa kushton TVSH-ja?
c) Sa duhet gjithsej të paguaj Sanja gjatë marrjes së fritezës?

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Ktheni në përqindje thyesën: a) $\frac{17}{100}$ b) $\frac{3}{10}$ c) $\frac{5}{8}$ ç) $\frac{7}{9}$
2. Shndërroni në numër dhjetor përqindjen: a) 12% b) 93% c) 1,5% ç) 75%
3. Shndërroni në thyesë përqindjen: a) 25% b) 50% c) 78% ç) 15%
4. Shndërroni në përqindje numrin dhjetor: a) 0,24 b) 0,99 c) 0,875 ç) 0,33
5. Njehsoni: a) 15% e 750 kilogramëve b) 12% e 6000 denarëve c) 80% e 200 litrave
6. Në një paralele 7 nxënës janë të shkëlqyeshëm, që përfaqëson 20% e numrit të përgjithshëm të nxënësve. Sa nxënës gjithsej ka në paralele?

7. Gjatë pranimit të mallit prej 23 tonëve u konstatua 0,5% dëmtim gjatë transportit. Sa kilogramë mall është dëmtuar?

8. Në një supermarket çdo të mërkure ka zbritje prej 15% të artikujve ushqimor. Sa para do të kursejë Maria nëse ajo bleu artikull që kushton 102 denarë?

9. Nataliteti vjetor në një shtet është 0,3%. Përcakto numrin e popullsisë së atij shteti nëse dihet që para tre vitesh numëronte 40 milion banorë.

10. Senihaja bleu xhinse në zbritje prej 15% dhe ashtu kurseu 360 denarë. Kur Lina shkoi për të blerë nga të njëjtat xhinse, zbritja ishte 25%. Sa para pagoi Lina?

11. Një kompani shet mjete teknike me çmim prej 60 000 denarësh. Në fillim ka dhënë zbritje prej 20%. Më pas e ka rritur çmimin e shumës së zbritur për 25%.
    a) Sa ka qenë çmimi pas zbritjes së parë? b) Sa është çmimi pas rritjes?
    c) A është çmimi i ri i njëjtë, më i madh ose më i vogël nga ai i fillimit?

12. Jana është inxhiniere makinerike dhe punon në fabrikë për vetura. Rroga bruto e saj kushton 60 000 denarë në muaj. Nga to 18% shkojnë për tatim personal, 8% për sigurim pensional dhe 5% për sigurim shëndetësor.
    a) Sa denarë gjithsej hiqen nga rroga e saj?
    b) Sa kushton rroga neto e saj (pas heqjes së kontributeve)?
    c) Nëse kursen 10% të rrogës neto për çdo muaj, sa do të kursej për një vit?

13. Agjencioni digjital për marketing ka realizuar të ardhura prej 500 000 denarësh. Edhe atë, 60% e të ardhurave janë nga reklamimi online, 25% nda SEO optimizimi dhe pjesa e ngelur nga dizajni dhe konsalting shërbimet. Nga të ardhurat e reklamimit online 30% janë harxhuar për rrogat e të punësuarve, 15% nga reklamat në platforma (si Google, Meta etj.), dhe pjesa e ngelur është fitim.
    a) Sa janë të ardhurat nga secili shërbim?
    b) Sa denarë nga reklamimi online u harxhuan në rroga?
    c) Sa denarë nga reklamimi online janë fitim?
    ç) Sa është fitimi i plotë nëse fitimi nga shërbimet tjera (SEO dhe dizajn) është 40% nga të ardhurat e tyre.

14. Kompania shet dy lloje të pajisjeve elektronike, lloji A dhe lloji B. Nga pajisja e llojit A janë shitur 80 copë me fitim prej 24%. Çmimi i pajisjes ishte 10 000 denarë për copë. Nga pajisja e llojit B janë shitur 60 copë me humbje prej 15%. Çmimi i pajisjes ishte 12 000 denarë për copë.
    a) Sa është fitimi nga pajisjet e llojit A? b) Sa është humbja nga pajisjet e llojit B?
    c) Kompania ka pasur fitim apo humbe?

15. Një ilaç shitet me çmimin përfundimtar 525 denarë. Norma e TVSH-së për ilaçin është 5%.
    a) Sa kushton çmimi bazë pa TVSH? b) Sa kushton TVSH-ja?

16. Jovana ka porositur fshesë elektrike nga jashtë me vlerë faturuese 150 euro. Për transport duhet të paguaj 25 euro, ndërsa për sigurim 10 euro. Norma doganore kushton 10%, ndërsa norma e TVSH-së është 18%.
    a) Sa doganë duhet të paguaj? b) Sa kushton TVSH-ja?
    c) Gjithsej sa duhet të paguaj Jovana gjatë marrjes së fshesës?

# 1.12. Rregulla e thjeshtë dhe e përbërë e treshit

## rregullës së thjeshtë të treshit

### AKTIVITET

Sa kilogramë miell nevojitet për 75 kilogramë bukë nëse nga 4 kilogramë miell fitohen 5 kilogramë bukë?

Vetitë e përpjesëtimeve dhe madhësive përpjesëtuese gjejnë zbatim të madh në zgjidhjen e detyrave të praktikës së përditshme. Ato janë detyra në të cilat janë dhënë vlera e njërës madhësi dhe vlera përkatëse e madhësisë tjetër, me të cilën ajo madhësi është në përpjesëtim të drejtë ose në përpjesëtim të zhdrejtë, ndërsa kërkohet të përcaktohet ajo vlerë e njërës prej madhësive e cila i përgjigjet vlerës së njohur të madhësisë tjetër. Detyrat e këtij lloji quhen detyra të **rregullës së thjeshtë të treshit**.

### SHEMBULLI 1

Ana pagoi 1260 denarë për 50 fletore. Sa fletore mund të blejë Ana për 3780 denarë?

Në detyrë janë paraqitur dy madhësi, numri i fletoreve dhe shuma në denarë e paguar për to.

Pasi që Ana pagoi 1260 denarë për 50 fletore, do të shkruajmë:
1260 denarë 50 fletore

Nëse me $x$ shënojmë numrin e kërkuar të fletoreve, ngjashëm si më lartë mund të shënojmë:
3780 denarë $x$ fletore

Meqë me shumë më të madhe denarësh, Ana mund të blejë më shumë fletore, madhësitë janë në përpjesëtim të drejtë, prandaj shigjetat në skemë janë në të njëjtën kahje:

| | |
|---|---|
| 1260 denarë | 50 fletore |
| 3780 denarë | $x$ fletore |

Nga skema e ndërtojmë përpjesëtimin $x : 50 = 3780 : 1260$ prej nga gjejmë se

$x = \frac{50 \cdot 3780}{1260} = 150$ letore. Pra, Ana mund të blejë 150 fletore për 3780 denarë.

Vërejmë se procedura e zgjidhjes së detyrave me rregullën e thjeshtë të treshit përbëhet nga hapat në vijim:

- ✓ Kushtin e detyrës e shkruajmë në rreshtin e parë, ndërsa kërkesën në rreshtin e dytë
- ✓ Shigjetat vendohen në kahje të njëjtë nëse madhësitë në përpjesëtim të drejtë, ndërsa në kahje të kundërt nëse madhësitë janë në përpjesëtim të zhdrejtë, me ç'rast shigjeta e parë fillon nga anëtari i panjohur.
- ✓ Nga kahja e shigjetave ndërtojmë përpjesëtimin nga i cili njehsojmë anëtarin e panjohur.

### DETYRA 1

Për 12 litra qumësht duhet të paguhen 576 denarë. Sa denarë duhet të paguhen për 16,5 litra qumësht?

### SHEMBULLI 2

Nga një sasi peri të pambukut mund te thuret 92 m pëlhurë 140 cm të gjerë. Sa metra pëlhurë do të thuret me të njëjtën sasi peri të pambukut nëse pëlhura është 80 cm e gjerë?

Dy madhësitë: gjatësia dhe gjerësia e pëlhurës që mund të thuret nga sasia e njëjtë e perit të pambukut janë në përpjesëtim të zhdrejtë me njëri-tjetrin. Prandaj, shigjetat në skemë janë me kahje të kundërt:

| | |
|---|---|
| ↑ 92 m pëlhurë | \| 140 cm gjerësi |
| ↑ $x$ m pëlhurë | ↓ 80 cm gjerësi |

Në bazë të skemës ndërtojmë përpjesëtimin $x : 92 = 140 : 80$, prej nga gjejmë se

$x = \frac{92 \cdot 140}{80} = 161$ metra. Pra, nga e njëjta sasi peri të pambukut do të thuren 161 m pëlhurë me gjerësi 80 cm.

### DETYRA 2

Tre punëtorë duhet të kryejnë një punë për 16 ditë. Për sa ditë të njëjtën punë, në kushte të njëjta, do ta kryejnë 4 punëtorë?

## Zbatimi i rregullës së thjeshtë të treshit gjatë shndërrimit në valuta

Shumica e shteteve kanë njësi të vetat monetare të quajtura **valuta**. Kur udhëtojmë në shtet tjetër ose kur krahasojmë çmime, duhet t'i shndërrojmë nga njëra në valutën tjetër.

**Kursi** i valutës na tregon sa njësi monetare të njërës valutë do të fitojmë për 1 njësi monetare të valutës tjetër.

### SHEMBULLI 3

Kursi i një dollari amerikan është (USD) = 54 denarë (MKD). Ndërroni:

a) 250 dollarë në denarë b) 3200 denarë në dollarë

Shndërrimi nga njëra në valutën tjetër mund ta bëjmë me zbatimin e rregullës së thjeshtë të treshit. Meqë për vlerë monetare më të madhe në njërën valutë, fitojmë vlerë monetare më të madhe në valutën tjetër, madhësitë janë në përpjesëtim të drejtë, prandaj shigjetat në skemë janë në të njëjtën kahje:

a)

| | |
|---|---|
| ↑ 1 dollar | ↑ 57 denarë |
| 250 dollarë | $x$ denarë |

Nga skema e ndërtojmë përpjesëtimin

$x : 57 = 250 : 1$ prej nga fitojmë se

$x = 57 \cdot 250 = 14\,250$ denarë.

b)

| | |
|---|---|
| ↑ 57 denarë | ↑ 1 dollar |
| 3200 denarë | $x$ dollarë |

Nga skema gjejmë se

$x : 1 = 3200 : 57$ prej nga fitojmë se

$x = \frac{3200}{57} = 56{,}14$ dollarë.

Të theksojmë se vlerat e jashtme monetare të fituara i rrumbullakojmë në dy vende dhjetore, ndërsa vlerat monetare maqedonase i rrumbullakojmë në numra të plotë.

### DETYRA 3

Njehsoni dhe përgjigjuni pyetjeve, sipas listës së kursit të dhënë me tabelën:

| Valuta | Shkurtesa | Vlera në 1 njësi |
|---|---|---|
| Euro | EUR | 62 denarë |
| Dollari amerikan | USD | 57 denarë |
| Funta britanike | GBP | 75 denarë |
| Franku zviceran | CHF | 67 denarë |

a) Nëse udhëtoni në SHBA dhe keni 20 000 denarë, sa dollarë amerikan do të fitoni?
b) Nëse keni 15 000 denarë, a do të mund të blini orë në Gjermani e cila kushton 220 euro?
c) Në Britaninë e Madhe ju ka pëlqyer një pallto e cila kushton 95 funta. Sa denarë ju nevojitet të ndërroni në mënyrë që ta blini pallton?
ç) Ski-bileta në qendrën zvicerane për skijim kushton 150 franka zvicerane.

Shndërroje këtë vlerë në denarë.

### DETYRA 4

Mateu dëshiron të ndërroj 200 dollarë australian (AUD) në denarë maqedonas (MKD). Duhet të paguaj 30 dollarë australian provizion dhe pjesën e ngelur e ndërron sipas kursit 1 AUD = 34,91 MKD. Sa denarë do të fitojë Mateu?

## Rregulla e përbërë e treshit

Në praktikë shpesh hasim në detyra me tri ose më shumë madhësi proporcionale. Pra, nëse jepen vlera të tri e më shumë madhësive, atëherë vlera përkatëse e panjohur përcaktohet me **rregullën e përbërë të treshit**. Për rregullën e përbërë të treshit vlejnë rregullat e njëjtë për ndërtimin e skemës sipas së cilës i ndërtojmë përpjesëtimet për njehsimin e madhësisë së panjohur.

### SHEMBULLI 4

Për ndërtimin e një tuneli me gjatësi 1600 metra, gjerësi 4 metra dhe lartësi 6 metra, janë harxhuar 640 000 euro. Sa euro janë të nevojshme për ndërtimin e një tuneli me gjatësi 1000 metra, gjerësi 6 metra dhe lartësi 8 metra, nën të njëjtat kushte për ndërtim?

Të gjitha madhësitë, gjatësia, gjerësia, lartësia dhe harxhimi për ndërtimin e tunelit, janë në përpjesëtim të drejtë me njëri-tjetrin, prandaj të gjitha shigjetat në skemë kanë të njëjtën kahje;

| | | | |
|---|---|---|---|
| ↑1600 m gjatësi | ↑4 m gjerësi | ↑6 m lartësi | ↑640 000 euro |
| 1000 m gjatësi | 6 m gjerësi | 8 m lartësi | $x$ euro |

Sipas kahjes së shigjetave rrjedh se $x = \frac{640\,000(1000 \cdot 6 \cdot 8)}{1600 \cdot 4 \cdot 6} = 800\,000$ euro.

Pra, për ndërtimin e tunelit me gjatësi 1000 metra, gjerësi 6 metra dhe lartësi 8 metra nën kushtet e njëjta për ndërtim, nevojiten 800 000 euro.

### DETYRA 5

Nëse 4 robotë për 3 orë ndërtojnë 120 lojëra, sa lojëra do të ndërtojnë 6 robotë për 5 orë?

### SHEMBULLI 5

Një grup prej 20 punëtorëve punuan 5 ditë nga 8 orë dhe vjelën 20 000 kilogramë pjeshka. Sa ditë nevojiten për një grup prej 30 punëtorëve të cilët do të punojnë nga 5 orë në ditë, të vjelin 60 000 kilogramë pjeshka?

Shigjeta e parë e venduar gjithmonë fillon nga $x$ dhe është e kahëzuar për lartë. Më pas vërejmë se nëse 20 punëtorë e kryejnë punën për 5 ditë, atëherë 30 punëtorë do ta kryejnë punën për më pak ditë (madhësi me përpjesëtim të zhdrejtë).

Më tej, nëse punojnë nga 8 orë, punën do ta kryejnë për 5 ditë, ndërsa nëse punojnë nga 5 orë, punën do ta kryejnë për më shumë ditë (madhësi me përpjesëtim të zhdrejtë).

Për fund, nëse 20 000 kilogramë pjeshka janë vjelur për 5 ditë, atëherë 60 000 kilogramë pjeshka do të vjelen për më shumë ditë (madhësi me përpjesëtim të drejtë).

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20 punëtorë | 5 ditë | 8 orë | 20 000 kilogramë |
| 30 punëtorë | $x$ ditë | 5 orë | 60 000 kilogramë |

Sipas kahjes së shigjetave rrjedh se $x = \frac{5 \cdot 20 \cdot 8 \cdot 60\,000}{30 \cdot 5 \cdot 20\,000} = 16$ ditë.

Pra, nevojiten 16 ditë, që një grup prej 30 punëtorëve të cilët do të punojnë nga 5 orë në ditë, të vjelin 60 000 kilogramë pjeshkë.

### DETYRA 6

Nëse 6 makina me fuqi 1200 kilovatë mund të kryejnë një punë të caktuar për 8 ditë, me çfarë fuqie duhet të jenë makinat ashtu që 4 makina të mund ta kryejnë të njëjtën punë për 6 ditë?

#### HULUMTIM

Me familjen tuaj duhet të udhëtoni në Gjermani, Kanada, Zelandë të Re dhe Japoni. Keni buxhet prej 750 000 denarë.

a) Ndërtoni një plan për udhëtimin dhe parashikoni harxhimet në valutën e secilit prej shteteve (euro, dollar kanadez, dollar i Zelandës së Re jen japonez). Në këtë plan përfshini edhe harxhimet për: biletat e avionit, akomodimin, ushqimin, hyrje në muze, paketa argëtuese dhe tjera.

b) Hulumtoni nëpër internet dhe gjeni listë të kurseve për raportin e denarit me valutën e secilit prej shteteve të përmendura.

c) Njehsoni harxhimet totale për secilin shtet në denarë.

ç) Ndërtoni tabelë në të cilën do t'i paraqitni harxhimet në valutat e secilit prej shteteve dhe harxhimet të shndërruara në denarë.

d) Sipas llogaritjeve të tua, a do të mjaftoj buxheti juaj në dispozicion për të udhëtuar në të gjithë katër shtet?

### DETYRA PËR USHTRIME

1. Nga 20 kilogramë rrepë sheqeri fitohen 1,5 kilogramë sheqer. Sa kilogram sheqer do të fitohen nga 768 kilogramë rrepë sheqeri?

2. Përgjatë një dite pune 4 punëtorë kanë gërmuar një kanal 12 metra të gjatë. Sa punëtorë nevojiten për të gërmuar një kanal 18 metra të gjatë përgjatë një dite pune?

3. Gjashtë tuba të njëjtë e mbushin një basen për 4,5 orë. Për sa orë do ta mbushin të njëjtin basen 5 tuba të tillë?

4. Me një fuçi të plotë me ujë mund të mbushen 24 shishe prej nga 0,75 litra. Sa shishe prej nga 1 litri mund të mbushen nga e njëjta fuçi e plotë?

5. Kursi i denarit të maqedonisë (MKD) dhe kunës së Kroacisë (HRK) është 1 MKD = 8 HRK.
   a) Sa kuna fitohen nga 3750 denarë?
   b) Sa denarë fitohen nga 200 kuna të kroacisë?

6. Gjashtë panele diellore për 5 orë prodhojnë 90 kw/h energji elektrike. Sa energji elektrike do të prodhojnë 10 panele për 8 orë?

7. Katër makina punojnë 6 orë dhe prodhojnë 1200 pjesë për automobila. Sa mjete për automobila do të prodhojnë 6 makina për 8 orë?

8. Gjashtë tuba me diametër të njëjtë mund të zbrazin një rezervuar për 8 minuta nëse shtypja është 12 bar. Për sa kohë do të zbrazet i njëjti rezervuar nëse përfshihen 4 tuba, por me shtypje prej 18 bar?

9. Katër senzorë gjatë tensionit prej 5 voltësh aktivizohen për 12 sekonda. Sa kohë nevojitet që të aktivizohen 8 senzorë gjatë tensionit prej 10 voltësh?

## 1.13. Njehsimi i ndarjes

### AKTIVITET

Tre shokë kanë paguar 1500 denarë për drekë. Nga sa denarë duhet të paguajë secili prej tyre?

Në praktikë shpesh hasim në detyra në të cilat një madhësi e caktuar ose një bashkësi duhet të ndahet në pjesë të cilat janë në përpjesëtim të drejtë ose të zhdrejtë me numra të dhënë paraprakisht. Nga kjo, do të dallojmë **ndarje me përpjesëtim të drejtë** dhe **ndarje me përpjesëtim të zhdrejtë**.

### SHEMBULLI 1

Në një projekt kërkimor-shkencor honorari prej 150 000 denarësh ju ndahet dy bashkëpunëtorëve në raport 2 : 3. Nga sa denarë do të fitojë secili prej bashkëpunëtorëve?

Le t'i shënojmë me $x$ dhe $y$ lartësitë e honorarëve të bashkëpunëtorëve në projekt.
Sipas kushtit për ndarjen e honorarëve kemi $x : y = 2 : 3$.
Me zbatimin e vetive të përpjesëtimeve kemi që $x = 2k$ dhe $y = 3k$.
Nga kushti për shumën totale të honorarit fitohet që $2k + 3k = 150\,000$, $5k = 150\,000$, $k = 30\,000$.
Nga këtu gjejmë se $x = 2k = 2 \cdot 30\,000 = 60\,000$ dhe $y = 3k = 3 \cdot 30\,000 = 90\,000$.
Njëri bashkëpunëtor do të fitojë 60 000 denarë, ndërsa bashkëpunëtori tjetër 90 000 denarë.

## DETYRA 1

Madhësitë e dy këndeve komplementare $\alpha$ dhe $\beta$ qëndrojnë në raport 2 : 7. Nga sa janë ato kënde?

## SHEMBULLI 2

Ndajeni numrin 370 në tri pjesë, të cilët do të jenë në përpjesëtim të drejtë me numrat 2,3, dhe 5.

Numri 370 duhet të ndahet në tri pjesë (mbledhës) të cilët do të jenë në raport 2 : 3 : 5.

Nëse mbledhësit i shënojmë me $x, y$ dhe $z$, atëherë $x : y : z = 2 : 3 : 5$ prej nga rrjedh se $x = 2k$, $y = 3k$ dhe $z = 5k$.

Nga kushti në detyrë $x + y + z = 370$, prej nga $2k + 3k + 5k = 370$, $10k = 370$, $k = 37$.

Prej këtu gjejmë se $x = 2k = 2 \cdot 37 = 74$, $y = 3k = 3 \cdot 37 = 111$ dhe $z = 5k = 5 \cdot 37 = 185$.

Mbledhësi i parë është 74, mbledhësi i dytë është 111 dhe mbledhësi i tretë është 185.

## DETYRA 2

Një kompjuter përmban 18 gigabajt RAM-memorie të lirë e cila duhet të ndahet ndërmjet tre aplikacioneve në raport 2 : 3 : 4. Nga sa gigabajt RAM-memorie do të fitojë secili nga aplikacionet?

## SHEMBULLI 3

Një rrugë e gjatë 540 kilometra duhet të ndahet në katër pjesë të cilat janë në përpjesëtim të drejtë me numrat $\frac{2}{3}, 1\frac{1}{2}, \frac{5}{6}$ dhe $\frac{3}{4}$. Rruga duhet të ndahet në katër pjesë të cilat janë në raport $\frac{2}{3} : 1\frac{1}{2} : \frac{5}{6} : \frac{3}{4}$.

Nëse pjesët e kërkuara të rrugës i shënojmë me $x, y, z$ dhe $w$, e fitojmë përpjesëtimin e zgjeruar $x : y : z : w = \frac{2}{3} : 1\frac{1}{2} : \frac{5}{6} : \frac{3}{4}$ prej nga rrjedh $x = \frac{2}{3}k, y = 1\frac{1}{2}k, z = \frac{5}{6}k$ dhe $w = \frac{3}{4}k$.

Meqë $x + y + z + w = 540$, gjejmë që $\frac{2}{3}k + 1\frac{1}{2}k + \frac{5}{6}k + \frac{3}{4}k = 540$, $\frac{45}{12}k = 540$, $k = 144$.

Nga kjo, për pjesët e rrugës fitojmë $x = \frac{2}{3}k = \frac{2}{3} \cdot 144 = 96$, $y = 1\frac{1}{2}k = \frac{3}{2}k = \frac{3}{2} \cdot 144 = 216$, $z = \frac{5}{6}k = \frac{5}{6} \cdot 144 = 120$ dhe $w = \frac{3}{4}k = \frac{3}{4} \cdot 144 = 108$.

Kjo do të thotë që, pjesa e parë e rrugës ka gjatësinë 96 kilometra, e dyta 216 kilometra, e treta 120 kilometra dhe e katërta 108 kilometra.

## DETYRA 3

Një amvisëri ka harxhuar 90 kwh energji elektrike për një muaj. Edhe atë, $\frac{2}{3}$ e energjisë elektrike i ka harxhuar për nxemje, $\frac{1}{6}$ për ndriçim dhe pjesën tjetër për punën e pajisjeve elektrike. Sa kilovat-orë energji elektrike janë harxhuar për secilin qëllim?

## SHEMBULLI 4

Një tretës kimik prej 630 mililitrash është ndarë në tre laboratori. Sasia e tretjes e ndarë në laboratorin e parë dhe të dytë është në raport 5 : 6, ndërsa sasia e tretjes e ndarë në laboratorin e dytë dhe të tretë është në raport 2 : 3. Nga sa mililitra tretës do të fitojë secila nga laboratoritë?

Le t'i shënojmë sasitë e tretësit të ndara në laboratorin e parë, të dytë dhe të tretë me $x, y$ dhe $z$. Atëherë, në pajtueshmëri me kushtet e detyrës kemi: $x : y = 5 : 6$, $y : z = 2 : 3$ dhe $x + y + z = 630$.

Na duhet të transformojmë raportin e parë dhe të dytë ashtu që në të dy raportet tek y të përgjigjet i njëjti numër. Meqë SHVP(6,2) = 6, fitojmë $x : y = 5 : 6$, $y : z = 6 : 9$.

Nga këtu e fitojmë përpjesëtimin e zgjeruar $x : y : z = 5 : 6 : 9$.

Me tej, duke vazhduar sikur edhe më parë fitojmë:

$x = 5k$, $y = 6k$ dhe $z = 9k$

$5k + 6k + 9k = 630$, $20k = 630$, $k = 31{,}5$

$x = 5k = 5 \cdot 31{,}5 = 157{,}5$; $y = 6k = 6 \cdot 31{,}5 = 189$ dhe $z = 9k = 9 \cdot 31{,}5 = 283{,}5$.

Laboratori i parë fitoi 157,5 mililitra tretës, laboratori i dytë 189 mililitra tretës dhe laboratori i tretë 283,5 mililitra tretës.

## DETYRA 4

Tre punëtorë fituan 257 845 denarë. Nga sa denarë do të fitojë secili prej tyre, nëse pjesët e punëtorit të parë dhe të dytë sillen sikur 4 : 5, ndërsa pjesët e punëtorit të tretë me të parë sillen sikur 2 : 3?

## SHEMBULLI 5

Andrej, Jusufi dhe Ivani janë në moshë prej 5, 8 dhe 12 vjet. Ata e kanë ndarë shumën prej 122 500 denarë në përpjesëtim të zhdrejtë me vitet e tyre. Nga sa denarë fitoi secili prej tyre?

Shuma prej 122 500 denarësh duhet të ndahet në tri pjesë, të cilët do të jenë në përpjesëtim $\frac{1}{5} : \frac{1}{8} : \frac{1}{12}$.

Nëse pjesët i shënojmë me $x, y$ dhe $z$, atëherë $x : y : z = \frac{1}{5} : \frac{1}{8} : \frac{1}{12}$ gjegjësisht $x : y : z = 24 : 15 : 10$.

Nga këto gjejmë se $x = 24k$, $y = 15k$ dhe $z = 10k$

Nga kushti $x + y + z = 122\ 500$, fitojmë se $24k + 15k + 10k = 122\ 500$, $49k = 122\ 500$, $k = 2500$. Kështu, pjesët në të cilat duhet të ndahet shuma janë

$x = 24k = 24 \cdot 2500 = 60\ 000$, $y = 15k = 15 \cdot 2500 = 37\ 500$ dhe $z = 10k = 10 \cdot 2500 = 25\ 000$.

Andrej fitoi 60 000 denarë, Jusufi fitoi 37 500 denarë dhe Ivani fitoi 25 000 denarë.

## DETYRA 5

Tri komuna ndërtuan një teren sportiv të përbashkët. Harxhimet për ndërtimin kushtuan 25 800 000 denarë. Njëra komunë është 3 km larg terrenit sportiv, e dyta 4 km, ndërsa e treta 7,5 km. Harxhimet për ndërtim i ndanë në përpjesëtim të zhdrejtë me largesën nga tereni. Nga sa denarë ka paguar secila komunë?

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Ndajeni numrin 1860 në tri pjesë, të cilat janë:
   a) në përpjesëtim të drejtë me numrat 2, 3 dhe 5 b) në përpjesëtim të zhdrejtë me numrat 2, 3 dhe 5.
2. Një lloj bronzi është legurë nga bakri, zinku dhe plumbi të cilët janë në raport 65 : 34 : 3. Sa është masa e secilit metal në bronzin me masë prej 456 kilogramë?

3. Shuma prej 27 200 denarësh t'iu ndahet tre personave në përpjesëtim të drejtë me moshën e tyre e cila është 20 vjet, 32 vjet dhe 40 vjet. Nga sa denarë do të fitojë secili prej tyre?

4. Shuma prej 1 092 000 denarësh t'iu ndahet tri kompanive, ashtu që secila kompani pasuese do të fitojë 20% më shumë nga e mëparshmja. Nga sa denarë do të fitojë secila prej kompanive?

5. Shuma prej 135 500 denarësh t'iu ndahet tre personave, ashtu që secili person pasues do të fitojë 10% më pak nga i mëparshmi. Nga sa denarë do të fitojë secili person?

6. Ndani numrin 1080 në tri pjesë, të cilët sillen sikur $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{6}$.

7. Maria përgatiti një drekë familjare për të cilën harxhoi 2820 denarë. Edhe atë harxhimet për përgatitjen e supës, ushqimit kryesor dhe sallatës sillen sikur $5 : 8\frac{1}{3} : 6{,}25$. Njehsoni harxhimet për përgatitjen e supës, ushqimit kryesor dhe sallatës.

8. Në garat shtetërore për matematikë Bojani fitoi 85 pikë dhe ishte i pesti, Majlinda fitoi 81 pikë dhe ishte e gjashta, ndërsa Marku fitoi 77 pikë dhe ishte i shtati. Komisioni vendosi t'iu ndajë 33 200 denarë në përpjesëtim të drejtë me numrin e pikëve të fituara. Nga sa para ka fituar si dhuratë secili prej nxënësve?

9. Për një shkollë janë dhuruar 15 600 euro për punë ndërtimore të kulmit, rrethojës dhe sallës së sportit. Mjetet e dhuruara për ndërtimin e kulmit dhe për ndërtimin e rrethojës janë në raport 4 : 5, ndërsa mjetet e dhuruara për ndërtimin e rrethojës dhe për ndërtimin e sallës së sportit janë në raport 6 : 7. Sa mjete janë dhuruar për secilën punë ndërtimore?

## 1.14. Njehsimi i përzierjeve

### AKTIVITET

Çmimi i djathit në një market është 660 denarë për një kilogram, në një market tjetër është 680 denarë për një kilogram, ndërsa në një market të tretë është 720 denarë për një kilogram.

Sa është çmimi mesatar i djathit për një kilogram?

Llogaritja e përzierjeve kur me përzierjen e dy ose më shumë lloje mallrash fitohet një lloj i ri me karakteristika të caktuara. Gjatë përzierjes së mallrave, nëse njihen çmimet e mallrave të cilat përzihen dhe çmimin e mallit të përzier, mund të përcaktojmë raportin në të cilin duhet të përzihen mallrat. Principi bazë gjatë përzierjes së mallrave me cilësi të ndryshme është që gjatë shitjes së mallit të përzier të fitohet në vlerë po aq sa do të fitohet nëse malli nuk do të përzihet dhe do të shitet me çmimin e mëparshëm.

### SHEMBULLI 1

Janë dhënë mallra të cilësive të ndryshme, njëri me çmim prej 48 denarësh për një kilogram dhe tjetri me çmim prej 30 denarësh për një kilogram. Në treg kërkohen 360 kilogramë mall me cilësi që të shitet për 40 denarë për një kilogram. Nga sa kilogramë duhet të merret prej çdo malli?

Të shënojmë me $x$ sasinë e kërkuar për mallin i cili shitet me çmim prej 48 denarë për një kilogram, ndërsa me y sasinë e kërkuar për mallin i cili shitet me çmim prej 30 denarë për një kilogram.
Atëherë kemi që

$$48x + 30y = 40(x + y)$$
$$48x - 40x = 40y - 30y$$
$$8x = 10y$$
$$x : y = 10 : 8$$

Kjo do të thotë që 10 kilogramë i mallit $x$ duhet të përzihet me 8 kilogramë të mallit $y$.

Me zbatimin e vetive të përpjesëtimit kemi që $x = 10k$ dhe $y = 8k$.

Nga kushti për sasinë e kërkuar të mallit fitohet që $10k + 8k = 360$, $18k = 360$, $k = 20$.

Nga këtu gjejmë që $x = 10k = 10 \cdot 20 = 200$ dhe $y = 8k = 8 \cdot 20 = 160$.

Duhet të merren 200 kilogramë të mallit i cili shitet me çmim prej 48 denarësh për një kilogram dhe 160 kilogramë të mallit i cili shitet me çmim prej 30 denarësh për një kilogram.

### SHEMBULLI 2

Nga sa gramë ar duhet të merret nga objekte të arit me pastërti prej 80% dhe 90% për t'u fituar 115 gramë ar me pastërti 86%?

Le ta shënojmë me x sasinë e kërkuar të arit nga objekti me pastërti prej 80%, ndërsa me y sasinë e kërkuar të arit nga objekti me pastërti prej 90%. Atëherë kemi që

$$\frac{80}{100}x + \frac{90}{100}y = \frac{86}{100}(x + y)$$
$$80x + 90y = 86(x + y)$$
$$80x - 86x = 86y - 90y$$
$$6x = 4y$$
$$x : y = 4 : 6$$

Me zbatimin e vetive të përpjesëtimeve kemi që $x = 4k$ dhe $y = 6k$.

Nga kushti për sasinë e kërkuar të arit fitohet që $4k + 6k = 115$, $10k = 115$, $k = 11{,}5$.

Nga këtu gjejmë që $x = 4k = 4 \cdot 11{,}5 = 46$ dhe $y = 6k = 6 \cdot 11{,}5 = 69$.

Nga kjo duhet të merren 46 gramë ar nga objekti me pastërti prej 80% dhe 69 gramë nga objekti me pastërti prej 90%.

### DETYRA 1

Në një barnatore bimore shitet çaj prej kamomili me çmim prej 75 denarë për një kilogram dhe çaj prej mendre me çmim prej 55 denarë për një kilogram. Për nevojat e barnatores është bërë një përzierje prej të dy llojeve të çajit. Nga sa kilogramë duhet të merren prej çdo lloji të çajit që të fitohen 120 kilogram përzierje e cila do të shitet me çmim prej 68 denarë për një kilogram?

### SHEMBULLI 3

Le të jenë dhënë tri cilësi mallrash të cilat shiten me 40, 44 dhe 50 denarë për një kilogram. Me përzierjen e këtyre tre kualitete mallrash duhet të fitohen 480 kilogramë mall që do të shitet me 45 denarë

për një kilogram dhe gjithashtu të ketë sasi të njëjtë mallrash nga dy cilësitë e para. Nga sa kilogramë duhet të merret nga çdo mall?

Le t'i shënojmë me $x$, $y$ dhe $z$ sasitë e kërkuara të mallrave të cilët shiten me çmim prej 40, 44 dhe 50 denarë për një kilogram. Atëherë kemi që

$$40x + 44y + 50z = 45(x + y + z)$$
$$40x + 44y + 50z = 45x + 45y + 45z$$
$$5z = 5x + y$$

Nga kushti në detyrë, të kenë sasi të njëjtë mallrat e dy cilësive të para, vendosjmë $x = y$.
Kështu fitojmë që $5z = 6y$ dhe $5z = 6x$, që do të thotë se $z : y = 6 : 5$ dhe $z : x = 6 : 5$
prej nga e fitojmë përpjesëtimin e zgjeruar $x : y : z = 5 : 5 : 6$.

Me zbatimin e vetive të përpjesëtimeve të zgjeruara kemi që $x = 5k$, $y = 5k$ dhe $z = 6k$.

Nga kushti i sasisë së kërkuar të mallit kemi që $5k + 5k + 6k = 480$, $16k = 480$, $k = 30$.

Nga këtu gjejmë që $x = 5k = 5 \cdot 30 = 150$, $y = 5k = 5 \cdot 30 = 150$ dhe $z = 6k = 6 \cdot 30 = 180$.

Nga kjo, duhet të merren 150 kilogramë nga malli që shitet me çmim prej 40 denarë për një kilogram, po aq nga malli që shitet me çmim prej 44 denarë për një kilogram dhe 180 kilogramë nga malli që shitet me çmim prej 50 denarë për një kilogram.

## SHEMBULLI 4

Le të jenë dhënë 75%, 25% dhe 15% tretje ujore në acidit acetik. Me përzierjen e të tri tretjeve ujore në acidin acetik duhet të fitohen 98 litra tretje ujore në acidin acetik me koncentrim prej 35% ashtu që të përmbajë sasi të njëjtë prej 75% dhe 25% tretje ujore të acidit acetik. Nga sa litra duhet të merren prej secilit lloj tretjeje ujore?

Le t'i shënojmë me $x$, $y$ dhe $z$ sasitë e kërkuara të tretjes ujore me koncentrim prej 75%, 25% dhe 15%, përkatësisht. Atëherë kemi që

$$\frac{75}{100}x + \frac{25}{100}y + \frac{15}{100}z = \frac{35}{100}(x + y + z)$$
$$75x + 25y + 15z = 35x + 35y + 35z$$
$$2z = 4x - y$$

Për shkak të kushtit të detyrës, për të pasur sasi të njëjtë nga dy tretjet ujore të para, vendosjmë $x = y$. Ashtu fitojmë që $2z = 3y$ dhe $2z = 3x$, nga rrjedhë që $z : y = 3 : 2$ dhe $z : x = 3 : 2$
prej nga e fitojmë përpjesëtimin e zgjeruar $x : y : z = 2 : 2 : 3$.

Me zbatimin e vetive të përpjesëtimit të zgjeruar kemi që $x = 2k$, $y = 2k$ dhe $z = 3k$.

Nga kushti për sasinë e kërkuar të tretjes ujore fitohet që $2k + 2k + 3k = 98$, $7k = 98$, $k = 14$.

Nga këtu gjejmë që $x = 2k = 2 \cdot 14 = 28$, $y = 2k = 2 \cdot 14 = 28$ dhe $z = 3k = 3 \cdot 14 = 42$.

Nga kjo, për t'u fituar 98 litra prej 35% tretje ujore në acidin acetik, duhet të përzihen 28 litra me 75% tretje ujore, 28 litra me 25% tretje ujore dhe 42 litra me 15% tretje ujore në acidin acetik.

## DETYRA 2

Dymbëdhjetë litra 20% tretje alkoolike përzihet me 15 litra 15% tretje alkoolike dhe 10 litra 25% tretje alkoolike. Sa përqind tretje alkoolike fitohet?

### DETYRA PËR USHTRIME

1. Në një shkollë pesha mesatare e djemve është 54 kilogramë, ndërsa e vajzave 48 kilogramë. Gjeni numrin e djemve dhe vajzave në klasën prej 30 nxënësve me peshë mesatare 51,6 kilogramë.
2. Përzihen dy varietete bizelesh me nga 180 dhe 250 denarë për një kilogram për tu fituar i cili do të kushtojë 200 denarë për një kilogram. Në çfarë raporti duhet të përzihen të dy varietetet për tu fituar përzierje e çmimit të kërkuar?
3. Sa litra 40% tretësirë alkoolike duhet të përziejmë me 100% alkool në mënyrë që të fitohen 52 litra 70% tretje alkoolike?
4. Në një enë janë përzier 10 litra ujë i nxehtë 90°C, 14 14 litra ujë i nxehtë 72°C dhe 20 litra ujë i nxehtë 45°C. Sa është temperatura e përzierjes së fituar?
5. Një artar përzien argjend me pastërti 60% dhe argjend me pastërti 90% dhe fiton 600g argjend me pastërti 85%. Nga sa gramë duhet të marrë nga çdo lloj i argjendit?
6. Përzihen dy varietete groshe me nga 180 dhe 250 denarë për një kilogram që të fitohet groshë me çmim 200 denarë për një kilogram. Në çfarë raporti duhet të përzihen të dy varietetet për tu fituar përzierja me çmimin e kërkuar?
7. Një shitore ka tre varietete kafeje: 5 kilogramë me nga 25 denarë, 7 kilogramë me nga 30 denarë dhe 6 kilogramë me nga 35 denarë. Sa do të jetë çmimi i kafesë që do të fitohet me përzierjen e të tre varieteteve?
8. Përzihen tre lloje tretjesh alkoolike: 5 litra me fortësi prej 45%, 8 litra me fortësi prej 33% dhe 15 litra me fortësi prej 20%. Sa është fortësia e tretësirës së fituar?

## 1.15. Njehsimi i interesit

Paga dhe shtesat e pagës, pensionet, kursimet, më së shpeshti janë mjete monetare të cilat i janë dhënë nga qytetarët bankës për një periudhë të caktuar kohore. Gjithashtu, shpesh herë qytetarët kanë nevojë të marrin hua mjete monetare nga banka, për një periudhë të caktuar kohore. Në të dyja rastet, për shkak të shfrytëzimit të mjeteve monetare, paguhet një përqindje e caktuar e shumës.

Nëse depozitohen mjete në bankë, banka është **debitori**, kurse depozituesi është **kreditori**. Nëse, nga ana tjetër, merret kredi, atëherë banka është kreditori, kurse përdoruesi i kreditit është debitori.

**Interesi** (**kamata**) përfaqëson vlerën e përqindjes së shumës së depozituar, pra të shumës së marrë hua, si kompensim monetar që debitori i paguan kreditorit, pra si çmim për shfrytëzimin e shumës së marrë hua. Interesi mund të llogaritet për ditë, muaj, vit, etj. Ne do të llogarisim me normë vjetore të interesit.

Shuma e depozituar, pra e shumës së marrë hua, quhet **kapital** ose **vlerë bazë**.

Periudha për të cilën është depozituar shuma e parave, pra për të cilën është marrë hua shuma e parave është **koha** për të cilën llogaritet interesi.

Lartësia e interesit që realizohet për njësi kohe është në përpjesëtim me kapitalin, pra përfaqëson një përqindje të kapitalit, të quajtur **normë interesi**.
Sipas mënyrës se si llogaritet interesi dallojmë **llogaritje me interes të thjeshtë** dhe **llogaritje me interes të përbërë**.

## Llogaritja me interes të thjeshtë

### AKTIVITET

Ilina i ka huazuar Dimitrit 10 000 denarë. Gjatë kësaj, ata janë marrë vesh që Dimitri ta kthejë huanë për 1 vit, dhe si kompensim t'i paguajë 15% shtesë të parave të huazuara.
Sa para Dimitri duhet t'i kthejë Ilinës?

Le të supozojmë se kemi depozituar 30 000 denarë me 4% normë interesi të thjeshtë për një periudhë 5 vjeçare. Çdo vit do të marrim 4% të 30 000 denarëve të depozituara, pra 4% e $30\,000 = \frac{4}{100} \cdot 30\,000$.
Kështu për 5 vjet do të marrim interes prej $\frac{4}{100} \cdot 30\,000 \cdot 5 = 6000$ denarë.

Interesin e shënojmë me $i$ dhe e llogarisim me formulën: $i = \frac{Kpt}{100}$, ku $K$ është kapitali, $p$ është norma e interesit, kurse $t$ është koha për të cilën i kemi depozituar parate.

### SHEMBULLI 1

Jusufi depozitoi 200 000 denarë në bankë për 3 vjet dhe mori interes në shumë prej 18 000 denarë. Llogarit normën e thjeshtë të interesit.

Sipas kushtit në detyrë, kapitali $K = 200\,000$ denarë, koha $t = 3$ vjet dhe interesi $i = 18\,000$ denarë.
Sipas formulës për llogaritjen e interesit kemi:

$$18\,000 = \frac{200\,000 \cdot p \cdot 3}{100}$$
$$18\,000 = 6000 \cdot p$$
$$p = 3\%.$$

Siç mund të vërenit nga shembujt, interesi i thjeshtë llogaritet vetëm mbi kapitalin.

### DETYRA 1

a) Sa interes do të sjellë një kapital prej 34 500 denarësh, të depozituar në bankë për një kohë prej 4 vitesh, me normë interesi 8%?
b) Cila shumë e depozituar do të sjellë interes prej 9600 denarësh, për një kohë prej 8 vitesh, me normë interesi 5%?
c) Sa vjet duhet të jetë depozituar kapitali bazë prej 54 000 denarësh, që banka të paguajë interes prej 6480 denarësh, me normë interesi 6%?

## Llogaritja me interes të përbërë

Nëse interesin që e sjell kapitali për një kohë të caktuar e shtojmë te kapitali, në mënyrë që edhe interesi të sjellë interes, atëherë themi se bëhet fjalë për **llogaritje me interes të përbërë**.

Nëse depozitojmë një shumë prej 2000 denarësh me normë interesi të përbërë prej 3%, atëherë në fund të vitit do të marrim interes 3% e 2000 denarëve $\frac{3}{100} \cdot 2000 = 60$ denarë.

Pra, në fund të vitit të parë do të kemi $2000 + 60 = 2060$ denarë.

Pas vitit të dytë do të marrim 3% e 2060 denarëve $\frac{3}{100} \cdot 2060 = 61{,}80$ denarë.

Në fund të vitit të dytë do të kemi $2060 + 61{,}80 = 2121{,}80$ denarë.

Pas vitit të tretë do të marrim 3% e $2121{,}80 = 63{,}65$ denarë që do të thotë se shuma totale do të jetë 2185,45 denarë, kurse interesi i realizuar 185,45 denarë, pra 185 denarë të rrumbullakuar në numër të plotë.

### SHEMBULLI 2

Kristina depozitoi 10 000 denarë me normë interesi të përbërë prej 10%. Sa para do të ketë Kristina pas tre vjetësh?

Sipas kushteve në detyrë kemi që $K = 10\,000$ denarë, $p = 10\%$ dhe $t = 3$ vjet. Në fund të vitit të parë do të kemi interes $i = \frac{Kpt}{100} = \frac{10\,000 \cdot 10 \cdot 1}{100} = 1000$ denarë.

Vlera që do të interesohet në vitin e dytë është $10\,000 + 1000 = 11\,000$.

Në fund të vitit të dytë do të kemi interes $\frac{11\,000 \cdot 10 \cdot 1}{100} = 1100$ denarë.

Vlera që do të interesohet në vitin e tretë është $11\,000 + 1100 = 12\,100$ denarë.

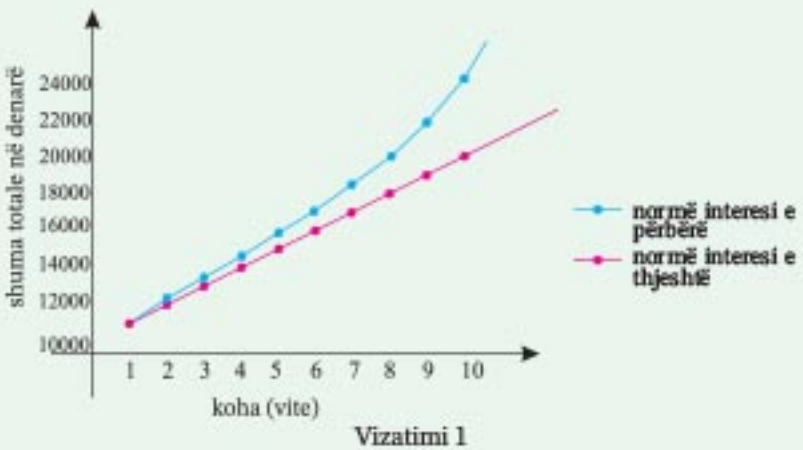
Në fund të vitit të tretë do të kemi interes $\frac{12\,100 \cdot 10 \cdot 1}{100} = 1210$ denarë.

Shuma totale në fund të vitit të tretë është $12\,100 + 1210 = 13\,310$ denarë.

Pra, për 3 vjet Kristina do të mund të tërheqë gjithsej 13 310 denarë.

Në vizatimin 1 është dhënë një krahasim i rritjeve të një shume të depozituar prej 10 000 denarësh me 10% normë interesi të thjeshtë dhe të përbërë.

Kur kapitali, norma e interesit dhe koha janë të njëjta, vlera e kapitalit e llogaritur me normë interesi të përbërë do të jetë më e madhe se vlera e kapitalit e llogaritur me normë interesi të thjeshtë.




Vizatimi 1

Ka përjashtim kur shuma e interesit llogaritet vetëm për një vit, në atë rast vlerat e marra me normë interesi të përbërë dhe normë interesi të thjeshtë do të jenë të barabarta.

## AKTIVITET

Nevojiten shumë llogaritje për të përcaktuar vlerën e kapitalit të marrë me normë interesi të përbërë. Por ekziston edhe një mënyrë më e shpejtë. Shqyrtoni dhe shpjegoni llogaritjet në kolonën e tretë të tabelës në vijim:

| Vite | Vlera e kapitalit me 10% normë interesi të përbërë e llogaritur pas çdo viti | Vlera e kapitalit me 10% normë interesi të përbërë e llogaritur me shumëzues pas çdo viti |
|---|---|---|
| 1 | 11 000 | $10\,000 \cdot (100\% + 10\%) = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}1) = 10\,000 \cdot (1{,}1)^1 = 11\,000$ |
| 2 | 12 100 | $10\,000 \cdot (1{,}1)^2 = 12\,100$ |
| 3 | 13 310 | $10\,000 \cdot (1{,}1)^3 = 13\,310$ |
| 4 | 14 641 | $10\,000 \cdot (1{,}1)^4 = 14\,641$ |

Vlerën e kapitalit me normë interesi të përbërë e llogarisim me formulën:

$$K_n = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$K_n$ është vlera e përftuar e kapitalit, $K$ është kapitali, $p$ është norma e interesit dhe $n$ është numri i viteve.

## SHEMBULLI 3

Janë depozituar 15 000 denarë me 5% normë interesi të përbërë. Sa shumë do të përftohet pas 6 vitesh?

Sipas kushteve në detyrë kemi që $K = 15\,000$ denarë, $p = 5\%$, $n = 6$ vjet.

Nga formula për llogaritjen e vlerës së kapitalit marrim

$K_6 = K\left(1 + \frac{5}{100}\right)^6 = 15\,000 \cdot 1{,}05^6$ Llogarisim me kalkulator.

$= 15\,000 \cdot 1{,}3401 = 20\,101{,}5$ denarë Rrumbullakojmë në 4 shifra dhjetore.

Pas 6 vjetësh do të përftohet shumë prej 20 102 denarësh, e rrumbullakuar në numër të plotë.

## DETYRA 2

Janë depozituar para me normë interesi të përbërë prej 4%. Pas 7 vitesh u rrit në 30 000 denarë. Sa është shuma fillestare e depozituar?

## Llogaritja e normës së interesit të përbërë me periudhë të ndryshme interesi

Shpesh herë, interesi kryhet edhe për periudha më të vogla se një vit. Interesi mund të jetë mujor, çdo tre muaj (tremujor), çdo gjashtë muaj (gjysmëvjetor ose semestral) etj.

Për llogaritjen e vlerës me periudhë të ndryshme interesi, le të përdorim formulën:

$$K_{m,n} = K\left(1 + \frac{p}{100 \cdot m}\right)^{m \cdot n}$$

$K_{m,n}$ është vlera e përftuar e kapitalit për një periudhë prej $n$ vitesh, $K$ është kapitali, $p$ është norma e interesit, $m$ është numri i intereseve në vit, dhe $n$ është numri i viteve.

### SHEMBULLI 4

Çfarë shume do të përfitohet nëse depozitohen 100 000 denarë për 9 vjet me normë interesi të përbërë 3%, nëse interesi është gjysmëvjetor?

*Kemi që* $K = 100\,000$ denarë, $p = 3\%$, $n = 9$ vjet dhe $m = 2$.
Nga formula për llogaritjen e vlerës së kapitalit fitojmë

$$K_{2,9} = 100\,000\left(1 + \frac{3}{100 \cdot 2}\right)^{2 \cdot 9} = 100\,000 \cdot 1{,}015^{18} = 130\,734{,}6 \text{ denarë.}$$

Pas 9 vitesh do të përfitohet shumë prej 130 734 denarësh, të rrumbullakuar në numër të plotë.

### DETYRA 3

Çfarë shume përfitohet nëse depozitohen 130 000 denarë për 2 vjet me normë interesi të përbërë 9%, nëse interesi është tremujor?

### DETYRA PËR USHTRIME

1. Në një bankë lartësia e normës së thjeshtë të interesit është 12%. Sa do të jetë shuma e interesit që duhet paguar për një depozitë kursimi prej 5000 denarësh pas përfundimit të 3 viteve?
2. Shenoli depozitoi 150 000 denarë me 3% normë interesi të thjeshtë. Pas disa vjetësh shuma e tij fillestare u rrit në 177 000 denarë. Për sa vjet i ka depozituar paratë në bankë?
3. Hana mori një kredi prej 2000 euro për të pajisur shtëpinë e re. Banka caktoi 3% normë interesi të thjeshtë. Sa para gjithsej duhet t'i kthejë bankës pas 3 viteve?
4. Llogarit borxhin total për një kredi banese prej 40 000 euro pas 10 vjetësh me 4% normë interesi të përbërë.
5. Një hua prej 80 000 denarësh merret për dy vjet me12% normë interesi. Llogaritni sa duhet kthyer gjithsej nëse llogaritja bëhet me:
   a) normë interesi të thjeshtë  b) normë interesi të përbërë?
6. Dino duhet të marrë një kredi prej 360 000 denarësh për 3 vjet. Mund të marrë kredi me normë interesi të përbërë prej 3,5% ose me normë interesi të thjeshtë prej 3,7%? Me cilën zgjedhje paguhet më pak shumë interesi?
7. Cila shumë përftohet nëse depozitohen:
   a) 73 000 denarë për 3 vjet me 7% normë interesi të përbërë dhe interesi gjysmëvjetor?
   b) 10 300 denarë për 5 vjet me 4% normë interesi të përbërë dhe interesi tremujor?
   c) 15 000 denarë për 10 vjet me 5% normë interesi të përbërë dhe interesi mujor?
8. Sa duhet paguar për një borxh prej 35 000 denarësh në një kartë krediti pas 2 vjetësh, nëse norma e interesit të përbërë është:
   a) 13,5% dhe llogaritet në nivel vjetor  b) 13,5% dhe llogaritet në nivel gjysmëvjetor?
9. Uroshi ka investuar kursimet e tija në një llogari me 6% normë interesi të përbërë që llogaritet çdo gjashtë muaj. Nëse ka vendosur 63 000 denarë në këtë llogari, sa denarë do të ketë pas dy vjetësh?

**HULUMTIM**

Zgjidhni problemin: "Kredi prej 10 000 euro".

a) Hulumtoni në internet, mblidhni të dhëna për llojin e kredive dhe normat e interesit që ofrojnë bankat në vendin tonë.

b) Përcaktoni nga cila bankë është më e volitshme të merret një kredi prej 10 000 euro.

# DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM

1. A është e zbrazur bashkësia:
   a) $B = \{x \mid x$ është numër i thjeshtë çift$\}$
   b) $C = \{x \mid x$ është shtet i cili ndodhet në jug të polit të jugut$\}$
   c) $D = \{x \mid x$ është katërkëndësh me dy kënde jokonvekse$\}$

2. Janë dhënë nënbashkësitë e ngjyrave të një pako standarde letrash:
   $A = \{$diamant, gjethe, dyllë, zemër$\}$, $B = \{$diamant, gjethe$\}$, $C = \{$dyllë, zemër$\}$ dhe $D = \{$dyllë$\}$.
   Shprehni në mënyrë simbolike marrëdhënien ndërmjet bashkësive të mëposhtme.
   a) Bashkësia A dhe bashkësia C
   b) Bashkësia D dhe bashkësia C
   c) Bashkësia B dhe bashkësia C

3. Le të jetë $R = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6\}$ një bashkësi robotësh dhe le të jetë
   $T = \{$navigim, ngritje, skanim, sortim, montim, testim$\}$ bashkësia e detyrave që mund t'i kryejnë robotët.
   a) Shpërndani secilin robot në saktësisht një detyrë. b) A vlen $R \sim T$?

4. Janë dhënë bashkësitë $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ dhe $B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$.
   Gjeni bashkësinë $X$ ashtu që $A \cap X = \{3, 5\}$ dhe $B \cup X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

5. Me ndihmën e diagramit të Venit, gjeni bashkësitë $A$ dhe $B$, nëse $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{4, 5\}$ dhe $A \setminus B = \{1, 3\}$.

6. Janë dhënë bashkësia universale $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ dhe dy nënbashkësi të saja: $A = \{2, 4, 6, 8\}$ dhe $B = \{2, 3, 5, 7\}$.
   a) Kontrolloni nëse barazitë $(A \cup C)^c = A^c \cap B^c$ dhe $(A \cap C)^c = A^c \cup B^c$ janë të sakta.
   b) Vizatoni diagramin e Venit për bashkësitë: $(A \cup C)^c$, $A^c \cap B^c$, $(A \cap C)^c$ dhe $A^c \cup B^c$

7. Janë dhënë bashkësitë: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $B = \{2, 4, 6, 8\}$ dhe $C = \{3, 4, 5\}$. Gjeni numrin kardinal:
   a) $k(A)$ b) $k(B)$ c) $k(C)$ ç) $k(A \cup B)$ d) $k(A \cap C)$
   dh) $k(A \setminus C)$ e) $k(B \cup C)$ ë) $k(B \setminus C)$ f) $k(A \cup B \cup C)$ g) $k(A \cap B \cap C)$

8. Në një klasë ka 36 nxënës. Nga ata, 30 kanë telefon celular ($T$), 28 kanë kalkulator ($K$), dhe 2 nxënës nuk kanë as telefon celular as kalkulator. Sa nxënës kanë telefon celular dhe kalkulator?

9. Një studim tregoi se 21 të anketuar e blenë produktin $A$, 26 e blenë produktin $B$ dhe 29 e blenë produktin $C$. Nëse 14 të anketuar i blejnë produktet $A$ dhe $B$, 12 i blejnë produktet $A$ dhe $C$, 14 i blejnë produktet $B$ dhe $C$, ndërsa 8 të anketuarit i blejnë të tre produktet, sa të anketuar e blejnë vetëm produktin $C$?

10. Në olimpiadën shkollore u ndanë 38 medalje në futboll ($F$), 15 medalje në basketboll ($B$) dhe 20 medalje në hendboll ($H$). Medaljet i fituan 58 nxënës dhe 3 nxënës fituan medalje në të tre sportet. Sa nxënës fituan medalje në saktësisht dy nga tre sportet?

11. Një zinxhir mishtoresh anketoi 1000 klientë. Nga ata, 720 deklaruan se blejnë mish lope, kurse 450 thanë se blejnë mish derri. Të paktën sa blerës blejnë mish lope dhe mish derri?

12. Shkruani të gjitha çiftet e renditura të numrave $(a, b)$, të tillë që a është numër i thjeshtë nga dhjetëshja e dytë, dhe $b = a + 3$.

13. Një kompani testoi 3 pajisje. Çdo pajisje u testua me 2 sisteme operative.
    a) Shkruani bashkësinë $D \times O$, nëse $D = \{\text{telefon, tablet, laptop}\}$ dhe $O = \{\text{Android, Linuks}\}$.
    b) Sa testime ka kryer kompania?

14. Anita ka 72 litra lëng portokalli dhe 90 litra lëng limoni. Ajo dëshiron t'i derdhë lëngjet në disa shishe me kapacitet të barabartë pa mos i ngelur lëng anash. Cili është kapaciteti më i madh i mundshëm i shisheve?

15. Në një tunel pulsuan njëkohësisht tre sinjale dritash. Sinjali i parë pulsues pulson çdo 12 sekonda, i dyti pulson çdo 18 sekonda, kurse i treti çdo 30 sekonda. Pas sa sekondash do të pulsojnë sërish së bashku?

16. Isaku, Pjetri dhe Gorasti kanë hapa 60 cm, 65 cm dhe 70 cm të gjatë. Ata nisen njëkohësisht, nga i njëjti vend dhe në të njëjtin drejtim. Në çfarë distance është pika e parë tek e cila secili prej tyre bën një numër të plotë hapash?

17. Krahasoni numrat: a) $|-7|$ dhe $|-10|$ b) $|-25|$ dhe $|4|$ c) $|0|$ dhe $|-8|$ ç) $|12|$ dhe $|-100|$

18. Një hulumtues shënoi se një shpellë nënujore ndodhet në -30 metra lartësi mbidetare, maja e një kodre ndodhet në 120 metra lartësi mbidetare, sipërfaqja e një liqeni ndodhet në 0 metra lartësi mbidetare dhe një laborator nëntokësor në −12 metra lartësi mbidetare.
    Radhitni lartësitë mbidetare nga më e ulëta te më e larta.

19. Arifi në llogari kishte 3 600 denarë, por duhet të paguajë faturën e energjisë elektrike 2 860, faturën e ujit 670 dhe faturën e telefonit 1 340 denarë.
    a) Sa denarë do të jetë gjendja e llogarisë së Arifit pas pagesës së faturave?
    b) A do të jetë e mjaftueshme të depozitojë 1 500 denarë në llogari për të mos qenë në minus?

20. Llogaritni:

a) $\dfrac{3\frac{1}{5} \cdot 7\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{5} - 2\frac{7}{30}}$ b) $\dfrac{\frac{2}{3}}{12} + \dfrac{5}{\frac{3}{6}} - \dfrac{2 + \frac{1}{3}}{3 - \frac{2}{5}}$ c) $\dfrac{\left(6\frac{3}{5} - 3\frac{3}{14}\right) \cdot 5\frac{5}{6}}{(21 - 1{,}25) : 2{,}5}$

**21.** Llogaritni:

a) $3{,}72 + 0{,}02 - 2{,}35$ b) $0{,}5 + 1{,}(5) - 2{,}3(7)$ c) $6{,}25 : 0{,}5 \cdot 0{,}01$

**22.** Për ndërtimin e një ure të vogël nevojiten 3,25 metra shufër çeliku për themelin, 2,6 metra për pjesët anësore dhe 1,85 metra për pjesën e sipërme.

a) Sa metra shufër çeliku nevojiten?

b) Sa copa shufër çeliku duhet të blihen nëse në shitje ka vetëm copa shufre çeliku me gjatësi 2,5 metra?

**23.** Orbita e një planeti ka rreze $r = 149{,}6$ milionë kilometra. Llogaritni përafërsisht gjatësinë e orbitës së planetit, nëse $\pi \approx 3{,}14$.

**24.** Bakteret mbijetojnë vetëm nëse temperatura është midis 5°C dhe 45°C.

a) Shkruaj intervalin e temperaturës së lejuar.

b) A do të mbijetojnë bakteret në temperaturën prej 5°C?

**25.** Një kuzhinieri i duhet 1 orë për të përgatitur përbërësit, 2 orë e 15 minuta për të gatuar ushqimin dhe 45 minuta për të pastruar. Përcakto raportin e kohës së nevojshme për përgatitjen e përbërësve ndaj kohës për gatim ndaj kohës për pastrim. Shkruaj zgjidhjen në formë të thjeshtuar.

**26.** Në një kuti ka 1160 topa të bardhë, të kuq dhe të kaltër. Sa topa ka nga secila ngjyrë, nëse numri i topave të bardhë dhe të kuq është në raport 5 : 6, ndërsa numri i topave të kuq dhe të kaltër është në raport 4 : 6?

**27.** Cilat nga madhësitë në vijim janë në përpjesëtim të drejtë, dhe cilat janë në përpjesëtim të zhdrejtë:

a) prodhimi i dy numrave dhe një shumëzuesi, nëse shumëzuesi tjetër është konstant,

b) vlera e thyesës dhe numëruesi i saj, nëse emëruesi i saj është konstant,

c) vlera e thyesës dhe emëruesi i saj, nëse numëruesi i saj është konstant.

**28.** Një firmë investon në panele diellore që sjellin të ardhura prej 120 000 denarë në muaj. Vitin e parë shpenzimet e mirëmbajtjes janë 25% e të ardhurave. Vitin e dytë ato ulen me 40%.

a) Sa denarë janë shpenzuar në muaj për mirëmbajtje vitin e parë?

b) Sa arrijnë shpenzimet vitin e dytë pas uljes?

c) Sa është rritja në përqindje e fitimit nga mirëmbajtja midis dy viteve?

**29.** Një kompani tregtare bleu 40 trotinete elektrike me çmim prej 32 000 denarë për një trotinet. Për shkak të problemeve teknike me baterinë, u detyrua t'i shiste me humbje prej 35%.

a) Me çfarë çmimi u shit çdo trotinet? b) Sa është humbja për copë?

c) Sa është humbja totale për të gjitha trotinetet?

**30.** Andrej importon një libër që kushton 80 euro. Për transport duhet të paguajë 10 euro. Sa duhet të paguajë kur të marrë librin nëse është i liruar nga pagesa e doganës, por norma e TVSH-së është 5%?

**31.** Nga një burim rrjedhin 100 litra ujë për 16 minuta. Sa litra ujë do të rrjedhin për $3\frac{2}{3}$ orë?

**32.** Një produkt kushton 350 dollarë në SHBA dhe 19 000 denarë në Maqedoni. Në cilin vend produkti është më i lirë?

33. Tre ekskavatorë me fuqi 160 kilovatë për 10 ditë, duke punuar nga 6 orë në ditë, mund të gërmojnë një kanal të gjatë 360 metra, të gjerë 4 metra dhe të thellë 2,5 metra. Një kanal çfarë gjatësi mund të gërmojnë 5 ekskavatorë me nga 120 kilovat, nëse punojnë 8 ditë nga 7 orë në ditë, dhe nëse kanali është i gjerë 3,5 metra dhe i thellë 2 metra?

34. Gjeji këndet e një katërkëndëshi, nëse ato janë në raport 2 : 5 : 4 : 7.

35. Tre persona duhet të ndajnë një trashëgimi prej 70 000 euro, në përpjesëtim të zhdrejtë me moshat që ka secili prej tyre. Nëse ata kanë, përkatësisht, 20, 30 dhe 40 vjet, sa nga prej trashëgimisë do të fitojë secili prej tyre?

36. Duam të përftojmë 3 litra tretësirë kripe 1.5%, dhe në dispozicion kemi tretësirë kripe 1.8% dhe tretësirë kripe 1.1%. Nga sa litra duhet të merren nga secila lloj tretësire?

37. Në fillim të dimrit shoferi në makinën e vet vendosi 2,5 litra antifriz të përzier me 2,5 litra ujë. Pas një muaji, 1 litër nga përzierja rrodhi, dhe shoferi këtë e kompensoi duke shtuar 1 litër ujë. Muajin tjetër, përsëri 1 litër nga përzierja rrodhi. Por, këtë herë shoferi shtoi 1 litër antifriz.
    a) A ka tani në përzierjen në rezervuar më shumë antifriz apo ujë?
    b) Cila do të ishte përgjigjja nëse shoferi herën e parë do të kishte shtuar 1 litër antifriz, dhe herën e dytë do të kishte shtuar 1 litër ujë?

38. Suzana fitoi nga investimi i saj një shumë prej 7000 denarë për 3 vjet. Sa para investoi ajo nëse norma e thjeshtë e interesit ishte 14.25%?

39. Ahmeti është pronar i një dyqani të vogël. Mori një kredi prej 185 000 denarësh për pajisje të reja. Të gjithë kredinë e ktheu pas dy vjetësh. Nëse banka ngarkoi një normë interesi të përbërë prej 15%, gjithsej sa ktheu Ahmeti pas dy vjetësh?

## Tema 2:

# SHPREHJET ALGJEBRIKE RACIONALE

**Me shtjellimin e kësaj teme do të aftësoheni:**

1. të zgjidhni probleme nga konteksti i përditshmërisë me fuqitë
2. të zbatoni rregullat për rregullimin e polinomeve në problemet STEM
3. të zbatoni operacionet me thyesat algjebrike për thjeshtimin e shprehjeve thyesore – racionale

02

# 2.1. Fuqia dhe vlera e fuqisë me tregues numër natyror

## Fuqia me tregues numër natyror

Shumën e mbledhësve të njëjtë mund ta shkruajmë si:

$10 + 10 = 2 \cdot 10$

$10 + 10 + 10 = 3 \cdot 10$

$10 + 10 + 10 + 10 = 4 \cdot 10$

.....

$\underbrace{10 + 10 + 10 + \ldots + 10}_{n \text{ herë}} = n \cdot 10$

Mbledhja e mbledhësve të njëjtë shpie në operacionin e **shumëzimit.**

Prodhimi i shumëzuesve të njëjtë shkruhet si:

$2 \cdot 2 = 2^2$

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$

.....

Shumëzimi i shumëzuesve të njëjtë shpie në operacionin e **fuqizimit.**

Për prodhimin e 5 shumëzuesve të barabartë me numrin 2 shkruajmë

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ lexojmë "2 në fuqinë 5" ose "2 në të pestën".

Treguesi i fuqisë 5 tregon sa herë baza 2 është shumëzuar me vetveten.

$4 \cdot 4 = 4^2$ lexojmë "4 në fuqinë 2" ose "4 në katror"

$6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$ lexojmë "6 në fuqinë 3" ose "6 në kub"



Prodhimi i $n$ shumëzuesve të njëjtë, secili prej të cilëve është numri real $a$, quhet **fuqi** me **bazë** $a$ dhe **tregues** (eksponent) **të fuqisë** $n$, dhe shënohet me $a^n$.

$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ herë}} = a^n$ lexojmë "a në fuqinë n" ose "$a$ në të $n$-tën"

Meqë secili prodhim ka të paktën dy faktorë, sipas përkufizimit të mësipërm, treguesi i fuqisë $n$ nuk është më i vogël se 2. E plotësojmë përkufizimin dhe me marrëveshje marrim $a^1 = a$. Në këtë kuptim, për shembull, $8^1 = 8$.

### SHEMBULLI 1

Shkruaj në formë të fuqisë prodhimin:

a) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$, b) $(-0{,}7) \cdot (-0{,}7) \cdot (-0{,}7)$, c) $x \cdot x \cdot x$, ç) $(-a) \cdot (-a)$.

a) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4$ prodhimi i 4 shumëzuesve të barabartë me numrin 7

b) $(-0{,}7) \cdot (-0{,}7) = (-0{,}7)^2$ prodhimi i 2 shumëzuesve të barabartë me numrin $(-0{,}7)$

c) $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5$ prodhimi i 5 shumëzuesve të barabartë me $x$

ç) $(-a) \cdot (-a) \cdot (-a) = (-a)^3$ prodhimi i 3 shumëzuesve të barabartë me $(-a)$

## DETYRA 1

Shkruaj treguesit e fuqisë dhe bazën e fuqisë:

a) $(-3)^6$ b) $\frac{2}{3}$ c) $(0{,}5)^3$ ç) $\left(-\frac{6}{11}\right)^7$ d) $(-x)^2$ dh) $(a+b)^5$

## DETYRA 2

Në katër ndeshje hendbolli numrin e përgjithshëm të golave për ekipin e tyre i realizuan 4 hendbollistë që dhanë nga 4 gola në secilën ndeshje.

a) Shkruaj në formë të fuqisë numrin e golave që i realizoi ekipi në secilën ndeshje.

b) Shkruaj në formë të fuqisë numrin e përgjithshëm të golave që i realizoi ekipi në katër ndeshje.

## Vlera e fuqisë

**Vlera e fuqisë** e cilitdo numri llogaritet ashtu që ajo shkruhet në formë të prodhimit, e më pas kryhet shumëzimi.

Llogaritjen e fuqisë mund ta kryejmë edhe me anë të kalkulatorit.

Për llogaritjen e fuqisë me tregues fuqie 2 (katror) dhe tregues fuqie 3 (kub) i shfrytëzojmë butonat $x^2$ dhe $x^3$.

Për llogaritjen e fuqisë me tregues fuqie të ndryshëm nga 2 (katror) ose 3 (kub) i përdorim butonat $x^{\blacksquare}$ ose $y^x$.

### SHEMBULLI 2

Llogarit vlerën e fuqisë: a) $2^4$ b) $(-3)^5$ c) $(-7)^2$ ç) $1^7$ d) $0^6$

a) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ ose me kalkulator [2] [$x^{\blacksquare}$] [4] [=]

Vërej se fuqia e numrit pozitiv është numër pozitiv.

b) $(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$ ose në kalkulator [(–)] [3] [$x^{\blacksquare}$] [5] [=]

Me siguri vërejte se fuqia e numrit negativ me tregues tek është numër negativ.

c) $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = 49$ ose me kalkulator [(–)] [7] [$x^2$] [=]

Llogaritëm vlerën e fuqisë së numrit negativ me tregues çift dhe fituam numër pozitiv.

ç) $1^7 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ d) $0^6 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

## AKTIVITET

Shkruaj fuqinë dhe llogarit vlerën e saj:

a) baza është 12 dhe treguesi 4, b) baza është – 7 dhe treguesi 3, c) baza është – 1,6 dhe treguesi 2.

A mund të nxjerrësh një përfundim për lidhjen mes shenjës së bazës dhe paritetit të fuqisë me shenjën e vlerës së fuqisë?



- Fuqia e numrit pozitiv është numër pozitiv, përkatësisht nëse $a > 0$, atëherë $a^n > 0$.
- Fuqia e numrit negativ me tregues çift është numër pozitiv, përkatësisht nëse $a < 0$, atëherë $a^{2k} > 0$ për $k \in \mathbb{N}$.
- Fuqia e numrit negativ me tregues tek është numër negativ, përkatësisht nëse $a < 0$, atëherë $a^{2k+1} < 0$, për $k \in \mathbb{N}$.
- Në veçanti, nëse $a = 1$, atëherë $a^n = 1$ dhe nëse $a = 0$, atëherë $a^n = 0$.

## DETYRA 3

Pa njehsuar, caktoni shenjën e fuqisë:

a) $25^5$ b) $(-16)^7$ c) $(-16)^3$ ç) $0^{81}$ d) 1.

Kontrolloni përfundimin tuaj me njehsim të vlerës së fuqisë me anë të kalkulatorit.

## SHEMBULLI 3

Llogaritni vlerën e shprehjes $(25^3 + 15^2) : (25 - 15)$, e më pas kontrolloni vlerën me anë të kalkulatorit.

Duhet të ndjekim rregullat me sa vijojnë:

Gjatë llogaritjes së vlerës së shprehjes numerike me kllapa, **përparësi kanë operacionet në kllapa.**

Gjatë llogaritjes së vlerës së shprehjes numerike me operacionet fuqizim, shumëzim, pjesëtim, mbledhje, zbritje, fillimisht e kryejmë **fuqizimin**, më pas **shumëzimin** dhe **pjesëtimin** dhe në fund **mbledhjen** dhe **zbritjen.**

$$(25^3 + 15^2) : (25 - 15) = (15625 + 225) : 10$$
$$= 15850 : 10 = 1585$$

Për të njehsuar me kalkulator në një hap duhet të përdorim kllapat:

( 2 5 $x^3$ + 1 5 $x^2$ ) ÷ ( 2 5 − 1 5 ) =

## DETYRA 4

Planeti Mars është planeti i katërt në Sistemin Diellor. Diametri i planetit është përafërsisht 94 kilometra. Shkruani fuqinë në formën e prodhimit dhe llogaritni atë. Sa kilometra është diametri i Marsit?

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Shkruani në formë të fuqisë prodhimet:
   a) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ b) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ c) $t \cdot t \cdot t \cdot t \cdot t$
   ç) $a \cdot a \cdot a$ d) $(-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdot (-a)$ dh) $d \cdot e \cdot e \cdot d \cdot d \cdot e$
2. Me kalkulator njehsoni:
   a) $7^2$ b) $2^7$ c) $4^3$ ç) $(-7)^8$ d) $0^8$ dh) $(-2)^5$ e) $0{,}2^2$

3. Caktoni shenjën e fuqisë: a) $25^{35}$ b) $(-16)^{54}$ c) $(-16)^{23}$ ç) $0^{81}$ d) $\left(-\frac{4}{7}\right)^{21}$

4. Rrethoni çka është e saktë:
   a) $2^3 = 3^2$ b) $(-2)^3 = (-3)^2$ c) $(-2)^{100} > 0$ ç) $(-3)^{23} < 0$ d) $0^{10} < 10$.

5. Krahasoni numrin $a$ me zeron, nëse:
   a) $a^{75} < 0$ b) $a^{13} > 0$ c) $(-a)^{53} > 0$ ç) $a^{23} = 0$ d) $2a^3 < 0$.

6. Njehsoni vlerën e shprehjes:
   a) $3 \cdot 5^2 + 4^3 - 5 \cdot 7^3$ b) $(-2)(-3)(-4)^2 - (-1)^5(-2)^2$
   c) $100 \cdot (-2{,}1)^3 + 3{,}4 \cdot (-2{,}2)^2 - 0{,}3 \cdot (-0{,}3)^2$ ç) $(2^3 + 4^2) : (3^5 - 5^3)$
   Bëni kontrollin me kalkulator.

7. Njehsoni vlerën e shprehjes:
   a) $6a^7 + 3a^4 - 8a^{45} + 4$ për $a = -1$ b) $2ax^3 - a^2x^2 + 3ax + 10$ për $a = -1$ dhe $x = 2$

8. Olga ka ndarë një informacion për koncertin që pritet të realizohet me tre shokë të saj. Secili prej tyre këtë informacion e ndan me tre shokë të ndryshëm, kurse këta të fundit e ndajnë edhe me nga tre shokë të tjerë të ndryshëm. Sa njerëz, gjithsej, janë në dijeni për koncertin?

9. Nëse popullata e baktereve dyfishohet për çdo orë, sa baktere do të ketë pas 6 orësh?

10. Koha e nevojshme që Venera të rrotullohet rreth boshtit të saj është $3^5$ herë më e madhe se koha që i nevojitet Tokës për rrotullimin rreth boshtit të saj. Njehsoni vlerën e fuqisë për të gjetur sa herë është më e madhe koha e rrotullimit, rreth boshtit, e Venerës se koha e rrotullimit e Tokës rreth boshtit të saj.

**HULUMTIM**

Nëse e marrim katrorin e numrit shifra e njësheve e të cilit është 2, numri që fitojmë do të ketë 4 shifrën e fundit.

Nëse një numër ka shifrën e njësheve 1, atëherë në cilën shifër do të mbarojë fuqia e tij e tretë? Shkruani shembuj të tillë për numrat me shifra të njësheve 3 dhe 9.

Ekzistojnë disa shifra që asnjëherë nuk mund të gjenden në pozicionin e njësheve të numrave që janë katrorë të ndonjë numri. Zbuloni cilat janë këto shifra.

# 2.2. Rrënja katrore dhe kubike

## Rrënja katrore

**AKTIVITET**

Syprina e një katrori është 49 cm². Sa centimetra është brinja e tij?
Si do të llogaritni brinjën?

Shqyrtoni tabelën:

| $n$ | 3 | 7 | | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n^2$ | | | 36 | | 64 |

Për të plotësuar tabelën nga ju kërkohet:

- për numrat 3, 7 dhe 9 të gjeni katrorët e tyre, e ato janë 9, 49 dhe 81, përkatësisht;
- të gjeni numrat katrorët e të cilëve janë 36 dhe 64.

Kërkesa e dytë është e anasjella e të parës, përkatësisht për numrin 36 duhet të gjeni katror i cilit numër është 36. Ai numër shënohet me $\sqrt{36}$ dhe quhet rrënjë katrore e numrit 36.

$\sqrt{36} = 6$ sepse $6^2 = 36$ $\sqrt{64} = 8$ sepse $8^2 = 64$

**Rrënja katrore** (rrënja me tregues 2) e numrit real jonegativ $a$ është numri real jonegativ $b$, i tillë që $b^2 = a$ dhe shënohet me $\sqrt{a}$.

$\sqrt{a} = b$ e lexojmë "rrënja katrore e $a$ është $b$".

Në shprehjen $\sqrt{a}$ numri $a$ quhet **madhësia nën rrënjë.**

Operacioni invers i operacionit të fuqizimit, me të cilin llogaritim rrënjën katrore të një numri të dhënë quhet **rrënjëzim me tregues rrënje 2** ose vetëm **rrënjëzim.**

Në kalkulator kemi buton të veçantë për llogaritjen e rrënjës katrore, më shpesh e shënuar me $\sqrt{\ }$ ose $\sqrt{\square}$. Kështu, për të llogaritur rrënjën katrore të 64 vejmë:

6 4 $\sqrt{\ }$ = ose $\sqrt{\ }$ 6 4 =

**DETYRA 1**

Njehsoni vlerën e shprehjes dhe bëni kontrollin me kalkulator:

a) $\sqrt{16} + \sqrt{25}$ b) $3 + 2\sqrt{36}$ c) $\sqrt{15^2 - 12^2}$ ç) $5^2 + 4\sqrt{81}$

**AKTIVITET**

Njehsoni vlerën e rrënjës katrore dhe bëni kontrollin me kalkulator:

a) $\sqrt{100}$ b) $\sqrt{10\,000}$ c) $\sqrt{0{,}01}$ ç) $\sqrt{0{,}0001}$

Numrat e dhënë kanë numër çift zerosh.

Cila është lidhja mes numrit të zerove në shënimin e numrit me numër të zerove në shënimin e rrënjës së tij katrore? A mund të nxirrni një përfundim të përgjithshëm?

## Rrënja kubike

### AKTIVITET

Vëllimi i kubit është 27 cm³. Sa centimetra ka tehu i tij?
Si do të llogaritni gjatësinë e tehut?
Shqyrtoni tabelën:
Që të plotësoni tabelën duhet:

| $n$ | 2 | −5 | | |
|---|---|---|---|---|
| $n^3$ | | | 27 | −64 |

- të gjeni kubet e numrave 2 dhe − 5, e ato janë numrat 8 dhe −125, përkatësisht;
- të gjeni numrat kubet e të cilëve janë 27 dhe − 64.

Kërkesa e dytë është e anasjellëtt e të parës, përkatësisht për numrin 27 duhet të gjesh numrin kubi i të cilit është 27. Ky numër shënohet me $\sqrt[3]{27}$ dhe quhet rrënjë kubike e numrit 27.

$\sqrt[3]{27} = 3$ sepse $3^3 = 27$ $\quad$ $\sqrt[3]{-64} = -4$ sepse $(-4)^3 = -64$

**Rrënja kubike** (rrënja me tregues 3) e numrit real $a$ është numri real $b$, i tillë që $b^3 = a$ dhe shënohet me $\sqrt[3]{a}$.

$\sqrt[3]{a} = b$ e lexojmë "rrënja kubike e $a$ është $b$".

Operacionin me të cilin njehsojmë rrënjën kubike të numrit të dhënë e quajmë **rrënjëzim me tregues rrënje** 3 ose vetëm **rrënjëzim.**

Në kalkulator ka buton të veçantë për llogaritjen e rrënjës kubike, më shpesh e shënuar me simbolin $\sqrt[3]{\ }$ ose $\sqrt[3]{\square}$. Kështu, për të llogaritur rrënjën kubike të numrit 124 futim:

1 2 5 $\sqrt[3]{\ }$ = ose $\sqrt[3]{\ }$ 1 2 5 =

### DETYRA 2

Njehsoni vlerën e shprehjes dhe bëni kontrollin me kalkulator:

a) $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{-8}$ $\quad$ b) $1{,}5 - 6\sqrt[3]{27}$

c) $\sqrt[3]{3^2 - 1^2}$ $\quad$ ç) $(4 + 7\sqrt[3]{125}) : (5^2 - 4\sqrt[3]{27})$

### AKTIVITET

Njehsoni vlerën e rrënjës kubike dhe bëni kontrollin me kalkulator:

a) $\sqrt[3]{1000}$ $\quad$ b) $\sqrt[3]{1000000}$ $\quad$ c) $\sqrt[3]{0{,}001}$ $\quad$ ç) $\sqrt[3]{0{,}000001}$

Cila është lidhja mes numrit të zerove në shkrimin e numrit me numrin e zerove në shkrimin e rrënjës së tij kubike? A mund të nxjerrni përfundim të përgjithshëm?

# Rrënja e *n*-të

## AKTIVITET

Dimë që, për shembull, $\sqrt{4} = 2$ sepse $2^2 = 4$ $\quad \sqrt[3]{-27} = -3$ sepse $(-3)^3 = -27$.
Nëse mendojmë në mënyrë të njëjtë, për shembull, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[5]{-243}$ dhe $\sqrt[6]{64}$?



- Le të jetë $a$ numër real jonegativ dhe $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.
  Numri jonegativ $b$ i tillë që $b^n = a$ quhet rrënjë e n-të e $a$.
- Le të jetë $a$ numër real dhe $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$.
  Nuimri real $b$ i tillë që $b^n = a$ quhet rrënjë e $n$-të e $a$. Shënojmë
  $b = \sqrt[n]{a}$ dhe lexojmë " $b$ është rrënjë e $n$-të e $a$" ose
  $b = a^{\frac{1}{n}}$ dhe lexojmë "$b$ është në fuqinë $\frac{1}{n}$ "

Në këtë kontekst, për shembull, $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}}$.
Në kalkulator ekziston buton i veçantë për njehsimin e rrënjës së cilit do rendi, më shpesh e shënua $\sqrt[x]{}$ ose $\sqrt[x]{}$ ose $\sqrt[\square]{x}$

## DETYRA 3

Njehsoni:

a) $\sqrt{4}$ b) $\sqrt[3]{-27}$ c) $\sqrt[4]{16}$ ç) $\sqrt[5]{-243}$ d) $\sqrt[6]{64}$ dh) $\sqrt[8]{256}$ e) $\sqrt[7]{2187}$

## DETYRA 4

Njehsoni vlerën e shprehjes dhe bëni provën me kalkulator:

a) $\sqrt[5]{243} + \sqrt[3]{-27}$ b) $3 - 2{,}5\sqrt[6]{64}$ c) $\sqrt[3]{4^3 - 32}$ ç) $(4^2 - 3\sqrt[4]{625}) : (7^2 + 4\sqrt[4]{81})$

## DETYRA PËR USHTRIME

**1.** Njehsoni:

a) rrënjën katrore të 100 b) rrënjën e tretë të 8 c) $\sqrt{49}$ ç) $\sqrt[3]{81}$

**2.** Rishkruani dhe plotësoni tabelat e dhëna.

a) Katrorët e numrave prej 1 deri 15:

| Numri | 1 | 2 | | 4 | | 6 | | | 9 | 10 | 11 | | | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Katrori | | | 9 | | 25 | | 49 | 64 | | | | 144 | 169 | | |

b) Kubet e numrave nga 1 deri në 5 dhe kubi i numrit 10:

| Numri | 1 | 2 | | 4 | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Kubi | | | 27 | | 125 | |

3. Gjeni numrin natyror $n$ të tillë që:
   a) $n^2$ është ndërmjet 50 dhe 80 b) $n^3$ është ndërmjet 50 dhe 100.

4. Njehsoni dhe bëni provën me kalkulator:
   a) $7^2+\sqrt{49}$ b) $\frac{6^2}{\sqrt{81}}$ c) $\sqrt{10^2-8^2}$ ç) $\sqrt[3]{64}+\sqrt{64}$
   d) $\sqrt[3]{512}\frac{3^2}{4^2}$ dh) $\sqrt[3]{1000}-\frac{1}{\sqrt{100}}$ e) $(\sqrt{20})^2+\sqrt[3]{-8}$ ë) $15\sqrt[3]{27}+2\sqrt{16}-9$

5. Njehsoni vlerën e shprehjes dhe bëni provën me kalkulator:
   a) $2x-\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-12$ për $x=64$ b) $(a^2+2\sqrt[3]{a-7}-4)^2+a^2-\sqrt{a}$ për $a=81$

6. Thjeshtoni: a) $\frac{\sqrt[3]{3}+5}{2}\cdot\frac{3}{2\sqrt[3]{3}+10}+\frac{1}{4}$ b) $\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt{5}}{14}:\frac{2\sqrt[3]{3}-2\sqrt{5}}{7}-\frac{1}{4}$

7. Distanca e nevojshme për ndalim të sigurt të një automobili rritet në përpjestim të drejtë me katrorin e shpejtësisë së automobilit. Nëse automobilit i duhen 40 m për ndalim në shpejtësinë prej 20 km/h, atëherë me çfarë shpejtësie lëviz automobili nëse do t'i duheshin 90 m për të ndaluar?

8. Kompania e cila prodhon kuti kartoni në formë të kubit duhet të prodhojë kuti me vëllim 64 cm³. Njehsoni gjatësinë e tehut të kubit.

**HULUMTIM**

Sara e vlerëson vlerën e $\sqrt{45}$. Ajo thotë se $\sqrt{45}$ patjetër të jetë numër mes 6 dhe 7. Shpjegimi i saj është se 45 është ndërmjet 36 ($36=6^2$) dhe 49 ($49=7^2$).

Hulumtoni dhe zbuloni ndërmjet cilëve dy numra gjendet rrënja e:

a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt{102}$ c) $\sqrt{150}$ ç) $\sqrt[3]{12}$ d) $\sqrt[3]{100}$ dh) $\sqrt{2000}$

Provoni rezultatet e hulumtimit me kalkulator.

# 2.3. Veprime me fuqitë me tregues numër natyror

## Shumëzimi dhe pjesëtimi i fuqive me baza të njëjta

**AKTIVITET**

Shqyrtoni dhe shpjegoni si shumëzohen fuqitë me baza të njëjta?

$3^2\cdot 3^3=3^{2+3}=3^5$ $3^2\cdot 3^3=(3\cdot 3)\cdot(3\cdot 3\cdot 3)=3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=3^5$

Rregulla vlen për prodhimin e dy fuqive të çfarëdoshme me baza të njëjta.



Fuqitë me baza të njëjta shumëzohen, ashtu që baza ngritet në fuqinë sa shuma e treguesve të fuqive që shumëzohen, përkatësisht

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. (1)

Rregulla analoge vlen edhe për nprodhimin e një numri të çfarëdoshëm shumëzuesish.

## SHEMBULLI 1

Shkruani si fuqi prodhimet: a) $7^2 \cdot 7^6$ b) $(-3)^7 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^5$

a) $7^2 \cdot 7^6 = 7^{2+6} = 7^8$

Në kalkulator vejmë

7 $x^2$ × 7 $x^y$ 6 =

dhe fitojmë 5 764 801, që është e barabartë me $7^8$.

b) $(-3)^7 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^5 = (-3)^{7+2+5} = (-3)^{14}$

Në kalkulator vejmë

(−3) $x^y$ 7 × (−3) $x^y$ 2 × (−3) $x^y$ 5 =

dhe fitojmë 4 782 969, që është e barabartë me $(-3)^{14}$.

## SHEMBULLI 2

Thjeshtoni shprehjen: a) $5p^7 \cdot 4p^4$ b) $0{,}2(y+1)^8 \cdot 0{,}5(y+1)^3$

a) $5p^7 \cdot 4p^4 = (5 \cdot 4)\, p^{7+4} = 20p^{11}$

b) $0{,}2(y+1)^8 \cdot 0{,}5(y+1)^3 = (0{,}2 \cdot 0{,}5)(y+1)^{8+3} = 0{,}1(y+1)^{11}$

## DETYRA 1

Shkruani në formë të fuqisë prodhimet:

a) $100^4 \cdot 100^6$ b) $(-6)^4 \cdot (-6)^2 \cdot (-6)^3$ c) $x^3 \cdot x^8$ ç) $(x-1)^8 \cdot (x-1)^{23} \cdot (x-1)^{25}$

## SHEMBULLI 3

Një punëtor, në fabrikën për prodhimin e çokollatave paketon, nga $3^2$ çokollata në një kuti. Në një ditë punëtori paketoi $3^3$ kuti me çokollata. Llogaritni sa çokollata gjithsej kishte paketuar punëtori gjatë ditës. Shpreh zgjidhjen në formë të fuqisë, e më pas njehso vlerën e saj.

$3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$

Punëtori kishte paketuar 243 çokollata.

## AKTIVITET

Zbuloni rregullën për pjesëtimin e fuqive me baza të njëjta sipas llogaritjeve:

$3^6 : 3^2 = 3^{6-2} = 3^4$ $3^6 : 3^2 = \dfrac{3^6}{3^2} = \dfrac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3^4$



Fuqitë me baza të njëjta pjesëtohen ashtu që baza e përbashkët ngritet në fuqinë sa është ndryshimi i treguesit të pjesëtueshmit dhe treguesit të pjesëtuesit, përkatësisht

$a^n : a^m = a^{n-m}$, me kusht $m < n$ dhe $a \neq 0$. (2)

### SHEMBULLI 4

Shkruani në formë të fuqisë herësin: a) $13^7 : 13^3$ b) $(-a)^{11} : (-a)^4$

a) $13^7 : 13^3 = 13^{7-3} = 13^4$ b) $(-a)^{11} : (-a)^4 = (-a)^{11-4} = (-a)^7$

### DETYRA 2

Shkruani në formë të fuqisë herësin:

a) $5^6 : 5^4$ b) $0{,}35^8 : 0{,}35^6$ c) $(-4)^{12} : (-4)^7$ ç) $y^{72} : y^{68}$ d) $(a-b)^7 : (a-b)^3$

### DETYRA 3

Një fabrikë gjatë një dite harxhon $5^4$ kilovat orë energji elektrike. Gjatë natës, fabrika harxhon $5^2$ kilovat orë energji elektrike. Sa herë energji eletrike harxhon fabrika gjatë orëve të ditës në krahasim me orët gjatë natës? (Vërejtje: Numri i orëve gjatë ditës është i barabartë me numrin e orëve gjatë natës.)

## Fuqizimi i prodhimit, herësit dhe fuqisë

### AKTIVITET

Ndiqni njehsimin dhe përfundoni se si fuqizohet prodhimi i dy numrave

$(4 \cdot 5)^3 = 4^{3} \cdot 5^3$ $(4 \cdot 5)^3 = (4 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 4^{3} \cdot 5^3$

Me siguri keni vërejtur se fuqia e tretë e prodhimit është prodhim i fuqive të treta të shumëzuesve.



Prodhimi i dy numrave fuqizohet asisoj që secili shumëzues fuqizohet me fuqinë e treguesit, e më pas fuqitë e fituara shumëzohen, përkatësisht

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (3)

### SHEMBULLI 5

Fuqizoni prodhimet: a) $(2 \cdot 3)^4$ b) $[(-0{,}25) \cdot (2{,}7)]^4$ c) $(-2a)^5$

a) $(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$ b) $[(-0{,}25) \cdot (2{,}7))]^4 = (-0{,}25)^4 \cdot (2{,}7)^4$ c) $(-2a)^5 = (-2)^5 \cdot a^5$

Rregulla për fuqizimin e prodhimit të dy shumëzuesve mund të zgjerohet për rastin kur prodhimi ka më shumë se dy shumëzues.

### SHEMBULLI 6

Thjeshtoni shprehjen: a) $(4 \cdot 3 \cdot 2)^3$ b) $[(-3) \cdot 5 \cdot x]^5$

a) $(4 \cdot 3 \cdot 2)^3 = 4^3 \cdot 3^3 \cdot 2^3$
$= 64 \cdot 27 \cdot 8$
$= 13\,824$

b) $((-3) \cdot 5 \cdot x)^4 = (-3)^4 \cdot 5^4 \cdot x^4$
$= 81 \cdot 625 \cdot x^4$
$= 50\,625 \cdot x^4$

### DETYRA 4

Thjeshtoni shprehjen: a) $\left[(-5) \cdot 0{,}75 \cdot \frac{2}{3}\right]^4$ b) $(x \cdot y \cdot z)^3$ c) $\left(\frac{x}{3} \cdot \frac{y}{2} \cdot z\right)^3$

### AKTIVITET

Një kompani transporti ka $2^4$ kamionë. Në secilin kamion ka ngarkuar nga $5^4$ kuti për transport. Lexoni rregullin për fuqizimin e prodhimit nga e djathta në të majtë që më lehtësisht të llogaritni sa kuti ka ngarkuar kompania?

Barazimi (3) ndonjëherë është e dobishme të lexohet dhe të zbatohet nga e djathta në të majtë, përkatësisht

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

që tregon se fuqitë me tregues të njëjtë shumëzohen, ashtu që prodhimi i bazave të tyre fuqizohet me treguesin e përbashkët të fuqisë.

### SHEMBULLI 7

Shumëzoni dhe njehsoni fuqitë: a) $6^3 \cdot 5^3$ b) $24^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3$

a) $6^3 \cdot 5^3 = (6 \cdot 5)^3 = 30^3 = 27\,000$

b) $24^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \left(24 \cdot \frac{1}{6}\right)^3 = 4^3 = 64$

### DETYRA 5

Njehsoni: a) $55^2 \cdot \left(\frac{2}{11}\right)^2$ b) $4^7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7$ c) $(-3)^{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12}$ ç) $\left(\frac{5}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3$.

### AKTIVITET

Zbuloni rregullin për eksponencimin e një herësi:

$(4 : 5)^3 = 4^3 : 5^3$ $\quad (4 : 5)^3 = (4 : 5) \cdot (4 : 5) \cdot (4 : 5) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{4^3}{5^3} = 4^3 : 5^3$

Me siguri vërejtët se fuqia e tretë e herësit është herës i fuqive të treta të pjesëtueshmit dhe pjesëtuesit. Në rastin e përgjithshëm kemi:



Herësi i dy numrave fuqizohet ashtu që veçmas fuqizohet i pjesëtueshmi dhe pjesëtuesi me treguesin e fuqisë, e më pas i pjesëtueshmi i fuqizuar pjesëtohet me pjesëtuesin e fuqizuar, përkatësisht

$(a:b)^n = a^n : b^n$, me kusht $b \neq 0$ (4)

## SHEMBULLI 8

Fuqizoni herësin: a) $(4:5)^3$ b) $(2:7)^{12}$ c) $(x:2)^3$

a) $(4:5)^3 = 4^3 : 5^3$ b) $(2:7)^{12} = 2^{12} : 7^{12}$ c) $(x:2)^3 = x^3 : 2^3$

## DETYRA 6

Kryej fuqizimin e herësit: a) $(7:3)^{23}$ b) $(2:x)^5$ c) $[(x+1):x]^3$

Barazimin (4) ndonjëherë është e dobishme të lexohet dhe zbatohet nga e djathta në të majtë, përkatësisht

$a^n : b^n = (a:b)^n$, me kusht $b \neq 0$

që do të thoshte se fuqitë me tregues të njëjtë pjesëtohen, ashtu që herësi i bazave të tyre fuqizohet me treguesin e përbashkët të fuqisë.

## SHEMBULLI 9

Thjeshtoni shprehjen dhe shkruani zgjidhjen në formë të fuqisë: a) $27^5 : 9^5$ b) $1{,}5^3 : 0{,}5^3$

a) $27^5 : 9^5 = (27:9)^5 = 3^5$ b) $1{,}5^3 : 0{,}5^3 = (1{,}5:0{,}5)^3 = 3^3$

## DETYRA 7

Antena A përçon sinjal me intensitet prej 50 njësish, kurse antena B përçon sinjal me intensitet prej 10 njësish.

Nëse të dy intensitetet e sinjaleve fuqizohen me tregues 2, sa do jetë raporti i intensiteteve të sinjalit të antenës A ndaj intensitetit të antenës B pas përforcimit?

## AKTIVITET

Fuqia $(3^4)^2$ baza e së cilës është fuqia $3^4$, mund të shkruhet si fuqi me bazë 3. Ndiqni njehsimet dhe sqaroni se si mundet fuqia $(3^4)^2$ baza e të cilës është $3^4$, ta shkruajmë si fuqi me bazë 3.

$(3^4)^2 = 3^{4\cdot 2} = 3^8$ $(3^4)^2 = (3^4)\cdot(3^4) = (3\cdot 3\cdot 3\cdot 3)\cdot(3\cdot 3\cdot 3\cdot 3) = 3^8$

Me siguri vërejtët se treguesi i fuqisë është prodhim i dy treguesve të bazës. Në rastin e përgjithshëm kemi se:



Fuqia fuqizohet ashtu që baza e fuqisë fuqizohet me prodhimin e dy treguesve, përkatësisht

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \qquad (5)$$

### SHEMBULLI 10

Fuqizoni fuqinë: a) $(2^4)^3$ b) $[(-7)^7]^7$ c) $[(-0{,}25)^8]^{12}$ ç) $(x^7)^5$

a) $(2^4)^3 = 2^{12}$ b) $[(-7)^7]^7 = (-7)^{49}$ c) $[(-0{,}25)^8]^{12} = (-0{,}25)^{96}$ ç) $(x^7)^5 = x^{35}$

## DETYRA 8

Një kompani ka paketuar $2^2$ bonbone në kuti të vogël, $2^2$ në kuti mesatare, dhe në fund $2^2$ kuti mesatare në kuti të madhe,

a) Shkruani numrin e bonboneve që i ka paketuar kompania në formë të fuqisë me bazë $2^2$, e më pas në formë të fuqisë me bazë 2.

b) Njehsoni numrin e bonboneve që i ka paketuar kompania.

## DETYRA PËR USHTRIME

**1.** Thjeshtoni shprehjen duke përdorur kalkulatorin:

a) $2^5 \cdot 2^4$ b) $(0{,}6)^4 : (0{,}6)^2$ c) $8^4 \cdot 0{,}25^4$ ç) $(-12)^5 : 6^5$ d) $(-8^5)^4$

**2.** Thjeshtoni shprehjen:

a) $15x^8 \cdot 3x^2$ b) $32y^4 : (8y^2)$ c) $(3ao^3)^7$ ç) $3y^2 \cdot x^3 \cdot 5y^5 \cdot 4x^5$

d) $(a^3)^6 : (a^4)^3$ dh) $x^7 \cdot x^3 : x^6$ e) $(y^7 + 2y^2z) : y$ ë) $o^x(o^{x+1} + o^x) - o^{x+2}(o^{x+3} - o^x)$

**3.** Gjeni vlerat e $m$ dhe $n$, nëse:

a) $x^m \cdot x^n = x^9$ dhe $x^m : x^n = x$ b) $x^m : x^n = x$ dhe $x^m \cdot x^n = x^7$

**4.** Klubi STEM projekton një bankë për rimbushje. Një qeli e baterisë siguron 1 njësi rimbushje. Në një shtresë të bankës për rimbushje janë bashkuar $2^3$ qeli baterie. Në bankën për rimbushje janë lidhur $2^4$ shtresa baterie. Sa është gjithsej sasia e rimbushjes në dispozicion? Shkruani zgjidhjen në formë të fuqisë, e më pas njehsoni vlerën e saj.

**5.** Tretësira kimike ka koncentrim $5^5$ mmol/L. Pas hollimit, koncentrimi zvogëlohet në $5^2$ mmol/L. Sa herë është zvogëluar koncentrimi? Shkruani zgjidhjen si fuqi me tregues 5.

**6.** Një firmë ndërtimi ka $3^3$ kamionë. Në çdo kamion ka ngarkuar nga $4^3$ thasë çimento. Sa gjithsej thasë çimento ka ngarkuar firma?

**7.** Sipas recetës duhen 6 kupa me miell për të bërë 2 bukë. Nëse dy sasitë i fuqizojmë me tregues 3, atëherë sa kupa me miell do të duhet për të bërë 1 bukë sipas recetës së re?

8. Në një bibliotekë, në një raft janë radhitur 5 libra, në një stendë janë radhitur 4 rafte dhe në një dollap të hapur janë radhitur 10 stenda. Sa libra janë radhitur në bibliotekë? Shprehni zgjidhjen në formën e fuqisë me bazë $3^2$, e më pas në formë të fuqisë me bazë 3 dhe njehsoni vlerën e saj.

**HULUMTIM**

Adori e vlerësoi vlerën e $257^8$ sipas mënyrës në vijim:

$200 < 257 < 300$

$2 \cdot 100 < 257 < 3 \cdot 100$

$2^8 \cdot 100^8 < 257^8 < 3^8 \cdot 100^8$

$10^2 \cdot 100^8 < 257^8 < 10^4 \cdot 100^8$

$10^{18} < 257^8 < 10^{20}$

Hulumtoni dhe zbuloni mënyrë tjetër sipas së cilës do të caktoni mes cilëve dy numra gjendet fuqia:

a) $426^4$ b) $344^6$ c) $1567^3$ ç) $6783^5$ d) $25075^7$

# 2.4. Fuqia me tregues fuqie numër të plotë dhe numër racional

## Fuqia me tregues numër të plotë negativ ose zero

Deri më tani kemi shqyrtuar tregues fuqie që ishin numra natyrorë. Mirëpo, kur pjesëtojmë fuqi me baza të njëjta, sipas rregullit të njëjtë pa kufizimin e shënuar për treguesit e fuqive, treguesi i fituar i fuqisë mund të jetë edhe numër negativ ose zero.

**AKTIVITET**

Sa mund të jetë $2^{-3}$? Si mund të fuqizohet me numër të plotë negativ, ashtu që do t'i ndjekim rregullat që vlejnë për fuqinë me tregues numër natyror?

$2^5 : 2^8 = 2^{5-8} = 2^{-3}$ $\qquad 2^5 : 2^8 = \frac{2^5}{2^8} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^3}$

Sa mund të jetë $3^0$? A ke idenë se si mund të fuqizohet me zero, dhe kjo të jetë në pajtueshmëri me rregullat që i dimë?

$3^4 : 3^4 = 3^{4-4} = 3^0$ $\qquad 3^4 : 3^4 = \frac{3^4}{3^4} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 1$



- Për çdo numër real $a \neq 0$ fuqia $a^0$ është e barabartë me njësh, përkatësisht $a^0 = 1$.
- Për çdo numër real $a \neq 0$ dhe çdo numër natyror $n$, fuqia $a^{-n}$ është vlera reciproke e fuqisë $a^n$, përkatësisht $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

## SHEMBULLI 1

Njehsoni: a) $4^{-3}$ b) $12^0$

a) $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$ Kërkojmë vlerën reciproke të $4^3$

b) $12^0$ Çdo numër i ndryshëm nga zero në fuqinë 0 është 1

Me përkufizimet e përvetësuara për fuqitë me tregues zero dhe numër negativ, rregullat për operacionet me to janë të njëjta si rregullat për fuqitë me tregues numër natyror.



Për cilët do numra realë $a \neq 0$ dhe $b \neq 0$, dhe për cilët do $n, m \in \mathbb{Z}$ vlen:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $a^n : a^m = a^{n-m}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $(a : b)^n = a^n : b^n$ $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

## SHEMBULLI 2

Njehsoni: a) $3^{-3} \cdot 3^4$ b) $3^4 : 3^7$ c) $3^{-2} \cdot 4^{-2}$ ç) $2^{-4} : 8^{-4}$ d) $(2^3)^{-2}$

a) $3^{-3} \cdot 3^4 = 3^{-3+4} = 3^1 = 3$

b) $3^4 : 3^7 = 3^{4-7} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

c) $3^{-2} \cdot 4^{-2} = (3 \cdot 4)^{-2} = 12^{-2} = \frac{1}{12^2} = \frac{1}{144}$

ç) $8^{-4} : 2^{-4} = (8 : 2)^{-4} = 4^{-4} = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256}$

d) $(2^3)^{-2} = 2^{3 \cdot (-2)} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

## SHEMBULLI 3

Thjeshtoni: a) $6a^{-4} \cdot 7a^2$ b) $35b^4 : (7b^2)$ c) $\left(\frac{3}{q^2}\right)^{-3}$

a) $6a^{-4} \cdot 7a^2 = (6 \cdot 7)a^{-4+2} = 42a^{-2} = \frac{42}{a^2}$

b) $35b^4 : (7b^2) = (35 : 7)b^{4-2} = 5b^2$

c) $\left(\frac{3}{q^2}\right)^{-3} = \left(\frac{q^2}{3}\right)^3 = \frac{q^6}{3^3} = \frac{q^6}{27}$

Thyesa fuqizohet me numër të plotë negativ ashtu që vlera e saj reciproke fuqizohet me numrin e kundërt të treguesit.

### SHEMBULLI 4

Kultura e baktereve përgjysmohet për çdo orë pas marrjes së antibiotikut. Nëse tani ka 320 baktere, sa të tilla do të ketë pas 5 orësh?

$$320 \cdot 2^{-5} = 320 \cdot \frac{1}{2^5} = 320 \cdot \frac{1}{32} = 10 \text{ baktere}$$

Pas 5 orësh kultura do të ketë 10 baktere.

## Fuqia me tregues fuqie numër racional

### AKTIVITET

Dimë se, për shembull,

$4^{\frac{1}{2}} = 2$, sepse $2^2 = 4$ $\quad (-27)^{\frac{1}{3}} = -3$, sepse $(-3)^3 = -27$.

Nëse mendojmë në mënyrë të njëjtë, sa duhet të jetë $16^{\frac{1}{4}}$, $8^{\frac{1}{3}}$, $(-243)^{\frac{1}{5}}$ dhe $64^{\frac{1}{6}}$?

A ekziston $(-4)^{\frac{1}{2}}$?

Siç kemi thënë,

- nëse $a$ është numër real jonegativ dhe $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, atëherë numri jonegativ $a^{\frac{1}{n}}$ i tillë që $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$ është fuqia e numrit $a$ me tregues $\frac{1}{n}$, dhe
- nëse $a$ është numër real dhe $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, atëherë numri real $a^{\frac{1}{n}}$ i tillë që $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$ është fuqia e numrit $a$ me tregues $\frac{1}{n}$.

Vërejmë se $a^{\frac{1}{n}}$ nuk ekziston kur $a < 0$ dhe $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, sepse nuk ka asnjë numër që kur shumëzon vetveten numër çift herësh të jep numër negativ.

### AKTIVITET

Çfarë numri është treguesi i fuqisë në shënimin $4^{\frac{3}{2}}$? Sqaroni njehsimin:

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

Përsëri parashtrojmë pyetjen se si mund të fuqizojmë me numër racional, ashtu që do t'i ndjekim rregullat që vlejnë për fuqinë me tregues numër të plotë.

Le të jetë $a > 0$ dhe $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ($m \in \mathbb{Z}$ dhe $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$). Fuqia e numrit $a$ me tregues numër racional $\frac{m}{n}$ përkufizohet me $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$.

Le të jetë $a \neq 0$ dhe $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ($m \in \mathbb{Z}$ dhe $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$). Fuqia e numrit $a$ me tregues numër racionale $\frac{m}{n}$ përkufizohet me $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$.

### SHEMBULLI 5

Njehsoni: a) $32^{\frac{1}{5}}$ b) $27^{-\frac{1}{3}}$

a) $32^{\frac{2}{5}} = (32^{\frac{1}{5}})^2 = 2^2 = 4$ Sipas përkufizimit për fuqinë me tregues numër racional.

b) $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3}$ E kërkojmë vlerën reciproke të $27^{-\frac{1}{3}}$

Sipas përkufizimit për fuqinë me tregues numër racional kemi se rregullat për operacionet me to mbeten të njëjta me rregullat për fuqitë me tregues numër të plotë, **gjithmonë përderisa fuqizimi ka kuptim.**



Për cilët do numra real $a \neq 0$ dhe $b \neq 0$, dhe cilët do $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ku $m, p \in \mathbb{Z}$ $n, q \in \mathbb{N}$ vlen:

$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$ $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$

$(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$ $(a : b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}}$ $(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$

### AKTIVITET

Sqaroni pse $8^{\frac{2}{3}}$ mund ta llogaritim në dy mënyra:

$8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2^2 = 4$ $8^{\frac{2}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3}} = 4$

Nga rregulli i fuqizimit të fuqisë del se $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$

### SHEMBULLI 6

Thjeshtoni: a) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ b) $7^{\frac{1}{6}} : 7^{\frac{1}{3}}$ c) $3^{\frac{1}{5}} \cdot 7^{\frac{1}{5}}$ ç) $16^{\frac{1}{3}} : 8^{\frac{1}{3}}$ d) $(3^{\frac{1}{5}})^{\frac{3}{4}}$

a) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 2^1 = 2$ b) $7^{\frac{1}{6}} : 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}} = 7^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{7^{\frac{1}{6}}}$

c) $3^{\frac{1}{5}} \cdot 7^{\frac{1}{5}} = (3 \cdot 7)^{\frac{1}{5}} = 21^{\frac{1}{5}}$ ç) $16^{\frac{1}{3}} : 8^{\frac{1}{3}} = (16 : 8)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$ d) $(3^{\frac{1}{5}})^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{20}}$

### SHEMBULLI 7

Thjeshtoni: a) $5a^{\frac{2}{3}} \cdot 4a^{\frac{1}{2}}$ b) $42a^{\frac{7}{2}} : (6a^{\frac{3}{4}})$ c) $\left(\frac{3}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$

a) $5a^{\frac{2}{3}} \cdot 4a^{\frac{1}{2}} = (5 \cdot 4)a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = 20a^{\frac{7}{6}}$

b) $42a^{\frac{7}{2}} : (6a^{\frac{3}{4}}) = 7a^{\frac{7}{2}-\frac{3}{4}} = 6b^{\frac{11}{4}}$

c) $\left(\frac{3}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{c^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{c^3}{3^{\frac{3}{2}}}$

Thyesa fuqizohet me tregues numër racional ashtu që vlera e saj reciproke fuqizohet me numrin e kundërt të treguesit.

## SHEMBULLI 8

Popullata e lepujve, në periodën prej 5 vitesh, rritet në numrin që është fuqi e numrit fillestar me bazë 4 dhe numri fillstar i lepujve është 4. Pas 15 vitesh, në habitat kishte 256 lepuj. Sa lepuj kishte pas 10 vitesh?

15 vite janë 3 perioda me nga 5 vite, 10 vite janë 2 perioda me 5 vite.

Pas 3 periodash kishte 256 lepuj. Pra $4 \cdot 4^{3k} = 256$, dhe numri është i nevojshëm $4 \cdot 4^{3k}$.

Pas 2 periodash kishte $4\left(\frac{256}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 4 \cdot 64^{\frac{2}{3}} = 4 \cdot \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 = 4 \cdot 4^2 = 64$ lepuj.

Pas 10 vitesh kishte 64 lepuj.

## DETYRA PËR USHTRIME

**1.** Njehsoni:

a) $7 \cdot 7^{-1}$ b) $4^3 \cdot 4^4 : 4^5$ c) $\frac{3^5 \cdot 3^2}{3^9}$ ç) $\frac{10^6 \cdot 10^4}{(10 \cdot 10^2)^2}$

**2.** Njehsoni:

a) $32^{\frac{1}{5}} \cdot 32^{\frac{4}{5}}$ b) $\left(\frac{1}{27^{-\frac{1}{3}}}\right)^{-3}$ c) $16^{\frac{7}{4}} : 16^{\frac{1}{2}}$ ç) $(25^{-\frac{3}{2}})^{\frac{4}{3}}$

**3.** Thjeshtoni:

a) $8q^7 \cdot 4q^{-30}$ b) $32y^8 : 4y^{-3}$ c) $\left(\frac{6}{t}\right)^{-3}$ ç) $(a^2)^{-3}$

**4.** Thjeshtoni:

a) $14x : (7x^{-\frac{2}{3}})$ b) $4x^{-\frac{4}{3}} \cdot 7x^{-\frac{2}{3}}$ c) $2a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}} : 5a^{\frac{1}{3}}$ ç) $(8a^{-3} : (27b^9))^{-\frac{1}{3}}$

**5.** Gjeni vlerat e $p$ dhe $q$, nëse:

a) $x^p : x^q = x$ dhe $x^p \cdot x^q = x^{-7}$ b) $x^p \cdot x^q = x^{\frac{9}{2}}$ dhe $x^p : x^q = x^{\frac{11}{2}}$

**6.** Kapaciteti në përqindje i baterisë së telefonit përgjysmohet për çdo orë gjatë shikimit të videove. Nëse kapaciteti fillestar është 80%, sa do të jetë kapaciteti në përqindje pas 3 orësh?

**7.** Gjatë kristalizimit të gurit të kaltër, bakër sulfat pentahidratit, masa e kristalit të formuar dyfishohet çdo 2 orë. Pas 6 orësh masa e kristalit është 64 gramë. Sa ka qenë masa e kristalit pas 4 orësh?

8. Kompania për ruajtjen e energjisë e rrit numrin e baterive në elektranën me erë. Numri i baterive rritet çdo 3 vite ashtu që numri është fuqi e numrit fillestar me tregues $2k$ ($a^2$, $a^4$, $a^6$, ...). Pas 9 vitesh numri i baterive është 729. Sa ka qenë numri i baterive pas 6 vitesh?

9. Shkruani pesë shprehje të barabarta me $x^{30}$. Mundohuni t'i përdorni gjitha operacionet me fuqitë me baza të njëjta dhe shfrytëzoni të paktën një kufizë, anëtar, me tregues fuqie numër negativ ose tregues fuqie numër racional.

## 2.5. Paraqitja e numrave në formë eksponenciale

Numrin 3651 mund ta shkruajmë në më shumë mënyra si prodhim i dy numrave, ku njëri është fuqi me bazë 10 dhe tregues fuqie numër pozitiv. Për shembull

$$\begin{aligned} 3651 &= 3651 \cdot 1 && = 3651 \cdot 10^0 \\ &= 365{,}1 \cdot 10 && = 365{,}1 \cdot 10^1 \\ &= 36{,}51 \cdot 100 && = 36{,}51 \cdot 10^2 \\ &= 3{,}651 \cdot 1000 && = 3{,}651 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

Të njëjtin numër mund ta shkruajmë si prodhim i dy numrave, ku njëri është me bazë 10 dhe tregues fuqie numër negativ.

$$\begin{aligned} 3651 &= 3651 \cdot 1 && = 3651 \cdot 10^0 \\ &= 36510 \cdot 0{,}1 && = 36510 \cdot 10^{-1} \\ &= 365100 \cdot 0{,}01 && = 365100 \cdot 10^{-2} \\ &= 3651000 \cdot 0{,}001 && = 3651000 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Çka është karakteristikë e shënimit $3{,}651 \cdot 10^3$ të numrit 3651?



Për numrin real $x$ themi se është shkruar në **formën eksponenciale**, nëse

$$x = A \cdot 10^n$$

ku $n$ është numër i plotë dhe A është numër real i tillë që $1 \leq |A| < 10$.
Numri $A$ në shënimin më lart quhet **mantisë** ose **pjesa kryesore**.

Shënimi i tillë i shkrimit të numrave shpesh përdoret për shkrimin e numrave shumë të mëdhenj ose numrave shumë të vegjël.

### SHEMBULLI 1

Shkruaj në formë dhjetore numrin e dhënë në formë eksponenciale:
a) $3 \cdot 10^4$ b) $6{,}52 \cdot 10^0$ c) $7 \cdot 10^{-2}$ ç) $8{,}434 \cdot 10^{-3}$

Për shënimin e numrit nga forma eksponenciale në dhjetore e shumëzojmë mantisën me vlerën e fuqisë. Gjejmë se:

a) $3 \cdot 10^4 = 3 \cdot 10\,000 = 30\,000$
b) $6{,}52 \cdot 10^6 = 6{,}52 \cdot 1\,000\,000 = 6\,520\,000$
c) $7 \cdot 10^{-2} = 7 \cdot 0{,}01 = 0{,}07$
ç) $8{,}434 \cdot 10^{-3} = 8{,}434 \cdot 0{,}001 = 0{,}008434$

## SHEMBULLI 2

Shkruani në formën eksponenciale numrin:

a) 723 b) 1827,45 c) 0,0006 ç) 0,00000127

**Hapi i parë**: Presjen dhjetore e zhvendosim ashtu që majtas saj të mbetet vetëm një shifër jozero. Numri i fituar në intervalin [0, 10) është mantisa.

**Hapi i dytë**: I numërojmë vendet për sa e kemi zhvendosur presjen dhjetore. Me numrin e fituar bëjmë fuqizimin.

Sipas rregullit gjejmë se:

a) $723 = 7,23 \cdot 10^2$ presjen dhjetore e zhvendosim **majtas**
b) $1827{,}45 = 1{,}82745 \cdot 10^3$ Treguesi (3) është **pozitiv**
c) $0{,}0006 = 6 \cdot 10^{-4}$ presjen dhjetore e zhvendosim **djathtas**
ç) $0{,}00000127 = 1{,}27 \cdot 10^{-6}$ Treguesi (−6) është negativ.

## DETYRA 1

Shpejtësia e dritës përafërsisht është $3 \cdot 10^8$ m/s.

a) Shkruani numrin matës në formë dhjetore..
b) Sa është shpejtësia e dritës e shprehur me km/s? Shkruani numrin matës në formë eksponenciale.

Pa marrë parasysh llojin e kalkulatorit, paraqitja e numrit në formë eksponenciale bëhet me paraqitjen e mantisës në pjesën qendrore të ekranit të kalkulatorit, dhe të fuqisë djathtas nga mantisa. Në figurën 1 fuqia është paraqitur në këndin e poshtëm të djathtë, përderisa në figurën 2 është paraqitur në këndin e poshtëm majtas. Edhe më shumë, te disa kalkulatorë për bazën 10 mund të përdoret simboli E, në vazhdim të mantisës sikurse është treguar në figurën 3..

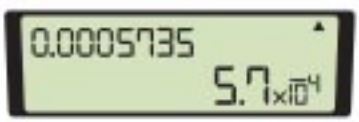


Figura 1

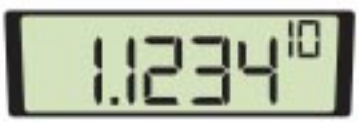


Figura 2



Figura 3

## SHEMBULLI 3

Njehsoni dhe shkruani vlerën e shprehjes në formë eksponenciale:

a) $(4{,}5 \cdot 10^{-6}) + (4 \cdot 10^{-6})$ b) $(9{,}3 \cdot 10^2) - (2{,}1 \cdot 10^2)$
c) $(3 \cdot 10^3) \cdot (5 \cdot 10^{-5})$ ç) $(5{,}2 \cdot 10^2) : (2 \cdot 10^4)$,

Zgjidhjet janë fituar pa përdorim të kalkulatorit.

Provoni saktësinë përmes kalkulatorit.

a) $(4{,}5 \cdot 10^{-6}) + (4 \cdot 10^{-6}) = (4{,}5 + 4) \cdot 10^{-6}$
$= 8{,}5 \cdot 10^{-6}$

I mbledhim mantisat sipas rregullit për nxjerrjen e shumëzuesit përpara kllape.

b) $(9{,}3 \cdot 10^{2}) - (2{,}1 \cdot 10^{2}) = (9{,}3 - 2{,}1) \cdot 10^{2}$ — E zbresim mantisën e të zbritshmit me mantisën e zbritësit.
$= 7{,}2 \cdot 10^{2}$

c) $(3 \cdot 10^{3}) \cdot (5 \cdot 10^{-5}) = 15 \cdot 10^{3} \cdot 10^{-5}$ — I shumëzojmë mantisat.
$= 15 \cdot 10^{3-5}$ — E përdorim rregullën për shumëzimin e fuqive me baza të njëjta.
$= 15 \cdot 10^{-2}$
$= 1{,}5 \cdot 10^{1} \cdot 10^{-2}$ — E përdorim rregullën për shënimin e numrit në formë eksponenciale.
$= 1{,}5 \cdot 10^{-1}$

ç) $(5{,}2 \cdot 10^{2}) : (2 \cdot 10^{4}) = 2{,}6 \cdot 10^{2} : 10^{4}$ — E pjesëtojmë mantisën e të pjesëtueshmit me mantisën e pjesëtuesit.
$= 2{,}6 \cdot 10^{2-4}$ — E përdorim rregullën për pjesëtimin e fuqive me baza të njëjta.
$= 2{,}6 \cdot 10^{-2}$

## DETYRA 2

Një fabrikë prodhon pjesë kompjuterësh në formë drejtkëndëshi me brinjë $0{,}6 \cdot 10^{-3}$ m dhe $7{,}2 \cdot 10^{-3}$ m.

a) Njehsoni syprinën e pjesës kompjuterike në metra katrorë. Shkruani zgjidhjen në formë eksponenciale.

b) Njehsoni perimetrin e njësisë kompjuterike në metra. Shkruani zgjidhjen në formë eksponenciale.

## DETYRA PËR USHTRIME

**1.** Shkruajeni në formë dhjetorenumrin e dhënë në formë eksponenciale:

a) $5 \cdot 10^{1}$ b) $9 \cdot 10^{4}$ c) $1{,}5 \cdot 10^{6}$ ç) $3{,}142 \cdot 10^{3}$ d) $9{,}1909 \cdot 10^{8}$

dh) $7 \cdot 10^{-2}$ e) $8 \cdot 10^{-1}$ ë) $1{,}27 \cdot 10^{-4}$ f) $7{,}213 \cdot 10^{-3}$ g) $2{,}111 \cdot 10^{-7}$

**2.** Shkruani në formë eksponenciale numrin:

a) 70 000 b) 650 c) 17 200 000 ç) 181 856 d) 2372,4

dh) 0,6 e) 0,0007 ë) 0,010101 f) 0,00000057 g) 0,0000000202

**3.** Numri i banorëve në një vend është 2 081 012.
Shkruajeni numrin në formë eksponenciale.

**4.** Ndërtimi i një stadiumi për Botërorin e ardhshëm në futboll do të kushtojë përafërsisht 4 miliardë dollarë (1 miliard shënohet si $1 \cdot 10^{9}$ në formë eksponenciale).

a) Shkruani numrin në formën eksponenciale.

b) Puna e mbetur që duhet të kryhet do të kushtojë 0,429 miliardë dollarë.

Shkruani numrin në formën eksponenciale.

5. Njehsoni dhe shkruani në formë eksponenciale vlerën e shprehjes:
   a) $(4 \cdot 10^2) + (2 \cdot 10^2)$ b) $(4 \cdot 10^3) - (2 \cdot 10^3)$
   c) $(4 \cdot 10^3) \cdot (2 \cdot 10^2)$ ç) $(4 \cdot 10^3) : (2 \cdot 10^2)$

6. Masa e Tokës është përafërsisht $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg. Dendësia mesatare e Tokës është përafërsisht 5515 kg/m³. (vëllimi = masa : dendësia)
   a) Njehsoni vëllimin e Tokës në metra kub.
   b) Shkruani në zgjidhjen në formë eksponenciale me saktësi deri 2 vende dhjetore.

7. Drita thotë se $(7 \cdot 10^5) - (5 \cdot 10^5) = (2 \cdot 10^0)$. Valoni thotë se $(7 \cdot 10^5) - (5 \cdot 10) = (2 \cdot 10^5)$. Kush ka të drejtë? Shpjego përgjigjen.

8. Në tabelë është dhënë popullsia në vitin 2020 në pesë rajonet më të mëdha urbane në një shtet dhe syprina e tyre e shprehur me kilometra katrorë.
   Dendësia e popullsisë është numri i popullsisë në syprinën prej 1 km².

| Rajoni | Popullsia | Syprina në km² |
|---|---|---|
| A | $1{,}35 \cdot 10^5$ | $1{,}09 \cdot 10^2$ |
| B | $3{,}90 \cdot 10^5$ | $6{,}08 \cdot 10^2$ |
| C | $2{,}03 \cdot 10^5$ | $8{,}77 \cdot 10^2$ |
| Ç | $1{,}24 \cdot 10^5$ | $3{,}75 \cdot 10^2$ |
| D | $3{,}90 \cdot 10^5$ | $4{,}44 \cdot 10^2$ |

   a) Renditni rajonet sipas numrit të popullsisë, duke filluar me atë më të banuar.
   b) Renditni rajonet sipas madhësisë së syprinës, duke filluar nga më i madhi.
   c) Njehsoni dendësinë e popullsisë për secilin rajon.
   ç) Renditni rajonet sipas dendësisë së popullsisë, duke filluar me rajonin më të dendur..

**HULUMTIM**

Hulumtoni dhe mblidhni nga 10 vlera shumë të vogla dhe shumë të mëdha reale, për shembull, masën e Tokës, masën e një kokrre orizi, diametrin e bërthamës së atomit, distancën nga Toka deri te Dielli, shpejtësia e dritës, shpejtësia e automobilit, numri i yjeve të Rrugës së Qumështit, numri i popullsisë botërore e të ngjashme.

a) Shkruani secilën vlerë në formë eksponenciale.

b) Renditni nga më e madhja te më e vogla vlerë sipas treguesit të fuqisë.

c) Njehsoni raportin ndërmjet disa prej madhësive, për shembull sa herë është më e madhe masa e Tokës nga masa e një kokërr orizi.

ç) Paraqitni dhe shpjegoni rezultatet me tabela dhe diagrame.

d) Shpjegoni pse forma eksponenciale është më e dobishme në shkencë, veçanërisht në astronomi, fizikë dhe kimi.

# 2.6. Shprehjet algjebrike racionale

## Shprehjet racionale të plota dhe thyesore

### AKTIVITET

a) Me konstantet 0; 1,5; 2; 4,5; dhe 9 shkruani shprehje numerike në të cilën do të shënohen operacionet mbledhje, zbritje, shumëzim, pjesëtim dhe fuqizim me tregues numër të plotë. Njehsoni vlerën e shprehjes së shkruar.

b) Me konstantet 2; 3,5; 4 dhe 9 dhe ndryshoret $x$, $y$, $z$, dhe $t$, shkruani shprehje algjebrike në të cilën do të shënohen operacionet mbledhje, zbritje, shumëzim, pjesëtim dhe fuqizim me tregues numër të plotë.

**Shprehja algjebrike racionale** është varg i fundëm i konstantave dhe ndryshoreve, lidhur me shenjat e operacioneve mbledhje, zbritje, shumëzim, pjesëtim dhe fuqizim me tregues numër të plotë, me kuptim të caktuar matematik.

### SHEMBULLI 1

Shënimet $a+b$, $\frac{m^2+5}{m-n}$ dhe $\frac{1}{p+3}$ janë shembuj të shprehjeve algjebrike racionale.

### DETYRA 1

Shkruani shprehjen për llogaritjen e perimetrit të trekëndëshit me brinjët $4x$, $2x$ dhe $3x$.

Shprehja algjebrike mund të përbëhet vetëm prej konstanteve, madje edhe prej vetëm një konstanteje ose ndryshoreje. Për shembull, $a$; 1; 7,2, i trajtojmë si shprehje algjebrike.
Shprehjet algjebrike që përmbajnë vetëm numra i quajmë **shprehje numerike**.
Numrin që fitohet pasi në shprehjen algjebrike të bëhen zëvendësimet me vlerat përkatëse të ndryshoreve dhe pasi që kryhen operacionet e shënuara me to e quajmë **vlerë numerike** të shprehjes.

### SHEMBULLI 2

Vlera numerike për shprehjen:

a) $3x-1$ për $x=1$ është $3\cdot 1-1=2$ b) $3a^3+5a$ për $a=2$ është $3\cdot 2^3+5\cdot 2=34$

### DETYRA 2

Njehsoni vlerën numerike të shprehjes racionale:

a) $4x+5y$, për $x=-4, y=5$ b) $\frac{x-3y}{3xy}$, për $x=6, y=-5$ c) $\frac{4x-3z}{3-xy}$, për $x=4, y=-3, z=0$

Shprehjet algjebrike racionale në të cilat nuk hasim operacionin e pjesëtimit me ndryshore ose pjesëtimin me shprehje që përmban ndryshore, i quajmë **shprehje algjebrike racionale të plota.**

### SHEMBULLI 3

Shprehjet $2a^2b - 1$, $5x^2 - 3xy$, $\frac{4x}{3}$, $\frac{a^2 - 2b}{4}$ janë shembuj shprehjesh algjebrike racionale të plota.

Shprehjet algjebrike racionale që përmbajnë pjesëtim me ndryshore ose pjesëtim me shprehje që përmbajnë ndryshore, quhen **shprehje racionale thyesore.**.

### SHEMBULLI 4

Shprehjet $\frac{2a-1}{b}$, $\frac{x}{y-2}$ dhe $\frac{5a}{2b} + 4c$ janë shembuj të shprehje racionale thyesore, sepse përfshijnë pjesëtim me ndryshore ose pjesëtim me shprehje që përmbajnë ndryshore.

### SHEMBULLI 5

Në shprehje racionale thyesore $\frac{30}{x-4}$ ndryshorja $x$ nuk mund të merr vlerën 4, por $x$ mund të merr cilëndo vlerë tjetër reale.
Shkruajmë $\frac{30}{x-4}$, $x \neq 4$.

Vlerat që mund t'i marrin ndryshoret në një shprehje algjebrike racionale të dhënë quhen **vlera të lejuara të ndryshores**.

### DETYRA 3

Cila është bashkësia e vlerave të lejuara të ndryshoreve në cilëndo shprehje racionale të plotë?

Shprehjet racionale që kanë bashkësi të njëjtë të vlerave të lejuara dhe kanë vlera numerike të njëjta për të gjitha vlerat e lejuara të ndryshoreve quhen **shprehje racionale identike**.

### SHEMBULLI 6

Shprehjet

| | |
|---|---|
| a) $3(a-4)+7$ dhe $3a-5$ janë identike | Kanë vlera numerike të njëjta për cilëndo vlerë të $a$. |
| b) $\frac{a^2-4}{a+2}$ dhe $a-2$ nuk janë identike | Bashkësitë e tyre të vlerave të lejuara të ndryshoreve nuk janë të njëjta. |
| c) $\frac{a^2-4}{a+2}$ dhe $a-2$ për $a \neq -2$, janë identike | Për çdo $a \neq -2$ kanë vlera të njëjta numerike. |

## Monomet

### AKTIVITET

Në cilat nga shprehjet e dhëna racionale: $2x^2y$, $x+1$, $a$, $5$, $3abc + 7a$, $-0{,}4z$, $m^2 + 5m + 3$ janë të përfshira vetëm operacionet e shumëzimit dhe fuqizimit me numër natyror?



Shprehja algjebrike racionale e plotë e cila përmban vetëm operacionet e shumëzimit dhe të fuqizimit me tregues numër natyror quhet **monom**.

## SHEMBULLI 7

Shprehjet $5x$, $-2a^2b$, $-2m$ dhe $\frac{3}{4}ab^2$ janë shembuj të monomeve.

Meqenëse operacioni i fuqizimit është rast special i oepracionit të shumëzimit mund të thuhet se monomi është shprehje racionale e plotë që përfshin vetëm operacionin e shumëzimit.

Sipas përkufizimit të monomit, secila shprehje e cila përbëhet vetëm nga një konstante ose ndryshore është monom, sepse monomi jo medoemos duhet të përmbajë operacionin e shumëzimit.

## SHEMBULLI 8

a) Shprehjet $x$, $-2$, $-m$ dhe $0{,}5$ janë monome.

b) Shprehja $\frac{4ab^2}{5}$ është monom, sepse mund të rishkruhet në formën $\frac{4ab^2}{5} = \frac{4}{5}ab^2 = 0{,}8ab^2$.

## SHEMBULLI 9

$\frac{-2ab^2 \cdot 3x^2y}{5} = -\frac{6}{5}ab^2x^2y$

Nëse monomi përmban më shumë shumëzues – konstante, prodhimi i tyre mund të shkruhet përpara prodhimit të ndryshoreve.



Konstanta që qëndron përpara ndryshoreve të monomit quhet **koeficient i monomit**.

Prodhimi i ndryshoreve të monomit quhet **vlera kryesore e monomit**.

Shuma e treguesve të ndryshoreve që paraqiten në monom quhet **shkallë e monomit**.

## SHEMBULLI 10

$a^2b$, $-3x$, $\frac{4}{5}ab^2c$ dhe $-0{,}5t$

Koeficientët e monomeve janë $1$, $-3$, $\frac{4}{5}$ dhe $-0{,}5$

Vlerat kryesore të monomeve janë $a^2b$, $x$, $ab^2o$ dhe $t$

Shkallët e monomeve janë $3$, $1$, $4$, $1$



Monomet që kanë vlera të njëjta kryesore, kurse dallojnë në koeficientët e tyre, quhen **monome të ngjashme**.

Dy monome të ngjashme, koeficientët e të cilëve janë numra të kundërt, quhen **monome të kundërta**.

### SHEMBULLI 11

a) Monomet $-3a^2b$, $0{,}6a^2b$, $2a^2b$, $\frac{3}{4}a^2b$ dhe $-a^2b$, janë shembuj monomesh të ngjashme.
b) Monomet $7ab^2$ dhe $-7ab^2$ janë shembuj monomesh të kundërta.

### DETYRA 4

Shkruani koeficientin, vlerën kryesore dhe fuqinë e monomit:
a) $-2a^2b^3$ b) $3{,}9x^5y^7$ c) $-2{,}5pq$ ç) $\frac{2a^2x^4}{3}$ d) $-x^2yz$

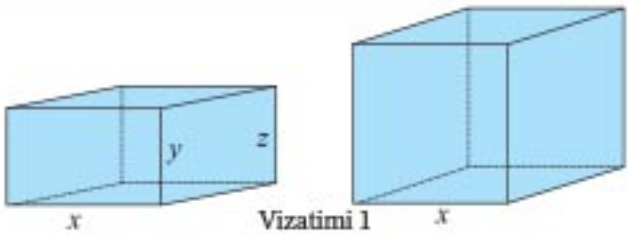
### DETYRA 5

Energjia e valës së zërit në kohën prej $t$ orë është $7t^4$ xhaulë (J).
Sa do të jetë energjia e valës së zërit pas 7 orësh?

## Polinomet

### AKTIVITET

Jepen kubi dhe kuadri (vizatimi 1).
Sa është syprina e totale e dy formave, nëse gjatësia e tehut të kubit është $x$, kurse gjatësitë e teheve të kuadrit janë $x$, $y$ dhe $z$?
Me siguri keni arritur në përfundimin se për të caktuar syprinën totale të formave, duhet të caktoni shumën e syprinave të tyre:



Vizatimi 1

$P_1 = 6x^2$ syprina e kubit
$P_2 = 2xy + 2yz + 2xz$ syprina e kuadrit
$P = P_1 + P_2$ syprina e përgjithshme
$P = 6x^2 + 2xy + 2yz + 2xz$ *shprehja për syprinën e përgjithshme është shuma monomeve*

Shuma algjebrike e një numri të fundëm monomesh quhet **polinom**.

### SHEMBULLI 12

Shprehjet $3a - 2ax + a^2b^2 - bx$ dhe $4ax - 3by + x^2y^2$ janë shembuj polinomesh.

Monomet nga të cilët është ndërtuar polinomi quhen **kufiza të polinomit**.
Polinomi që përmban dy kufiza quhet edhe **binom**, kurse polinomi që përmban tri kufiza quhet **trinom**, etj.

### SHEMBULLI 13

a) Shprehjet $a + 2b$ dhe $x^2 + 5y$ janë binome.

b) Shprehjet $3a^2 + 2a + 1$ dhe $x^2 - 2xy + 3y$ *janë trinome.*

Çdo monom mund të konsiderohet edhe si polinom me vetëm një kufizë.
Nga ana tjetër çdo polinom mund të përmbajë një ose më shumë ndryshore.

### SHEMBULLI 14

Polinomi $5a^2 - 2a^3 + 3a^4 - a + 4$ përmban vetëm një ndryshore në fuqi të ndryshme.

| | |
|---|---|
| $3a^4 - 2a^3 + 5a^2 - a + 4$ | Për shkak të ligjit të komutativitetit, kufizat e tij mund të renditen në fuqi zvogëluese të fuqive të ndryshores. |
| $4 - a + 5a^2 - 2a^3 + 3a^4$ | Ngjashëm, kufizat e tij mund të renditen në fuqi rritëse të ndryshores. |



Konstantet që paraqiten në polinom quhen **koeficientë të polinomit**. Shkalla e kufizës me fuqi më të lartë quhet **shkallë e polinomit**.

### SHEMBULLI 15

$3x^3 - 4x^2 + 5$ Koeficientë të polinomit janë numrat 3, – 4 dhe 5

Shkalla e polinomit është 3.

### SHEMBULLI 16

$$\underline{3a^2} - \underline{b^2} - \underline{5a^2} + \underline{4b^2} = (3a^2 - 5a^2) + (-b^2 + 4b^2)$$
$$= (3 - 5)a^2 + (-1 + 4)b^2$$
$$= -2a^2 + 3b^2$$

Zëvendësimi i shumës algjebrike të disa prej kufizave të ngjashme të polinomit me një kufizë identike me to quhet **rregullim i kufizave të ngjashme të polinomit**.

### DETYRA 6

Amplituda $A$ e valës së zërit në një kohë prej t sekondash është $t^2 - 5t + 6$ decibel.
Cila do të jetë madhësia e amplitudës, e shprehur në decibel, pas 5 sekondash?

## DETYRA PËR USHTRIME

**1.** Gjeni bashkësinë e vlerave të lejuara për ndryshoret në shprehjen:

a) $\frac{a+5}{a-3}$ b) $\frac{x^2+2x-1}{x+2}$ c) $\frac{2ab}{a-b}$

2. Rishkruani në fletoren tuaj:

| Monomi | $-4a^2b$ | $2{,}5a$ | $-ax^2$ | $-\frac{x}{3}$ | $\frac{2xy^2}{5}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Koeficienti i monomit | | | | | |
| Vlera kryesore e monomit | | | | | |
| Shkalla e monomit | | | | | |

3. Cilët nga monomet në vijim janë të ngjashëm:
a) $-3ab$ b) $\frac{1}{2}a^2x$ c) $ab$ ç) $-a^2x$ d) $6a^2x$ e) $-7ax^2$ ë) $ax^2$

4. Shkruani monomin e kundërt të monomit:
a) $-6ab$ b) $a^2b^2$ c) $-2ax$ ç) $\frac{x}{3}$ d) $-x^2y$ e) $0{,}5a$

5. Rishkruani në fletoren tuaj:

| Polinomi | $-7x^2+9x$ | $2{,}5a^5+7abc-5ab$ | $x^3y-x^2y^2+2xy-3xy^2$ |
|---|---|---|---|
| Koeficientët e polinomit | | | |
| Shkalla e polinomit | | | |

6. A janë identike shprehjet:
a) $a+b=a-(-b)$ b) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ c) $x^3+1=(x+1)(x^2+x+1)$

7. Thjeshtoni polinomet: a) $3ab-4a^2b^2-7ab^2+2ab^2-ab+4^2b^2$ b) $1{,}5a-2b+0{,}5b-0{,}3a-ab$

8. Sasia e të dhënave të përpunuara në megabajt, për $h$ orë, është $15h^3$. Sa do të jetë sasia e të dhënave të përpunuara në megabajt për 3 orë?

9. Lartësia e bimës në milimetra për $x$ javë është $2x^2+5x+6$.
Sa do të jetë lartësia e bimës pas 5 javësh?

# 2.7. Mbledhja dhe zbritja e shprehjeve racionale të plota

## Mbledhja e monomeve dhe polinomeve

### AKTIVITET

Shkruani shumën algjebrike të numrave $-15$, 9, $-6$, 12 dhe $-7$. Më pas shkruani formën e shkurtuar të saj pa përdorimin e kllapave. Ta gjejmë shumën e monomeve: $7a^2$, $-5a$, $-3ab$, $2a$ dhe $-ab$.

$7a^2+(-5a)+(-3ab)+2a+(-ab)$
$=7a^2-\underline{5a}-\underline{\underline{3ab}}+\underline{2a}-\underline{\underline{ab}}$
$=7a^2-3a-4ab$

E shkruajmë shumën algjebrike të monomeve.
E shkruajmë në formën e shkurtuar pa përdorur shenjat e mbledhjes dhe kllapave dhe i rregullojmë kufizat e ngjashme të polinomit të fituar.

**Dy monome mblidhen**, ashtu që shkruhen në formën e shumës algjebrike, njëri pas tjetrit me shenjat e njëjta që kanë. Pastaj, nëse ka nevojë polinomi i fituar edhe reduktohet.

### DETYRA 1

Gjeni shumën e monomeve: $15x^2y$, $-5xy$, $-3xy^2$, $2x^2y$ dhe $-xy$.

### SHEMBULLI 1

Gjeni shumën e polinomeve $5a^2b + 2b$ dhe $2a - 3a^2b$.

$(5a^2b + 2b) + (2a - 3a^2b)$ — E shkruajmë shumën e polinomeve

$(5a^2b + 2b) + (2a - 3a^2b) = \underline{5a^2b} + 2b + 2a - \underline{3a^2b}$
$= 2a^2b + 2b + 2a$

Polinomit të parë i shtojmë njëra pas tjetrës secilën kufizë të polinomit të dytë dhe i rregullojmë kufizat e ngjashme të polinomit të fituar.

**Dy polinome mblidhen** ashtu që polinomit të parë njëra pas tjetrës i shtohen gjitha kufizat e polinomit të dytë me shenjat që posedojnë. Pastaj, sipas nevojës polinomi i fituar edhe reduktohet.

### DETYRA 2

Një skenë ndriçohet me dy reflektorë. Intensiteti i dritës në lumenë, në $x$ metra, nga burimi është:
Reflektori A intensiteti i dritës $(9x^2 + 5x)$ lumenë
Reflektori B intensiteti i dritës $(7x^2 + 3x + 6)$ lumenë
Gjej shumën e intensiteteve të dritës së dy reflektorëve.

## Zbritja e polinomeve

### AKTIVITET

Të zbritet numri racional $b$ nga numri racional a nënkupton numrit a t'i shtojmë numrin e kundërt të numrit $b$, përkatësisht $a - b = a + (-b)$.
Duke menduar në këtë mënyrë, gjeni ndryshimin e:

a) numrit 7 me numrin 5 b) Numrit 7 me numrin $-5$ c) numrit $-7$ me numrin $-5$

### SHEMBULLI 1

Të gjejmë ndryshimin e monomit $5ab$ me monomin $4a^2$.

$5ab - (+4a^2) = 5ab + (-4a^2)$ — E shkruajmë ndryshimin e kërkuar në formë të shumës.
$= 5ab - 4a^2$ — I mbledhim monomet sipas rregullës për mbledhjen.

**Monomi zbritet me monom** ashtu që monomit që është i zbritshmi i shtojmë monomin e kundërt të monomit që është zbritësi. Më pas, sipas nevojës në polinomin e fituar bëjmë edhe reduktimin.

### DETYRA 3

Gjeni ndryshimin e monomit $3ax$ me monomin $-2by$.

### SHEMBULLI 2

Gjeni ndryshimin e polinomit $6ax - 5a$ me polinomin $3x^2 - 4ax$

$$(6ax - 5a) - (+3x^2 - 4ax) = \underline{6ax} - 5a - 3x^2 + \underline{4ax} = 10ax - 5a - 3x^2$$

E shkruajmë ndryshimin.
Të zbritshmit i shtojmë çdo kufizë të polinomit-zbritësit me shenjë të kundërt dhe reduktojmë anëtarët e ngjashëm në polinomin e fituar.

**Polinomet zbriten** ashtu që pranë polinomit-të zbritshmit shtohen njëra pas tjetrës gjitha kufizat e polinomit – zbritësit me shenja të kundërta. Pastaj, sipas nevojës, në polinomin e fituar në këtë mënyrë mund të kryhet reduktimi.

## DETYRA 4

Lartësia në cm pas $t$ dekadash e:
drurit të lisit është $(5t^2 + 4t + 3)$ cm
drurit të ahut është $(3t^2 + t + 7)$ cm
Gjej ndryshimin mes lartësisë së drurit të lisit dhe atij të ahut pas 4 dekadash.

**Lirimi nga kllapat dhe futja në kllapa**

Gjatë mbledhjes dhe zbritjes së monomeve dhe polinomeve fillimisht i vejmë ata në kllapa, e më pas lirohemi prej kllapave. Në bazë të rregullave për mbledhjen dhe zbritjen e polinomeve, mund të nxirren **rregullat** në vijim **për lirimin nga kllapat**.



Nëse përpara kllapës kemi shenjën (+), kllapa mund të shpërfillet, kurse shenjat përpara kufizave në kllapa mbeten të pandryshuara.

Nëse përpara kllapës kemi shenjën ( −), shenja dhe kllapa mund të fshihen, por gjitha kufizat në të duhet të rishkruhen me shenja të kundërta.

### SHEMBULLI 3

Sipas rregullave për lirimin nga kllapat kemi

$$3a - (2b - 5c) + (-5a + 4b - c) - (-7a + b - 8) = \underline{3a} - \underline{\underline{2b}} + \underline{\underline{5c}} - \underline{5a} + \underline{\underline{4b}} - \underline{\underline{c}} + \underline{7a} - \underline{\underline{b}} + 8$$
$$= 5a + b + 4c + 8$$

Ndonjëherë bëhet e nevojshme futja e një polinomi ose një pjese të tij në kllapa, kurse para saj të qendrojë shenja (+) ose shenja (−). Këtë e bëjmë në pajtueshmëri me **rregullat e futjes në kllapa** si më poshtë.



Nëse përpara kllapës, në të cilën futim një polinom të dhënë, vejmë shenjën (+), atëherë të gjitha kufizat e polinomit të futur në kllapa i ruajnë shenjat e tyre.

Nëse përpara kllapës, në të cilën futim një polinom të dhënë, vejmë shenjën (−), atëherë të gjitha kufizat e polinomit të futur në kllapa i ndërrojnë shenjat e tyre me shenjat e kundërta.

## SHEMBULLI 4

Sipas rregullave për futjen në kllapa kemi

$3a - b + 5c = +(3a - b + 5c)$ vejmë shenjën (+) para kllape

$3a - b + 5c = -(-3a + b - 5c)$ vejmë shenjën (−) para kllape

## DETYRA 5

Lirohuni nga kllapat dhe thjeshtoni shprehjen:

$(5a^3 + 7b - 4bc) - [(5a^3 + 7b) - (8bc + 2ab^2 - 7)] + 12abc + 3.$

## DETYRA PËR USHTRIME

**1.** Mblidhni monomet:

a) $7x^4, -5x^3, -4x^3, 6x^2$ dhe $12x^4$ b) $-2xy, 7xy, 5xy$ dhe $-3xy$

**2.** Kryeni mbledhjen e polinomeve:

a) $(5x^2 - ax + a^2) + (3x^2 + 2ax - a^2) + (4ax - 3x^2 + 8)$

b) $(2a^4 + 3a^3b - 2a^2b^2 - ab^3) + (a^4 - a^3b + 3a^2b^2 + 4ab^3 - b^4)$

**3.** Kryeni zbritjen e polinomeve:

a) $-5a - (+3a)$ b) $3x - (-2x)$ c) $2ab - (+2ab)$ ç) $3ax - (-ax^2)$

**4.** Kryeni zbritjen e polinomeve:

a) $(6a^2x - 2ax^2 + 5) - (4a^2x + ax^2 - 3)$

b) $(x^3y - 2xy^2 + 3xy - 2) - (-4x^3y + xy - 3xy^2 + 5x^2y + 1)$

**5.** Lirohuni nga kllapat dhe thjeshtoni shprehjen:

a) $(2x^2 + 3y^2) - \{(x^2 - 2xy - y^2) + [3x^2 + 2xy - (-5xy + 2y^2)]\}$

b) $3x^2y - \{xyz - (3xyz - x^2z) + [2x^2y - (5x^2y - 4xyz - x^2z)]\}$

**6.** Tregoni se vlera e shprehjes nuk varet nga ndryshoret në të:

a) $x^2 + 2xy + y^2 - (4xy + 3x^2 - 5) + (2xy - y^2 + 2x^2 + 3)$

b) $y^2 - (xy + 3y^2 - 3x^2 + 7) + (2y^2 + 2xy + 2y^3) - (3x^2 + xy + 2y^3)$

**7.** Paraqitni polinomin $3x^2 - 5xy - 5y^2 + y$ në formën e:

a) shumës së dy mbledhësve, nga të cilët njëri është $3x^2 - 5xy$

b) ndryshimit të dy shprehjeve me zbritës $3x^2 - 5xy$

**8.** Automobili ditën e parë ka kaluar $(3xy^2 + 5x^2y)$ kilometra, ditën e dytë ka kaluar 2 herë më shumë, kurse ditën e tretë pesë herë më shumë se sa dy ditët e para bashkërisht. Sa kilometra ka kaluar automobili për tri ditë?

**9.** Zhvendosja e dy trupave pas $t$ sekondash është

Trupi $A$ është zhvendosur për $(5t^2 + 7t + 12)$ metra

Trupi $B$ është zhvendosur për $(3t^2 + 4t + 9)$ metra

Gjeni ndryshimin e zhvendosjes së trupit $A$ me zhvendosjen e trupit $B$.

# 2.8. Shumëzimi i shprehjeve racionale të plota

## Shumëzimi i monomeve

### AKTIVITET

A janë të barabarta prodhimet:

a) $a \cdot b$ dhe $b \cdot a$ b) $(a \cdot b) \cdot c$ dhe $a \cdot (b \cdot c)$,

ku $a$, $b$ dhe $c$ janë numra të çfarëdoshëm racionalë? Sqaroni përgjigjen.

Ta gjejmë prodhimin e monomeve $-5ab^2c$ dhe $3a^3bx$.

$-5ab^2c \cdot 3a^3bx = (-5 \cdot 3)(a \cdot a^3) \cdot (b^2 \cdot b) \cdot c \cdot x$ Për shkak të ligjit komutativ dhe asociativ të shumëzimit

$= -15a^4b^3cx$ E kryejmë shumëzimin në çdo kllapë

**Monomet shumëzohen** ashtu që fillimisht shumëzohen koeficientët e tyre, e më pas të gjitha fuqitë e vlerave të tyre kryesore që kanë bazë të njëjtë. Fuqitë që hasen vetëm në njërin monom barten në prodhim me të njëjtët tregues.
Ngjashëm veprojmë edhe gjatë shumëzimit të më shumë monomeve.

### SHEMBULLI 1

Gjeni prodhimin e monomeve $4a^2b$, $0{,}5ac^3$ dhe $-3b^3c^2$.

$4a^2b \cdot 0{,}5ac^3 \cdot (-3b^3c^2) = [4 \cdot 0{,}5 \cdot (-3)] \cdot (a^2 \cdot a) \cdot (b \cdot b^3) \cdot (c^3 \cdot c^2) = -6a^3b^4c^5$

### DETYRA 1

Kryeni shumëzimin e dhënë: a) $2x^2 \cdot (-3xy^2)$ b) $4xy \cdot 5x$ c) $-6ax^2 \cdot (-3a^2x)$

### DETYRA 2

Shtypja në sipërfaqen me syprinë $7x^5$ metër katrorë është $10x^2$ paskalë. Shumëzoni për të llogaritur sa është forca që vepron mbi sipërfaqe.

### AKTIVITET

Kryeni fuqizimin: a) $2^4 \cdot 3^4$ b) $4^2 \cdot 4^4$ c) $(3^3)^2$

Sipas cilave rregulla e realizuat fuqizimin?

**Monomi fuqizohet** ashtu që fuqizohet secili shumëzues i tij me treguesin e fuqisë, e më pas fuqitë e fituara shumëzohen.

### SHEMBULLI 2

Kryeni fuqizimin e monomit: a) $(2x^2y^3z^4)^2$ b) $(3a^2xy^3)^4$

a) $(2x^2y^3z^4)^2 = 4x^4y^6z^8$ Shfrytëzojmë rregullën e fuqizimit të monomit
b) $(3a^2xy^3)^4 = 81a^8x^4y^{12}$ Shfrytëzojmë rregullën e fuqizimit të monomit

### DETYRA 3

Njehsoni vëllimin e kubit me teh $4a^4b^2c^5$.

## Shumëzimi i polinomit me monom

### AKTIVITET

Njehsoni në dy mënyra:

a) $3(2 + 5)$ b) $(2 + 5)3$ c) $3(2 - 5)$ b) $(2 - 5)3$

Sipas cilit ligj i realizuat llogaritjet?

Ta gjejmë prodhimin e polinomit $2a^3 - 3ab^2$ me monomin $4a^2b$.

$(2a^3 - 3ab^2) \cdot (4a^2b) = 2a^3 \cdot 4a^2b - 3ab^2 \cdot 4a^2b$ Përdorim ligjin distributiv të shumëzimit

$= 8a^5b - 12a^3b^3$ E kryejmë shumëzimin përkatës të monomeve

**Polinomi shumëzohet me monom** ashtu që fillimisht çdo anëtar i polinomit shumëzohet me monomin, e më pas prodhimet e fituara mblidhen.

### SHEMBULLI 3

Gjeni prodhimin e polinomit $-5ax^2 + 4xy^3 - 2y + 1$ me monomin $-3a^2xy$.

$(-5ax^2 + 4xy^3 - 2y + 1) \cdot (-3a^2xy) = 15a^3x^3y - 12a^2x^2y^4 + 6a^2xy^2 - 3a^2xy$

### DETYRA 4

Fuqia e llambës varet nga tensioni 10 $t$ në volt dhe intensiteti i rrymës $t^2 + 4$ në amperë. (fuqia = tensioni · intensiteti i rrymës) Shumëzoni që të gjeni fuqinë e llambës.

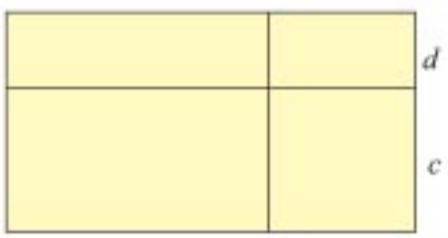
## Shumëzimi i polinomeve

### AKTIVITET

Gjeni syprinën e drejtkëndëshit të madh në vizatimin 1.

Më pas, gjeni syprinat e të katër drejtkëndëshave të vegjël dhe mblidhni shprehjet e fituara.

Syprina e drejtkëndëshit të madh është sa shuma e syprinave të katër drejtkëndëshave më të vegjël. Shkruani ekuacionin. Çfarë përfunduat?



Vizatimi 1

Ta gjejmë prodhimin e polinomeve $2x^2 - 5xy + y^2$ dhe $4x + 3y$.

Nëse polinomin e dytë e shënojmë me $M$, përkatësisht nëse $M = 4x + 3y$, atëherë prodhimi i kërkuar do të merr formën $(2x^2 - 5xy + y^2) \cdot M$

Sipas rregullës së shumëzimit të polinomit me monom, fitojmë

$(2x^2 - 5xy + y^2) \cdot M = 2x^2 \cdot M - 5xy \cdot M + y^2 \cdot M$

Nëse tani e kthejmë zëvendësimin për $M$, fitojmë

$$\begin{aligned}(2x^2 - 5xy + y^2) \cdot (4x + 3y) &= 2x^2 \cdot (4x + 3y) - 5xy \cdot (4x + 3y) + y^2 \cdot (4x + 3y) \\ &= 2x^2 \cdot 4x + 2x^2 \cdot 3y - 5xy \cdot 4x - 5xy \cdot 3y + y^2 \cdot 4x + y^2 \cdot 3y \\ &= 8x^3 + 6x^2y - 20x^2y - 15xy^2 + 4xy^2 + 3y^3 \\ &= 8x^3 - 14x^2y - 11xy^2 + 3y^3\end{aligned}$$

**Dy polinome shumëzohen** ashtu që secila kufizë e njërit polinom shumëzohet me secilën kufizë të polinomit tjetër, e më pas prodhimet e fituara mblidhen. Në fund, sipas nevojes, në polinomin e fituar mund të bëhet reduktimi i tij.

Gjatë shumëzimit të polinomeve, është e dobishme t'i shkruajmë prodhimet e polinomit të parë çdo kufizë të polinomit të dytë, ose prodhimet e polinomit të dytë me çdo kufizë të polinomit të parë.

### SHEMBULLI 4

Gjeni prodhimin $(x + 2) \cdot (3x - y)$

$(x + 2) \cdot (3x - y) = (x + 2) \cdot 3x + (x + 2) \cdot (-y)$
$= 3x^2 + 6x - xy - 2y$

$(x + 2) \cdot (3x - y) = x \cdot (3x - y) + 2 \cdot (3x - y)$
$= 3x^2 - xy + 6x - 2y$

### DETYRA 5

Kryeni shumëzimin:

a) $(2a^3 - a^2b + 3ab^2 - 5b^3) \cdot (a^2 - 3ab + 2b^2)$ b) $(2x^3 - 5x + 3) \cdot (x^2 - 3x + 2)$

### DETYRA 6

Forca konstante $(5t^2 + 6t + 1)$ vepron mbi trup në intervalin kohor $(2t + 1)$. Shumëzoni që të gjeni impulsin (forca · koha).

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Shumëzoni monomet:

   a) $-5a^2b^3$ dhe $-2a^3b$ b) $x^3y$ dhe $-3a^2x^5y^3$ c) $-\frac{3}{4}x^2y^3z$ dhe $-\frac{4}{7}xy^2$

2. Kryeni shumëzimin:

   a) $(8x^3 - 4x^2y - 5xy^2 + 3y^2) \cdot (-2x^2y)$ b) $(3ab^2c - 7a^2bc^2 - a^2bc) \cdot (-3abc)$

3. Shumëzoni polinomet
   a) $x^2 - xy + 2y + 3x$ dhe $x - 4y + 5$  b) $3a^4 - 6a^3b + 5a^2b^2 - 7ab^3 - 9b^4$ dhe $a^2 - 3ab + b^2$

4. Gjeni prodhimin:
   a) $(x - y) \cdot (x - 1)$  b) $(y^3 + z^3) \cdot (z - 1)$  c) $(x^2 + z^2 + 1) \cdot (x^2 - z^2 - 1)$

5. Paraqitni fuqinë në formë të prodhimit, e më pas kryeni shumëzimin:
   a) $(a + b)^2$  b) $(a - b)^2$  c) $(a + b)^3$  ç) $(a - b)^3$  d) $(a + b)^4$  dh) $(a - b)^4$

6. Thjeshtoni shprehjen:
   a) $(3y - 2) \cdot (5 - 2y) + 6y^2$  b) $(2x - 1) \cdot (4x^2 + 2x + 1) - 4x \cdot (x^2 + 1) + 4x^2$
   c) $2x \cdot (x + 6) - (2x + 1) \cdot (x + 2)$  ç) $(5x - 2) \cdot (3x + 5) - (3x + 5) \cdot (x + 2) \cdot (x + 2)$

7. Paraqitni fuqitë si prodhim, e më pas gjeni prodhimet:
   a) $(x + 1)^2$  b) $(2x - 3)^2$  c) $(x + 2)^3$  ç) $(5x - 2)^3$

8. Kryeni shumëzimin
   a) $(xy - 3) \cdot (x^2 - 2xy + 3y) \cdot (xy + 3)$  b) $(4y^2 - 1) \cdot (2y^3 + 2y) \cdot (4y^2 + 1)$

9. Në një eksperiment nga fizika, nxënësi llogarit forcën e përgjithshme që vepron në një trup duke përdorur shprehjen që përfshin fushë të ndryshueshme magnetike.
   Forca është dhënë me prodhimin e polinomeve: $(2x + 3)(x^2 - x + 4)$.
   Kryeni shumëzimin e polinomeve dhe caktoni shkallën e polinomit të fituar..

# 2.9. Formulat për shumëzim të shkurtuar

Në vijim do të njihemi me pesë identitete të njohura si **formula për shumëzim të shkurtuar**. Të përmendim se A dhe B do të shënojnë jo vetëm numra, por edhe çfarëdo shprehjesh.

## Prodhimi i shumës dhe ndryshimit të dy shprehjeve

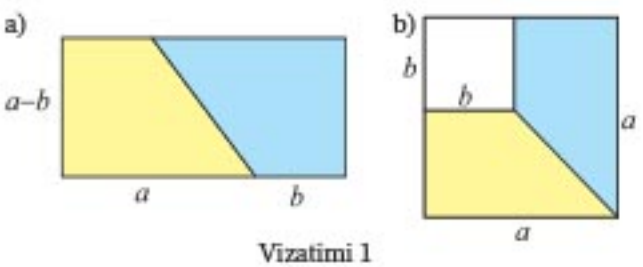
**AKTIVITET**

Syprina e drejtkëndëshit me brinjë $a + b$ dhe $(a - b)$ në vizatimin 1a) është $(a + b) \cdot (a - b)$.

Syprina e formës në vizatimin 1b), e fituar me veçimin e një katrori me brinjë $b$ nga katrori me brinjë $a$ është $a^2 - b^2$.

Vëreni se dy syprinat janë të barabarta.

Shkruani barazimin. Çfaër përfunduat?




Vizatimi 1

Le të jenë $A$ dhe $B$ shprehje çfarëdo. Shprehja $A + B$ quhet **shumë** e shprehjeve $A$ dhe $B$, përderisa shprehja $B$ quhet **ndryshim** i shprehjeve $A$ dhe $B$.

Të llogaritim prodhimin $(A + B) \cdot (A - B)$. Kemi se

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - \underline{AB} + \underline{AB} - B^2 = A^2 - B^2$$ Shumëzojmë dhe reduktojmë



Prodhimi i shumës së dy shprehjeve dhe ndryshimit të shprehjes së parë dhe të dytë është i barabartë me ndryshimin e katrorit të shprehjes së parë me katrorin e shprehjes së dytë:

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2 \qquad (1)$$

Formula (1) quhet **formula për prodhimin e shumës dhe ndryshimit të dy shprehjeve.**

## SHEMBULLI 1

$(4x + 3y) \cdot (4x - 3y) = (4x)^2 - (3y)^2 = 16x^2 - 9y^2$ E përdorim formulën për prodhimin e shumë dhe ndryshimit të dy shprehjeve

Formulën për prodhimin e shumës dhe ndryshimit të dy shprehjeve mund ta përdorim për gjetjen e shpejtë të prodhimit të dy numrave.

## SHEMBULLI 2

$58 \cdot 62 = (60 - 2) \cdot (60 + 20) = 60^2 - 2^2 = 3596$ E përdorim formulën për prodhimin e shumës dhe ndryshimit të dy shprehjeve.

Nëse formulën e mësipërme e shkruajmë në renditjen e kundërt, e fitojmë formulën $A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$ e cila quhet **formula për ndryshimin e katrorëve.**



Ndryshimi i katrorëve të dy shprehjeve është i barabartë me prodhimin e shumës së atyre shprehjeve dhe ndryshimin e shprehjes së parë me shprehjen e dytë.

## SHEMBULLI 3

$16x^2 - 9y^2 = (4x)^2 - (3y)^2 = (4x + 3y) \cdot (4x - 3y)$ E përdorim formulën për ndryshimin e katrorëve të dy shprehjeve.

Formulën për ndryshimin e katrorëve të dy shprehjeve mund ta përdorim për gjetjen e shpejtë të ndryshimit të katrorëve të dy numrave.

## SHEMBULLI 4

$237^2 - 236^2 = (237 + 236) \cdot (237 - 236) = 473 \cdot 1 = 473$ E përdorim formulën për ndryshimin e katrorëve të dy shprehjeve.

### DETYRA 1

Një trup lëviz me shpejtësi 90 km/h, kurse tjetri me shpejtësi 70 km/h.
Sa është ndryshimi i katrorëve të shpejtësive të tyre?

## Katrori i shumës së dy shprehjeve

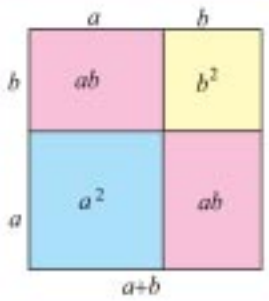
### AKTIVITET

Syprina e katrorit me brinjë $a + b$ në vizatimin 2 është $(a + b)^2$.

Nga ana tjetër syprina e katrorit është shuma e syprinave të: katrorit me brinjë $a$, katrorit me brinjë $b$, dhe dy drejtkëndëshave me brinjët $a$ dhe $b$.

Shkruani barazimin.

Çfarë përfunduat?



Vizatimi 2

Të njehsojmë katrorin $(A + B)^2$. Kemi

$(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A^2 + \underline{AB} + \underline{AB} + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$ Shumëzojmë dhe reduktojmë.

Katrori i shumës së dy shprehjeve është shuma e katrorëve të shprehjeve dhe dyfishit të prodhimit të tyre:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \qquad (2)$$

Formula (2) quhet **formula për katrorin e shumës së dy shprehjeve.**

### SHEMBULLI 5

$(3x + 5y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5y + (5y)^2$ E përdorim formulën për katrorin e shumës së dy shprehjeve

$= 9x^2 + 30xy + 25y^2$

Formula për katrorin e shumës së dy shprehjeve mund ta përdorim për gjetjen e shpejtë të katrorëve të numrave.

### SHEMBULLI 6

$76^2 = (70 + 6)^2 = 70^2 + 2 \cdot 70 \cdot 6 + 6^2$ E përdorim formulën për katrorin

$= 4900 + 840 + 36 = 5776$ e shumës së dy shprehjeve

### DETYRA 2

Energjia e trupit me masë $m$ dhe shpejtësi fillestare 3 metra për sekondë, pasi që fiton shpejtësi shtesë $v$, është $\frac{m}{2}(v + 3)^2$ xhaulë. Shkruani energjinë përmes formulës për katrorin e shumës së dy shprehjeve. Më pas, njehsoni energjinë nëse shpejtësia shtesë e trupit është 5 metra për sekondë, kurse masa e tij është 1 kilogram.

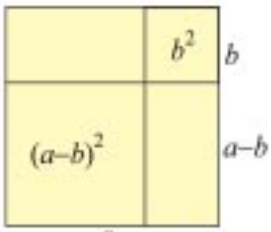
## Katrori i ndryshimit të dy shprehjeve

### AKTIVITET

Syprina e katrorit me brinjë $a - b$ është $(a - b)^2$ (Vizatimi 3).

Nga ana tjetër, syprina e këtij katrori mund të fitohet edhe nëse nga syprina e katrorit me brinjë $a$ e zbresim syprinën e dy drejtkëndëshave me brinjë $a$ dhe $b$ dhe shtojmë syprinën e katrorit me brinjë $b$.

Shkruani barazimin. Çfarë përfunduat?



Vizatimi 3

Të llogaritim $(A - B)^2$. Kemi

$(A - B)^2 = (A - B) \cdot (A - B) = A^2 - \underline{AB} - \underline{AB} + B^2 = A^2 - 2AB + B^2$ Shumëzojmë dhe reduktojmë

Katrori i ndryshimit të dy shprehjeve është i barabartë me shumën e katrorëve të shprehjeve zvogëluar për dyfishin e prodhimit të këtyre shprehjeve:

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \qquad (3)$$

Formula (3) quhet **formula për katrorin e ndryshimit të dy shprehjeve.**

### SHEMBULLI 7

$(3a^2b - 2ab)^2 = (3a^2b)^2 - 2 \cdot 3a^2b \cdot 2ab + (2ab)^2$ E përdorim formulën për katrorin e ndryshimit të dy shprehjeve.

$= 9a^4b^2 - 12a^3b^2 + 4a^2b^2$

Formula për katrorin e ndryshimit të dy shprehjeve mund të përdoret edhe për gjetjen e shpejtë të katrorëve të numrave.

### SHEMBULLI 8

$38^2 = (40 - 2)^2 = 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 2 + 2^2$ E përdorim formulën për katrorin e ndryshimit të dy shprehjeve.

$= 1600 - 160 + 4 = 1444$

### DETYRA 3

Droni mund të fluturojë në lartësinë maksimale, mbi nivelin e detit, prej $3x^2$ metrash dhe lartësinë minimale, mbi nivelin e detit, prej $2x$ metrash. Gjeni katrorin e ndryshimit të këtyre lartësive përkatëse mbi nivelin e detit?

## Zbërthimi i shumës së kubeve të dy shprehjeve në shumëzues

Të njehsojmë prodhimin $(A + B) \cdot (A^2 - AB + B^2)$. Kemi

$(A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + \underline{A^2B} - \underline{A^2B} - \underline{AB^2} + \underline{AB^2} + B^3 = A^3 + B^3$

Kështu arrijmë deri te formula $(A + B) \cdot (A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$

### SHEMBULLI 9

$(3+x)\cdot(9-3x+x^2)=3^3+x^3=27+x^3$

Nëse formulën e mësipërme e shkruajmë në renditjen e kundërt, do të fitojmë formulën

$$A^3+B^3=(A+B)\cdot(A^2-AB+B^2) \qquad (4)$$

që e quajmë **formula e shumës së kubeve** të dy shprehjeve.

### SHEMBULLI 10

$8x^3+27=(2x)^3+3^3=(2x+3)\cdot(4x^2-6x+9)$ E zbatojmë formulën për shumën e kubeve.

## Zbërthimi i ndryshimit të kubeve të dy shprehjeve në shumëzues

Të njehsojmë prodhimin $(A-B)\cdot(A^2+AB+B^2)$. Kemi

$(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3+\underline{A^2B}-\underline{A^2B}+\underline{AB^2}-\underline{AB^2}-B^3=A^3-B^3$

Kështu arrijmë deri te formula $(A-B)\cdot(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$

### SHEMBULLI 11

$(m-2)\cdot(m^2+2m+4)=m^3-8$

Nëse formulën e mësipërme e shkruajmë në renditjen e anasjellët, atëherë fitojmë formulën

$$A^3-B^3=(A-B)\cdot(A^2+AB+B^2) \qquad (5)$$

që e quajmë **formula e ndryshimit të kubeve** të dy shprehjeve.

### SHEMBULLI 12

$8-x^3=2^3-x^3=(2-x)\cdot(4+2x+x^2)$ E përdorim formulën për ndryshimin e kubeve.

### DETYRA 4

Kryeni operacionet e dhëna:

a) $(x-1)^3$ b) $(x+2)^3$ c) $(x+1)\cdot(x^2-x+1)$ ç) $(x-1)\cdot(1+x+x^2)$

### DETYRA PËR USHTRIME

**1.** Gjeni katrorët dhe kubet në vijim:

a) $(x-5)^2$ b) $(3x+2)^2$ c) $(1-3a)^2$ ç) $(3x-y+5)^2$

d) $(x+y-z)^2$ dh) $(-8x^2-7z)^2$ e) $(2a+b)^3$ ë) $(x-3y)^2$

**2.** Gjeni katrorin e binomit:

a) $(0{,}6x-1)^2$ b) $(1{,}3x+0{,}1y)^2$ c) $\left(5y+\frac{1}{2}\right)^2$ ç) $\left(\frac{5}{6}y+2z\right)^2$

3. Kryeni operacionet e kërkuara dhe thjeshtoni shprehjet:
   a) $x(x+2)(x-2)-(x-3)(x^2+6x+9)$ b) $(a+b+c)(a+b-c)-(a+b)^2$

4. Njehsoni në mënyrën më të shpejtë:
   a) $42^2$ b) $29^2$ c) $75^2$ ç) $198^2$ d) $9{,}5^2$ dh) $1{,}9^2$ ë) $25{,}8^2$

5. Kryeni shumëzimin në mënyrën më të shpejtë:
   a) $(5x+3y)\cdot(5x-3y)$ b) $(1+a)\cdot(1-a)$ c) $(2c+3b)\cdot(2c-3b)$

6. Njehsoni në mënyrën më të shpejtë:
   a) $62\cdot 58$ b) $7{,}01\cdot 6{,}99$ c) $87^2-13^2$ ç) $73^2-27^2$

7. Një kopsht me bar ka formë katrori me brinjë të gjatë $12x$ metra. Në kopsht ka një liqen të vogël në formë katrori me brinjë të gjatë $5y$ metra.
   Shkruani një shprehje për syprinën e barit përreth liqenit.

8. Fotografia më e madhe ka $1024^2$ pikselë, kurse më e vogla $800^2$ pikselë. Sa është ndryshimi i numrit të pikselëve i fotografisë më të madhe dhe asaj më të vogël.

## HULUMTIM

Në vizatimin 4 është dhënë trekëndëshi i numrave natyrorë i quajtur trekëndëshi i Paskalit. Gjithë numrat në skajin e djathtë dhe të majtë janë njësha në secilin rresht. Në secilin rresht të radhës është shkruar shuma e dy numrave më të afërt të rreshtit paraprak. Kështu, për shembull,

$2=1+1, 3=1+2, 3=2+1, 4=1+3, 6=3+3, 4=3+1$ etj.



Vizatimi 4

Nga ana tjetër, për cilët do numra realë $a$ dhe $b$, t'i shkruajmë fuqitë e shumës së tyre:

$(a+b)^0=1$

$(a+b)^1=1\cdot a^1+1\cdot b^1$

$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=1\cdot a^2+2\cdot a^1b^1+1\cdot b^2$

$(a+b)^3=(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)=1\cdot a^3+3\cdot a^2b^1+3\cdot a^1b^2+1\cdot b^3$

Vëreni se mbledhësit i renditim, duke filluar nga fuqia me tregues më të madh të $a$.

Hulumtoni dhe gjeni lidhjen mes koeficientëve të mbledhësve dhe numrave në trekëndëshin e Paskalit. Shtoni rreshta të tjerë të trekëndëshit të Paskalit, kurse pa shumëzuar gjeni, për shembull, fuqitë:

$(a+b)^5, (a+b)^6, (a+b)^7$ etj.

# 2.10. Pjesëtimi i shprehjeve racionale të plota

## Pjesëtimi i monomit me monom

**AKTIVITET**

Sipas cilës rregull mund të realizoni pjesëtimin: a) $x^4 : x^2$ b) $a^7 : b^2$

**SHEMBULLI 1**

Ta kryejmë pjesëtimin $12a^3b^2c : (-3ab^2)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

$$12a^3b^2c : (-3ab^2) = \frac{12}{-3} \cdot \frac{a^3}{a} \cdot \frac{b^2}{b^2} \cdot c$$
$$= -4a^2c$$

Koeficienti i të pjesëtueshmit pjesëtohet me koeficientin e pjesëtuesit. Fuqitë e vlerës kryesore të pjesëtueshmit pjesëtohen me fuqitë e pjesëtuesit që kanë baza të njëjta. Herësit e fituar shumëzohen.

**Monomi pjesëtohet me monom** ashtu që koeficienti i të pjesëtueshmit pjesëtohet me koeficientin e pjesëtuesit, kurse fuqitë përkatëse të vlerës kryesore të pjesëtueshmit pjesëtohen me fuqitë përkatëse të pjesëtuesit që kanë baza të njëjta, e më pas herësit e fituar shumëzohen. Gjatë pjesëtimit të monomit me monom, herësi nuk është gjithmonë monom (shprehje e plotë racionale).

**SHEMBULLI 2**

Pjesëto monomin $6a^5$ me monomin $5a^2b$.

$$6a^5 : (5a^2b) = \frac{6}{5} \cdot \frac{a^5}{a^2} \cdot \frac{1}{b}$$
$$= \frac{6a^3}{5b}$$

Herësi është shprehje thyesore algjebrike dhe e shkruajmë si thyesë.

Sipas kësaj, nëse monomi – pjesëtues ka ndonjë ndryshore ose fuqi që nuk paraqitet te monomi – i pjesëtueshmi, ose përmbahet te pjesëtuesi me tregues më të madh se sa te i pjesëtueshmi, atëherë herësi do të jetë shprehje thyesore algjebrike.

**DETYRA 1**

Gjeni herësin: a) $10x^3y^4z : (5xy^2)$ b) $-4x^2y^3 : (8xy^3)$ c) $9x^4yz : (12xy^2z)$ ç) $b^3axy : (3ba^2x^2)$

## Pjesëtimi i polinomit me monomin

**AKTIVITET**

Njehsoni herësit me ndihmën e rregullës për pjesëtimin e shumës algjebrike me numër:

a) $(7 - 5 + 6) : 2$ b) $(4^3 - 16^3 + 2^4) : 2^2$

### SHEMBULLI 3

Ta pjesëtojmë polinomin $6a^5b^3 - 5a^4b + 7{,}6a^3b^2c^2$ me monomin $2a^3b$.

Sipas rregullës së pjesëtimit të shumës algjebrike me numër, firojmë:

$(6a^5b^3 - 5a^4b + 7{,}6a^3b^2c^2) : (2a^3b) = 6a^5b^3 : (2a^3b) - 5a^4b : (2a^3b) + 7{,}6a^3b^2c^2 : (2a^3b) = 3a^2b^2 - 2{,}5a + 3{,}8bc^2$

**Polinomi pjesëtohet me monom** ashtu që çdo kufizë e polinomit pjesëtohet me monomin e dhënë, kurse herësit e fituar mblidhen.

### SHEMBULLI 4

Kryeni pjesëtimin e polinomit $-12x^4 + 9x^3y - 6x^2y^2$ me monomin $-3x^2$.

$(-12x^4 + 9x^3y - 6x^2y^2) : (-3x^2) = -12x^4 : (-3x^2) + 9x^3y : (-3x^2) - 6x^2y^2 : (-3x^2) = 4x^2 - 3xy + 2y^2$

### DETYRA 2

Energjia e përgjithshme, që e harxhon grupi i qelizave për një proces të caktuar, është proporcionale me polinomin $16x^4y^2 + 24x^3y^3$. Energjia, që harxhohet nga secila qelizë e veçantë, është proporcionale me polinomin $8x^3y^2$. Sa energji harxhon një qelizë e veçantë kundrejt energjisë që harxhohet nga i gjithë grupi i qelizave?

## Pjesëtimi i polinomit me polinom

### AKTIVITET

Nëse $(2x^2 - 5) \cdot (3x - 2) = 6x^3 - 4x^2 - 15x + 10$, atëherë me çka është e barabartë

$(6x^3 - 4x^2 - 15x + 10) : (2x^2 - 5)$, dhe $6x^3 - 4x^2 - 15x + 10 : (3x - 2)$?

Si është fituar kufiza e parë e prodhimit$6x^3 - 4x^2 - 15x + 10$?

Të pjesëtohet një polinom me një tjetër, do të thotë të gjendet polinomi i tretë i cili i shumëzuar me të dytin jep polinomin e parë.

### SHEMBULLI 5

$(a^2 - 4) : (a + 2) = (a - 2)$ sepse $(a + 2) \cdot (a - 2) = (a^2 - 4)$

Herësi që fitohet me pjesëtimin e një polinomi me polinom vetëm në raste të rralla mund të shprehet në formë të polinomit ose monomit. Në çdo rast tjetër, herësin e dy polinomeve e shkruajmë si shprehje thyesore algjebrike.

### SHEMBULLI 6

$(a^2 + b^2) : (a + b) = \frac{a^2 + b^2}{a + b}$ Nuk ekziston polinomi i cili kur të shumëzohet me $a + b$ të jep $a^2 + b^2$.

Le të jenë $A$ dhe $B$ dy polinome të dhëna, ashtu që $B \neq 0$. Gjatë pjesëtimit të polinomit A me polinomin B fitohet herësi (polinomi) Q dhe mbetja (polinomi) $R$.
Shkruajmë $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$ ose $A = B \cdot Q + R$.
Nëse $R = 0$ themi se polinomi A është **i pjesëtueshëm** me polinomin $B$.

## SHEMBULLI 7

$(x - 3 + 2x^2) : (3 + 2x) =$

$(2x^2 + x - 3) : (2x + 3) = x - 1$

$\pm 2x^2 \pm 3x$

$-2x - 3$

$\mp 2x \mp 3$

$0$

Shkruajmë
$(x - 3 + 2x^2) : (3 + 2x) = x - 1$

I pjesëtueshmi dhe pjesëtuesi radhiten sipas fuqive të ndryshoreve, nga fuqia më e madhe te më e vogla.

Kufiza e parë e të pjesëtueshmit $2x^2$ pjesëtohet me kufizën e parë të pjesëtuesit $2x^2$ dhe fitohet kufiza e parë e herësit, $x$.

Kufiza e parë e herësit shumëzohet me pjesëtuesin dhe prodhimi i fituar zbritet nga i pjesëtueshmi.

Mbetja e parë e fituar është $-2x - 3$.

Kufiza e parë e mbetjes së parë pjesëtohet me kufizën e parë të pjesëtuesit dhe fitohet kufiza e dytë e herësti, $-1$.

Kufiza e dytë e herësit shumëzohet me pjesëtuesin dhe prodhimi i fituar zbritet nga mbetja e parë $-2x - 3$.

Fitojmë mbetjen e dytë zero, me çka kemi përfunduar me pjesëtimin.

## DETYRA 3

Pjesëtoni polinomin $x^3 - 1 + x + 2x^3$ me polinomin $1 + x + x^2$.

## SHEMBULLI 8

Pjesëtoni polinomin $x^4 - x^2 + 2$ me polinomin $x^2 - x + 1$.

$(x^4 - x^2 + 2) : (x^2 - x + 1) = x^2 + x - 1$

$\pm x^4 \mp x^3 \pm x^2$

$x^3 - 2x^2 + 2$

$\pm x^3 \mp x^2 \pm x$

$-x^2 - x + 2$

$\mp x^2 \pm x \mp 1$

$-2x + 3$

Kufiza e parë e mbetjes së tretë $-2x + 3$ nuk është e pjesëtueshme me kufizën e parë të pjesëtuesit, me çka e përfundojmë pjesëtimin.

Shkruajmë $(x^4 - x^2 + 2) : (x^2 - x + 1) = x^2 + x - 1 + \frac{-2x + 3}{x^2 - x + 1}$

Te polinomet me më shumë ndryshore, të pjesëtueshmin dhe pjesëtuesin i renditim sipas fuqive të njërës nga ndryshoret, nga më e madhja kah më e vogla.

## SHEMBULLI 9

Pjesëtoni polinomin $17x^2y^2 + 3x^4 - 33xy^3 - 9x^3y + 22y^4$ me polinomin $x^2 + 2y^2 - 3xy$.

$(17x^2y^2 + 3x^4 - 33xy^3 - 9x^3y + 22y^4) : (x^2 + 2y^2 - 3xy) = 3x^2 + 11y^2$
$(3x^4 - 9x^3y + 17x^2y^2 - 33xy^3 + 22y^4) : (x^2 - 3xy + 2y^2) = 3x^2 + 11y^2$
$\pm 3x^4 \mp 9x^3y \pm 6x^2y^2$
$11x^2y^2 - 33xy^3 + 22y^4$
$\pm 11x^2y^2 \mp 33xy^3 \pm 22y^4$
$0$

Shkruajmë $(17x^2y^2 + 3x^4 - 33xy^3 - 9x^3y + 22y^4) : (x^2 + 2y^2 - 3xy) = 3x^2 + 11y^2$

## DETYRA 4

Një arkitekt projekton panele dekorative prej qelqi për një ndërtesë. Syprina e përgjithshme e qelqit me të cilën disponon ai është $(18x^3 + 12x^2)$ metra katrorë. Secili panel qelqi ka $(6x^2 + 4x)$ metra katrorë.

a) Sa panele mund të bëj arkitekti nga sasia në dispozicion e qelqit?

b) A do të ketë mbetje të qelqit?

## DETYRA PËR USHTRIME

**1.** Kryeni pjesëtimin e monomeve:

a) $12x : (-3)$ b) $(-6a^3b^2c) : (-2a^2bc)$ c) $3x^2y^2z : (-5x^2yz)$ ç) $-9ab^2 : 3ab$

**2.** Kryeni pjesëtimin:

a) $(12a - 15b) : 3$ b) $(4x^3y - 12x^4y^3) : (-4x^2y)$

c) $(6a^2x^4 - 9a^3x^5 + 15a^4x^3) : ax^3$ ç) $(-15a^3x^5 + 10a^4x^4 - 25a^5x^3) : (-5a^3x^3)$

**3.** Kryeni operacionet e dhëna me shprehjet:

a) $(a^2 - 2ab) \cdot 3a + (6ab^3 - 12a^4b^2) : 3ab$ b) $(15a^2x^3 - 6a^3x^2) : (-3a^2x^2) - 2x^2 \cdot (3 + 4a^2x)$

c) $(x + 3y)(x - 3y) - \frac{1}{4}(2x + y)(2x - y) : \frac{y}{2}$ ç) $(10a^7x^4 - a^8x^3) : (-0{,}3a^2x^2) + 10a^2 \cdot (0{,}2a^2x + 1)$

**4.** Kryeni pjesëtimin e polinomeve:

a) $(x^4 + x + 1) : (x^3 + x + 1)$ b) $(3x^2 + 4x - 2) : (2x^2 - 3x + 5)$

c) $(6a^3b - 11a^2b^2 + b^4) : (3a - b)$ ç) $(3x^5 - 8x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 3x - 1) : (x^2 - 2x + 1)$

**5.** Provoni nëse polinomi $x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x - 3$ është i pjesëtueshëm me binomin:

a) $x - 2$ b) $x - 1$ c) $x + 2$ ç) $x + 3$

**6.** Me anë të formulave për shumëzim të shkurtuar, kryeni pjesëtimin:

a) $(x^2 + 2x + 1) : (x + 1)$ b) $(x^2 - y^2) : (x^2 + xy + y^2)$ c) $(a^3 + 8) : (a + 2)$

ç) $(1 - 9x^2) : (1 + 3x)$ d) $(9 - 12x + 4x^2) : (3 - 2x)$ dh) $(x^3 - 8) : (x - 2)$

**7.** Laboratori i fizikës hulumton punën që kryen makineria që ushtron forcë për të lëvizur një objekt. Puna e përgjithshme e kryer nga makineria është $(20x^3 + 5x^2 + 10x)$ xhaulë. Puna që kryen makineria në intervalin prej një sekonde është $5x$ xhaulë. Sa sekonda i duhen makinerisë që ta kryej gjithë punën?

8. Një inxhinier instalon kabllot në ndërtesë e cila është në ndërtim. Gjatësia e përgjithshme e kabllos me të cilën disponon është $(24x^3 + 36x^2 + 12x)$ metra. Për çdo banesë i duhen $(6x^2 + 9x + 3)$ metra kabëll. Në sa banesa mund të instalojë kabllot? Sa metra kabëll do t'i ngel?

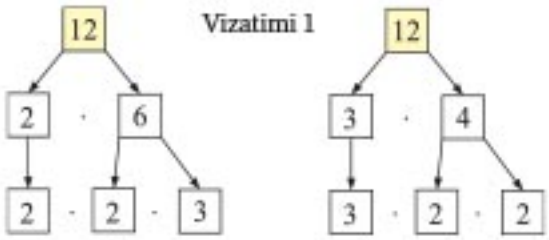
# 2.11. Mënyra të zbërthimit të polinomeve në shumëzues të thjeshtë

## Zbërthimi i polinomit në shumëzues të thjeshtë

**AKTIVITET**

Paraqitja e numrit në formën e prodhimit të numrave të thjeshtë quhet **zbërthim i numrit në shumëzues të thjeshtë.**
Shqyrtoni pemën në vizatimin 1 dhe sqaroni zbërthimin e numrit 12 në shumëzues të thjeshtë.

Vizatimi 1




$2a + 2b = 2(a + b)$ Polinomi është paraqitur në formën e prodhimit të monomit dhe polinomit me zbatimin e ligjit distributiv të shumëzimit ndaj mbledhjes.

Paraqitja e shprehjes së plotë racionale në formën e shprehjeve të plota racionale që më tej nuk mund të zbërthehen quhet **zbërthim i polinomit në shumëzues të thjeshtë.**

Për zbërthimin e polinomeve, nuk ka një rregull të përgjithshme me anë të së cilës do të kryhen transformimet e nevojshme. Këtu do të nënvizojmë disa veprime për zbërthimin e polinomeve që më shpesh përdoren.

## Zbërthimi me nxjerrjen para kllape të shumëzuesit të përbashkët

**AKTIVITET**

Kryeni shumëzimin:a) $3(x + y)$ b) $(x + y)\,3$.
Pasi të keni kryer shumëzimin, krahasoni prodhimet e fituara.

Zbërthimi i polinomeve në shumëzues me nxjerrjen para kllape të shumëzuesit të përbashkët bëhet përmes ligjit distributiv të shumëzimit. Kështu, nga identitetet

$m(a + b - c) = ma + mb - mc$ dhe $(a + b - c)\,m = am + bm - cm$

me ndihmën e ligjit distributiv të majtë dhe të djathtë fitohet:

$ma + mb - mc = m(a + b - c)$ dhe $am + bm - cm = (a + b - c)\,m$

### SHEMBULLI 1

Zbërtheni në shumëzues të thjeshtë polinomin $10a^3bx^2 - 5a^3b^2x - 15a^2b^3$.

Numri 5 është pjesëtues i përbashkët i gjithë koeficientëve të polinomit.

Gjitha kufizat e polinomit kanë akoma shumëzues të përbashkët $a$ dhe $b$ në fuqi të ndryshme. Ato mund të nxirren para kllape me treguesit më të vegjël të fuqisë, $a$ në fuqinë e dytë dhe $b$ në fuqinë e parë.

Ndryshorja $x$ nuk është shumëzues i përbashkët, sepse nuk përmbahet në kufizën e tretë.

Prandaj, shumëzues i përbashkët i të gjitha kufizave të polinomit të dhënë është $5a^2b$.

Monomin e gjetur e nxjerrim para kllape, kurse në kllapa e shkruajmë herësin e pjesëtimit të polinomit të dhënë me shumëzuesin e përbashkët $5a^2b$:

$10a^3bx^2 - 5a^3b^2x - 15a^2b^3 = 5a^2b(2ax^2 - abx - 3b^2)$



Nëse të gjitha kufizat e polinomit të dhënë kanë një shumëzues të njëjtë të përbashkët, ai mund të nxirret para kllape. Atëherë në kllapa mbetet polinomi i cili fitohet kur polinomi i dhënë do të pjesëtohet me shumëzuesin e përbashkët të nxjerrë para kllape.

### SHEMBULLI 2

Para kllape mund të nxirret edhe vetëm shumëzuesi $-1$.

a) $b - a = -(-b + a) = -(a - b)$ b) $1 - x = -(x - 1)$

Shumëzuesi i përbashkët që nxirret para kllape mund të jetë jo vetëm monom, por edhe polinom.

### SHEMBULLI 3

Zbërtheni në shumëzues të thjeshtë polinomin $2a(x - 3) + b(x - 3) - 5c(x - 3)$.

$2a(x - 3) + b(x - 3) - 5c(x - 3) = (x - 3)(2a + b - 5c)$

### DETYRA 1

Zbërthe ni në shumëzues të thjeshtë polinomin:

a) $-x^4 - x^7 - x^3$ b) $12x^2y - 18xy - 30xy^3$ c) $(y + 3)(x + 5) - (-y - 3)$

### DETYRA 2

Energjia e përgjithshme e trupit që lëviz me shpejtësi $v$ mund të shprehet si $5v^2 + 10v$. Zbërtheni polinomin në shumëzues që më lehtë të llogaritësh energjinë për shpejtësinë përkatëse.

## Zbërthimi me grupim të kufizave

Zbërthimi i polinomeve në shumëzues me grupim të kufizave bëhet sipas rregullës së shumëzimit të polinomit me polinom:

$(a-b)(c+d) = (a-b)c + (a-b)d = ac - bc + ad - bd.$

Nëse polinomi duhet të zbërthehet në shumëzues, transformimin e bëjmë në renditjen e anasjellët:

$ac - bc + ad - bd = (a-b)c + (a-b)d = (a-b)(c+d).$

Këtu e grupojmë kufizën e parë dhe të dytë dhe nga to nxjerrim $c$ përpara kllape, më pas e grupojmë kufizën e tretë dhe të katërt dhe nga to nxjerrim $d$ para kllape.

Në shprehjen e fituar $(a-b)c + (a-b)d$, shumëzues i përbashkët është $a-b$. Me nxjerrjen e tij përpara kllape fitojmë zbërthimin $(a-b)(c+d)$.

Kjo mënyrë e zbërthimit të polinomit në shumëzues quhet **zbërthim me grupim.**

Le ta zbërthejmë, në shumëzues të thjeshtë, polinomin $3ax + 2b - bx - 6a$.

$3ax + 2b - bx - 6a = (3ax - 6a) + (2b - bx) =$ Grupojmë kufizën e parë me të katërtën dhe të dytën me të tretën.

$= 3a(x-2) - b(x-2) =$ Nxjerrim shumëzuesin e përbashkët $3a$ nga grupi i parë dhe $b$ me shenjën "–" nga grupi i dytë.

$= (x-2)(3a-b)$ E nxjerrim polinomin $x-2$ para kllape si shumëzues të ri të përbashkët.



Kufizat e polinomit të dhënë grupohen ashtu që secili grup ka shumëzues të përbashkët. Pas nxjerrjes së shumëzuesit të përbashkët me shenjën përkatëse nga secili grup përpara kllape, në kllapa duhet të fitohet një polinom i vetëm i njëjtë. Pastaj, ky polinom nxirret para kllape si shumëzues i përbashkët i ri.

### SHEMBULLI 4

Zbërtheni polinomin në shumëzues të thjeshtë:

a) $2xy - 2y - x + 1$ b) $ax + bx + kay + kby$

a) $2xy - 2y - x + 1 = 2y(x-1) - (x-1) = (x-1)(2y-1)$

b) $ax + bx + kay + kby = (a+b)x + (a+b)ky = (a+b)(x+ky)$

### DETYRA 3

Një sistem mekanik ka energji të dhënë me polinomin $x^3 + 3x^2 + 2x + 6$. Zbërtheni polinomin në shumëzues të thjeshtë me qëllim thjeshtimin e provave se për cilat vlera sistemi sillet në mënyra të ndryshme.

## Zbërthimi me zbatimin e formulave për shumëzimin e shkurtuar

### AKTIVITET

Njehsoni në mënyrën më të shpejtë:

a) $65^2 - 64^2$ b) $3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 4^2$ c) $4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 7 + 7^2$ ç) $4^3 + 5^3$ d) $2^3 - 7^3$

Sipas cilave formula për shumëzim të shkurtuar ke kryer njehsimet?

$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$
$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$
$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$
$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

Disa polinome mund të zbërthehen në shumëzues, me zbatimin e formulave për shumëzimin e shkurtuar, të shkruara në renditjen e kundërt të anëve të formulave:

## SHEMBULLI 5

Zbërtheni polinomin në shumëzues të thjeshtë:

a) $x^2 - 25$ b) $9x^2 - y^2$ c) $a^2x^2 - b^2y^2$

a) $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$ b) $9x^2 - y^2 = (3x - y)(3x + y)$ c) $a^2x^2 - b^2y^2 = (ax - by)(ax + by)$

$x^2 - 5^2$ $(3x)^2 - y^2$ $(ax)^2 - (by)^2$

## SHEMBULLI 6

Zbërtheni polinomin në shumëzues të thjeshtë:

a) $x^2 + 8x + 16$ b) $25y^2 - 10y + 1$ c) $16a^2 - 24ab + 3b^2$

a) $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ b) $25y^2 - 10y + 1 = (5y - 1)^2$ c) $16a^2 - 24ab + 3b^2 = (4a - 3b)^2$

$x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2$ $(5y)^2 - 2 \cdot (5y) \cdot 1 + 1^2$ $(4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot 3b + (3b)^2$

## SHEMBULLI 7

Zbërtheni polinomin në shumëzues të thjeshtë:

a) $8x^3 + 1$ b) $y^3 - 8$ c) $27a^3 - b^3$

a) $8y^3 + 1 = (2y + 1)(4y^2 - 2y + 1)$ b) $y^3 - 8 = (y - 2)(y^2 + 2y + 4)$ c) $8a^3 - b^3 = (2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)$

$(2y)^3 + 1^3$ $y^3 - 2^3$ $(2a)^3 - b^3$

## DETYRA 4

Zbërtheni polinomin në shumëzues të thjeshtë:

a) $(3x + 2)^2 - 16y^2$ b) $49x^2 + 56xy + 16y^2$ c) $25a^2 - 30ab + 16b^2$
ç) $a^3b^3 + 125$ d) $27y^3 - 8z^3$

## Zbërthimi me zbatim të njëpasnjëshëm të disa mënyrave

Në disa raste, që të kryhet deri në fund zbërthimi i polinomit, duhet të përdoren njëra pas tjetrës disa nga tri mënyrat e mësipërme.

### SHEMBULLI 8

Zbërthe polinomin në shumëzues të thjeshtë:
a) $24x^3y^2 - 3y^2$ b) $3x^3y^2 - 15x^2y + 3x^3y - 15x^3$

a) $24x^3y^2 - 3y^2 = 3y^2(8x^3 - 1)$
$= 3y^2(2x-1)(4x^2 + 2x + 1)$

b) $3x^2y^2 - 15x^2y + 3x^3y - 15x^3 = 3x^2(y^2 - 5y + xy - 5x)$
$= 3x^2(y(y - 5) + x(y - 5))$
$= 3x^2(y - 5)(y + x)$

Fillimisht vërejmë se nëse të gjitha kufizat e polinomit kanë shumëzues të përbashkët të cilët nxirren para kllape.
Më pas, vërejmë nëse polinomi që fitohet në kllapa mund të zbërthehet me grupim ose me zbatimin e ndonjërës prej formulave për shumëzim të shkurtuar.

### DETYRA PËR USHTRIME

Zbërtheni polinomin në shumëzues të thjeshtë:

**1.** a) $3x + 6y$ b) $2ab - 2ac$ c) $7x^5 + 21x^3$
ç) $27ab^3 - 9b^4$ d) $a^2y - ay^3$ dh) $9ax - 6ay + 12az$

**2.** a) $2a(b - 3) + 5c(b - 3)$ b) $a(x + 1) - b(x + 1)$ c) $5(x + y) - 2(x + y)^2$
ç) $2(y - x)y^2 - x^2(y - x)$ d) $3(x - y)^2 - (x + y)(x - y)$ dh) $a(x^2 + 1) - b(x^2 + 1) - c(x^2 + 1)$

**3.** a) $a^2b^2 - 4$ b) $100x^2 - 1$ c) $\frac{1}{9}a^2 - c^2$ ç) $16 - a^4$

**4.** a) $a^3 - 8$ b) $27x^3 + 1$ c) $8m^3 - n^3$ c) $x^3y^3 - z^3$

**5.** a) $5ax^2 - 10ax - bx + 2b - x + 2$ b) $xyz + x^2y^2 + 3x^4y^5 + 3x^3y^4z - xy - z$
c) $ax^3 + bx^2y + cx^2 + 3ax + 3by + 3c$ ç) $12mx^2 - 9my + 15m - 8nx^2 - 6ny - 10n$

**6.** a) $4a^2 - b^2 - 2bc - c^2$ b) $x^2 - 3x - y^2 + 3y$ c) $xa^3 - xb^3 - ya^3 + yb^3$
ç) $9x^2 - (y^2 + z^2)^2$ d) $9(a - b)^2 - 4(a + b)^2$ dh) $x^2 - y^2 - x + y$

**7.** Njehsoni vlerën e shprehjes në mënyrën më të shpejtë:
a) $3ab - 0{,}5a$, nëse $a = 25$ dhe $b = 3{,}5$ b) $4x^2y - 20xy^2$, nëse $x = 2{,}4$ dhe $y = 0{,}5$
c) $327 \cdot 35 + 73 \cdot 35$ ç) $285^2 - 215^2$ d) $475^2 - 25^2$

**8.** Numri i përgjithshëm i baktereve të një kolonie, $t$ orë pas fillimit të eksperimentit, është $3t^2 + 6t$. Zbërtheni polinomin në shumëzues dhe llogaritni numrin e baktereve 15 orë pas fillimit të eksperimentit.

**9.** Një inxhinier projekton një pllakë metalike drejtkëndore syprina e së cilës është dhënë me $(x^2 + 5x + 6)$ metra katrorë. Zbërtheni shprehjen në shumëzues për të gjetur gjatësinë dhe gjerësinë e mundshme të pllakës.

# 2.12. Pjesëtuesi më i madh i përbashkët (PMP) dhe shumëfishi më i vogël i përbashkët (SHVP) i shprehjeve racionale të plota

## Pjesëtuesi më i madh i përbashkët i shprehjeve racionale të plota

### AKTIVITET

Gjeni PMP (18, 24) dhe sqaroni procedurën.



**Pjesëtues i përbashkët** i dy ose më shumë shprehjeve racionale të plota është shprehje racionale ë plotë me të cilën të gjitha shprehjet racionale të dhëna janë të pjesëtueshme pa mbetje.

### SHEMBULLI 1

a) $2ax^2$ dhe $a^4xy^2$ — Shumëzues të përbashkët janë 1, $a$, $x$ dhe $ax$.

b) $ab(a-b)$ dhe $b(a-b)^2$ — Shumëzues të përbashkët janë 1, $b$, $a-b$ dhe $b(a-b)$.



Pjesëtuesi i përbashkët i disa shprehjeve racionale $A_1, A_2, ..., A_n$ që përmban më shumë shumëzues të përbashkët me tregues më të vegjël të mundshëm quhet pjesëtues më i madh i përbashkët i atyre shprehjeve, dhe shënohet me PMP $(A_1, A_2, ..., A_n)$

### SHEMBULLI 2

Gjeni pjesëtuesin më të madh të përbashkët të:

a) monomeve $14a^2b^2x$ dhe$42a^2b^3xy^2$ b) polinomeve $ab(a-b)$ dhe $b(a-b)^2$

a) $14a^2b^2x$ dhe $42ab^3xy^2$

$\text{PMP}(14, 42) = 14$ — E gjejmë PMP të të gjithë koeficientëve.

$\text{PMP}(14a^2b^2x, 42ab^3xy^2) = 14ab^2x$ — I shkruajmë të gjitha ndryshoret ashtu që secila prej tyre merret me treguesin më të vogël që shfaqet tek monomet.

b) $ab(a-b)$ dhe $b(a-b)^2$

$\text{PMP}(ab(a-b), b(a-b)^2) = b(a-b)$ — I shumëzojmë të gjithë shumëzuesit e përbashkët të thjeshtë që kanë tregues më të vogël.

### SHEMBULLI 3

Gjeni PMP $(3x^2 + 6x + 3, 9x^2 - 9, 6x + 6)$.

$3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = \underline{3(x+1)^2}$ Polinomet i zbërthejmë në shumëzues të thjeshtë.

$9x^2 - 9 = 9(x^2 - 1) = \underline{9(x-1)(x+1)}$

$6x + 6 = \underline{6(x+1)}$

$\text{PMP}(3x^2 + 6x + 3, 9x^2 - 9, 6x + 6) = 3(x+1)$ I shumëzojmë të gjithë shumëzuesit e përbashkët të thjeshtë që kanë tregues më të vogël.

### SHEMBULLI 4

$\text{PMP}(x - y, 3x^2 + y) = 1$

Shprehjet $x - y$ dhe $3x^2 + y$ janë **shprehje reciprokisht të thjeshta**.

### DETYRA 1

Në një eksperiment biologjik, rritja e dy bimëve ngadalësohet me norma të ndryshme në varshmëri nga mungesa e materieve ushqyese $x$:

Bima A me normë $\frac{20}{x^2 - 1}$

Bima B me normë $\frac{15}{x^2 - 6x + 9}$.

Gjeni PMP të emëruesve $x^2 - 1$ dhe $x^2 - 6x + 9$.

## Shumëfishi më i vogël i përbashkët i shprehjeve racionale të plota

### AKTIVITET

Gjeni SHVP (12, 15) dhe shpjegoni procedurën.



**Shumëfish i përbashkët** i dy ose më shumë shprehjeve racionale të plota është shprehje racionale e plotë e cila pjesëtohet, pa mbetje, me secilën nga shprehjet e dhëna.

### SHEMBULLI 5

$4a^3b$ dhe $6a^2x^4$ Shumëfisha të përbashkët janë $12a^3bx^4$, $24a^5b^3x^6$, $60a^3bx^5$ etj.

Me siguri vërejtët se disa shprehje racionale të plota kanë pafund shumë shumëfisha të përbashkët.



Shumëfishi i përbashkët i disa shprehjeve racionale të plota $A_1, A_2, ..., A_n$, që përmban më pak shumëzues të përbashkët me treguesit më të mëdhenj të mundshëm, quhet **shumëfishi më i vogël i përbashkët** i atyre shprehjeve dhe shënohet me SHVP $(A_1, A_2, ..., A_n)$.

## SHEMBULLI 6

Gjeni shumëfishin më të vogël të përbashkët të:
a) monomeve $4a^3b$ dhe $6a^2x^4$ b) polinomeve $15x^3y^2 - 15xy^4$ dhe $6x^2y + 12xy^2 + 6y^3$

a) $4a^3b$ dhe $6a^2x^4$

SHVP $(4, 6) = 12$ E gjejmë SHVP për të gjithë koeficientët.

SHVP $(4a^3b, 6a^2x^4) = 12a^3bx^4$ I shkruajmë të gjitha ndryshoret e përbashkëta dhe ato që nuk janë të tilla ashtu që secila prej tyre merret me reguesin më të madh me të cilin paraqitet tek monomet.

b) $15x^3y^2 - 15xy^4$ dhe $6x^2y + 12xy^2 + 6y^3$

$15x^3y^2 - 15xy^4 = 15xy^2(x^2 - y^2) = \underline{15xy^2(x - y)(x + y)}$

$6x^2y + 12xy^2 + 6y^3 = 6y(x^2 + 2xy + y^2) = \underline{6y(x + y)^2}$

Polinomet i zbërthejmë në shumëzues të thjeshtë

SHVP $(15x^3y^2 - 15xy^4, 6x^2y + 12xy^2 + 6y^3) = 30xy^2(x - y)(x + y)^2$
I shumëzojmë të gjithë shumëzuesit e thjeshtë, ashtu që secili prej tyre merret me treguesin më të madh.

## DETYRA 3

Në një eksperiment nga fizika, dy senzorë matin shpejtësinë e objektit i cili lëviz në varshmëri me kohën $t$ të shprehur me sekonda:
Senzori A mat shpejtësinë $\frac{50}{t^2 - 9}$ metra në sekondë,
Senzori A mat shpejtësinë $\frac{30}{t^2 - 4t + 3}$ metra në sekondë.
Gjeni SHVP të emëruesve $t^2 - 9$ dhe $t^2 - 4t + 3$.

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Gjeni PMP të numrave:
   a) 42 dhe 18 b) 105 dhe 45 c) 30 dhe 75 ç) 12, 32, 40 dhe 56.

2. Gjeni pjesëtuesin më të madh të përbashkët të shprehjeve:
   a) $3ab$ dhe $12ab^2$ b) $15x^3y^2$ dhe $24x^2y^3$ c) $5a(a + b)^2$ dhe $8a^2b(a + b)^3$
   ç) $x^2 - y^2$ dhe $x^3 + y^3$ d) $x^2y^2 - y^4, x^4 - x^2y^2$ dhe $x^3y - xy^3$

3. Gjeni SHVP të numrave:
   a) 12, 50, 45 dhe 18 b) 84, 56 dhe 21 c) 125, 100 dhe 450 ç) 96, 64 dhe 180.

4. Gjeni shumëfishin më të vogël të përbashkët të shprehjeve:
   a) $6a^2b^3$, $15ab^2$ dhe $24a^3bc^2$ b) $a(x+2)$ dhe $b(x+2)$ c) $x$ dhe $x^2+xy^2$
   ç) $a^2-9b^2$ dhe $a^3+3a^2b$ d) $x^2-x$, $1-x^2$, $1+x^3$ dhe $x^2+x+1$
   dh) $x^2-4y^2$, $3x^2-12xy+12y^2$ dhe $5y(x-2y)^3$

5. Dy koloni bakteresh shumëfishohen me normë të ndryshme në varshmëri të koncentrimit të antibiotikut $x$:
   Kolonia A me normë $\frac{20}{x^2-4x+4}$, kurse kolonia B me normë $\frac{15}{x^2-4}$.
   Gjeni PMP të emëruesve $x^2-4x+4$ dhe $x^2-4$.

6. Dy makineri lëshojnë ujë nga rezervuari me shpejtësi të ndryshme:
   Makineria A me shpejtësi $\frac{40}{y^2-36}$ litra për sekondë,
   Makineria B me shpejtësi $\frac{60}{y^2-12y+36}$ litra për sekondë.
   Gjej SHVP të emëruesve $y^2-36$ dhe $y^2-12y+36$.

# 2.13. Thyesa algjebrike. Zgjerimi dhe thjeshtimi i thyesës algjebrike

## Koncepti i thyesës algjebrike

### AKTIVITET

Fatura e përgjithshme që duhet ta paguajnë $x$ klientë në restorant është $(3x+12)$ denarë. Shkruani një shprehje e cila do të paraqes shumën që duhet të paguaj secili prej klinetëve.

Me siguri vërejtët se secili prej tyre duhet të paguaj $\frac{3x+12}{x}$ denarë.

Shprehja e fituar është shprehje thyesore algjebrike sepse përmban pjesëtim me ndryshore. Akoma më shumë, numëruesi dhe emëruesi janë shprehje të plota racionale.



Shprehja racionale thyesore që paraqet thyesë numëruesi dhe emëruesi i së cilës janë shprehje të plota racionale quhet **thyesë algjebrike**.

### DETYRA 1

Cilat nga shprehjet algjebrike janë thyesa algjebrike:

a) $\frac{2a^3-1}{5}$ b) $\frac{x-3}{y+2}$ c) $\frac{x}{y-7}-3x^2$ ç) $\frac{5p}{2q^2-1}$

Sqaroni përgjigjen tuaj.

Thyesat algjebrike, ashtu si edhe thyesat e rëndomta, kanë kuptim vetëm kur emëruesi nuk është i barabartë me zero. Prandaj, **vlerat e lejuara** të argumentit në një thyesë algjebrike janë vetëm ato vlera për të cilat emëruesi i asaj thyese është i ndryshëm nga zero.

### SHEMBULLI 1

Thyesa $\frac{a+3}{a-4}$, për $a=4$ nuk ka kuptim.

Vlerat e lejuara të argumentit $a$ janë gjitha vlerat $a \neq 4$.

### SHEMBULLI 2

Thyesa $\frac{x^2+1}{x-y}$, për $x=y$ nuk ka kuptim.

Të gjitha vlerat e lejuara të argumenteve $x$ dhe $y$ janë vlerat për të cilat $x \neq y$.

## Zgjerimi dhe thjeshtimi i thyesës algjebrike

### AKTIVITET

Vlera e thyesës nuk ndryshon nëse edhe numëruesin edhe emëruesin i shumëzojmë (i pjesëtojmë) me një numër të njëjtë të ndryshëm nga zero. Për shembull,

$$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{8}{12} \text{ dhe } \frac{6}{8}=\frac{6:2}{8:2}=\frac{3}{4}$$

Si quhet procedura e shumëzimit, përkatësisht e pjesëtimit të numëruesit dhe emëruesit të thyesës me një numër të njëjtë të ndryshëm nga zero?

### SHEMBULLI 3

Është dhënë thyesa algjebrike:

a) $\frac{a}{a+2}$, $a \neq -2$

$$\frac{a}{a+2}=\frac{a(a-2)}{(a+2)(a-2)}$$

Numëruesin dhe emëruesin i shumëzojmë me shprehjen e plotë algjebrike $a-2$, $a \neq 2$.

$$=\frac{a^2-2}{a^2-4},\ a \neq \pm 2$$

Thyesa algjebrike është zgjeruar me shprehjen e plotë algjebrike $a-2$, $a \neq 2$.

b) $\frac{a(b+2)^2}{3(b-1)(b+2)}$, $b \neq -2$, $b \neq 1$

$$\frac{a(b+2)^2}{3(b-1)(b+2)}=\frac{a(b+2)^2:(b+2)}{3(b-1)(b+2):(b+2)}$$

Numëruesin dhe emëruesin i pjesëtojmë me shprehjen e plotë algjebrike $b+2$, $b \neq -2$.

$$=\frac{a(b+2)}{3(b-1)},\ b \neq -2,\ b \neq 1$$

Thyesa algjebrike është thjeshtuar me shprehjen e plotë algjebrike $b+2$, $b \neq -2$.



Për çdo thyesë algjebrike $\frac{A}{B}$, $B \neq 0$, dhe çdo numër ose shprehje të plotë algjebrike $M \neq 0$, vlejnë identitetet:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M} \text{ dhe } \frac{A}{B} = \frac{A : M}{B : M}, B \neq 0, M \neq 0.$$

Në rastin kur numëruesi dhe emëruesi i thyesës algjebrike shumëzohen me numër të njëjtë ose me një shprehje të njëjtë algjebrike $M \neq 0$, themi se thyesa algjebrike është zgjeruar me $M \neq 0$, kurse procedura quhet **zgjerim i thyesës algjebrike**.

### SHEMBULLI 4

Në një enë laboratorike ka tretësirë me masë $\frac{5x}{3(x-1)}$ gramë. Për të standardizuar gjitha matjet, sasia në çdo enë duhet të shkruhet me emërues $6x(x-1)$. Me cilën shprehje duhet të zgjerohet thyesa?

$$\frac{5x \cdot 2x}{3(x-1) \cdot 2x} = \frac{10x^2}{6x(x-1)}$$ Zgjerojmë me $2x$.

Në rastin kur numëruesi dhe emëruesi i thyesës algjebrike pjesëtohen me të njëjtin numër ose të njëjtën shprehje të plotë racionale $M \neq 0$, themi se thyesa algjebrike është thjeshtuar me $M \neq 0$, kurse procedura quhet **thjeshtim i thyesës algjebrike**.

### SHEMBULLI 5

Në thyesën algjebrike $\frac{12a^2b^3c}{18a^4b^2}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, numëruesi dhe emëruesi janë monome që kanë shumëzues të përbashkët: 6, $a^2$ dhe $b^2$.

Kemi dy mënyra për thjeshtimin me qëllim ta sjellim në formën e pathjeshtueshme.

Mënyra e parë:

$$\frac{12a^2b^3c}{18a^4b^2} = \frac{12a^2b^3c : 6}{18a^4b^2 : 6} = \frac{2a^2b^3c : a^2}{3a^4b^2 : a^2} = \frac{2b^3c : b^2}{3a^2b^2 : b^2} = \frac{2bc}{3a^2}, a \neq 0, b \neq 0$$

Numëruesin dhe emëruesin e pjesëtojmë një pas një me secilin shumëzues.

Mënyra e dytë:

$$\frac{12a^2b^3c}{18a^4b^2} = \frac{12a^2b^3c : 6a^2b^2}{18a^4b^2 : 6a^2b^2} = \frac{2bc}{3a^2}, a \neq 0, b \neq 0$$

Numëruesin dhe emëruesin e pjesëtojmë me prodhimin e shumëzuesve $6a^2b^2$, i cili njëkohësisht është edhe pjesëtuesi më i madh i përbashkët.

Thyesa algjebrike $\frac{A}{B}$, e cila është thjeshtuar deri në fund (me PMP (A, B) = K), ose nuk mund të thjeshtohet (PMP(A, B) = 1), quhet thyesë e pathjeshtueshme.

### SHEMBULLI 6

Thyesat $\frac{2bc}{3a^2}$ dhe $\frac{7xy^2}{z^2}$ a janë të pathjeshtueshme?

$\frac{2bc}{3a^2}$ Thyesë e pathjeshtueshme, sepse PMP$(2bc, 3a^2) = 1$.

$\frac{7xy^2}{z^2}$ Thyesë e pathjeshtueshme si thyesë që nuk mund të thjeshtohet, sepse PMP $(7xy^2, z^2) = 1$

### SHEMBULLI 7

Automobili ka kaluar distancën prej $60x^2$ km për kohën prej $10x$ orësh. Me çfarë shpejtësie ka lëvizur automobili?

$\frac{60x^2}{10x} = 6x$ km/h  Thjeshtuar me $10x$

Automobili ka lëvizur me shpejtësi prej $6x$ km/h.

### SHEMBULLI 8

Thjeshtoni thyesën: a) $\frac{6a^2b}{3a^2 - 3ab}, a \neq 0, a \neq b$  b) $\frac{x^2 - 6x + 9}{2x^2 - 6x}, x \neq 3, x \neq 0$

a) $\frac{6a^2b}{3a^2 - 3ab} = \frac{6a^2b}{3a(a-b)} = \frac{2ab}{a-b}, a \neq 0, \neq b$

Nëse numëruesi dhe emëruesi janë polinome, atëherë ata i zbërthejmë në shumëzues të thjeshtë.

b) $\frac{x^2 - 6x + 9}{2x^2 - 6x} = \frac{(x-3)^2}{2x(x-3)} = \frac{x-3}{2x}, x \neq 3, x \neq 0$

Pastaj, nëse në numërues dhe emërues paraqiten shumëzues të përbashkët, atëherë i thjshtojmë ata.

## Sjellja e thyesave algjebrike në emërues të njëjtë

### AKTIVITET

Thyesat $\frac{1}{2}$ dhe $\frac{1}{3}$ kanë emëruesit e ndryshëm. Shpjegoni procedurën me të cilën thyesat janë sjellë në thyesa me emërues të njëjtë:

$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$ dhe $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$.

Me zgjerim, dy ose disa thyesa algjebrike me emëruesit e ndryshëm mund të sillen në thyesa algjebrike me emërues të njëjtë.

Procedura quhet **sjellja në emërues të njëjtë**.

Për emërues të përbashkët të disa thyesave algjebrike zakonisht merret prodhimi i gjithë emëruesve ose shumëfishi më i vogël i përbashkët i emëruesve të thyesave.

## SHEMBULLI 9

Sillni në emërues më të vogël të përbashkët thyesat: $\frac{a}{2x^2y}$, $\frac{b}{3y}$ dhe $\frac{c}{4xy}$.

SHVP $(2x^2y, 3y, 4xy) = 12x^2y$

Gjejmë SHVP e emëruesve të thyesave algjebrike

$12x^2y : (2x^2y) = 6$

$12x^2y : (3y) = 4x^2$

$12x^2y : (4xy) = 3x$

SHVP i gjetur pjesëtohet me emëruesin e secilës thyesë algjebrike që të fitohet shprehja me të cilën duhet të zgjerohet emëruesi i secilës thyesë, përkatësisht.

$\frac{a}{2x^2y} = \frac{a \cdot 6}{2x^2y \cdot 6} = \frac{6a}{12x^2y}, x \neq 0, y \neq 0$

$\frac{b}{3y} = \frac{b \cdot 4x^2}{3y \cdot 4x^2} = \frac{4bx^2}{12x^2y}, x \neq 0, y \neq 0$

$\frac{c}{4xy} = \frac{c \cdot 3x}{4xy \cdot 3x} = \frac{3cx}{12x^2y}, x \neq 0, y \neq 0$

E shumëzojmë numëruesin dhe emëruesin e secilës thyesë algjebrike me shprehjen përkatëse.

Thyesat e fituara algjebrike kanë emërues më të vogël të përbashkët.

## SHEMBULLI 10

Sillni në emërues të njëjtë thyesat $\frac{x^2-9}{x^2-6x+9}$ dhe $\frac{6x^2y}{3x^2y+6xy}$.

$\frac{x^2-9}{x^2-6x+9} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)^2} = \frac{x+3}{x-3}$

$\frac{6x^2y}{3x^2y+6xy} = \frac{6x^2y}{3xy(x+2)} = \frac{2x}{x+2}$

Fillimisht i thjeshtojmë thyesat algjebrike.

$\frac{x^2-9}{x^2-6x+9} = \frac{x+3}{x-3} = \frac{(x+3)(x+2)}{(x-3)(x+2)}$

$\frac{6x^2y}{3x^2y+6xy} = \frac{2x}{x+2} = \frac{2x(x-3)}{(x+2)(x-3)}, x \neq 3, x \neq -2$

SHVP $(x-3, x+2) = (x-3) \cdot (x+2)$

## DETYRA 1

Shndërroni në emërues të njëjtë thyesat:

a) $\frac{1}{a}$ dhe $\frac{2}{a+1}$ b) $\frac{2}{3x^2y^3}$ dhe $\frac{1}{5xy}$ c) $\frac{5}{2x-1}$ dhe $\frac{x}{4x^2-2x}$

## DETYRA 2

Në një shishe ka $\frac{5}{x-5}$ litra lëng, kurse në një tjetër ka $\frac{3}{y+4}$ litra lëng. Sillni të dy sasitë e lëngut në emërues të njëjtë.

## DETYRA PËR USHTRIME

**1.** Për cilat vlera të $x$, nuk ka kuptim thyesa:

a) $\frac{x+2}{x}$ b) $\frac{x-3}{x-1}$ c) $\frac{1}{(x-2)(x-5)}$ ç) $\frac{1}{x^2-4}$

2. Thjeshtoni thyesën me ndihmën e rregullave të fuqizimit:
   a) $\frac{x^8y^3z}{x^3y^9z^4}$ b) $\frac{(x-4y)(x-3y)^2}{6x^2(x-4y)^7(x-3y)^5}$ c) $\frac{(x-y)^2(x+1)^9}{(x-y)(x+2)^3(x+1)^{12}}$
3. Thjeshtoni thyesën:
   a) $\frac{6ax}{8a^2}$ b) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$ c) $\frac{x^4-x^3-x+1}{x^4+x^3-x-1}$ ç) $\frac{3x^{n+2}}{x^ny}$
4. Thjeshtoni thyesën:
   a) $\frac{3a+6}{a^3+8}$ b) $\frac{2a(x-3y)}{6a^2(3y-x)}$ c) $\frac{x^2-y^2}{ax+ay}$ ç) $\frac{3a+1}{9a^2-1}$
5. Thjeshtoni thyesën dhe njehsoni vlerën e saj:
   a) $\frac{a-1}{2a-2a^2}$, për $a=-3$ b) $\frac{x^2-4}{x+2}$, për $x=3{,}5$ c) $\frac{x-1}{1-x}$, për $x=a$
6. Sillni thyesat algjebrike në emërues më të vogël të përbashkët:
   a) $\frac{a}{2b}$ dhe $\frac{b}{c^2}$ b) $\frac{a}{x}, \frac{b}{y}$ dhe $\frac{c}{z}$ c) $\frac{a^2}{2b^2}, \frac{2bc}{a^2}$ dhe $\frac{ab}{4c^2}$
7. Sillni thyesat algjebrike në emërues më të vogël të përbashkët:
   a) $\frac{2}{3a^2b^3}, \frac{5a}{6b^3c^2}$ dhe $\frac{1}{5abc}$ b) $\frac{x}{x+y}$ dhe $\frac{y}{x-y}$ c) $\frac{a}{x+y}$ dhe $\frac{b}{(x+y)^2}$
   ç) $\frac{2x}{x+y}, \frac{2y}{x-y}$ dhe $\frac{xy}{x^2-y^2}$ d) $\frac{2a}{a^3-ax^2}, \frac{3x}{x+a}$ dhe $\frac{5a}{x^2+2ax+a^2}$ dh) $\frac{5}{2x-1}$ dhe $\frac{x}{4x^2-2x}$
8. Në një fabrikë ka $36x^2y^3$ pjesë automobilash që duhet të paketohen në kuti me nga $6xy$ pjesë. Sa kuti do të paketohen?
9. Në shishe të vogël në laborator ka tretësirë prej $\frac{8}{5-x}$ ml. Nëse sasia duhet të shprehet me emërues $10x(5-x)$, atëherë me cilën shprehje duhet të zgjerohet thyesa algjebrike?

# 2.14. Veprime me thyesa algjebrike

## Mbledhja dhe zbritja e thyesave algjebrike

**AKTIVITET**

Njehsoni:

a) $\frac{8}{15}+\frac{4}{15}$ dhe $\frac{8}{15}-\frac{4}{15}$ b) $\frac{2}{9}+\frac{3}{5}$ dhe $\frac{4}{7}-\frac{2}{5}$

Shpjegoni rregullat sipas së cilave i kryet mbledhjen dhe zbritjen.

Rregullat për mbledhjen dhe zbritjen e thyesave algjebrike janë të njëjta si edhe rregullat për mbledhjen dhe zbritjen e thyesave të rëndomta.

**SHEMBULLI 1**

Gjeni shumën e thyesave algjebrike $\frac{3x}{2y^2}$ dhe $\frac{5}{2y^2}$.

$\frac{3x}{2y^2} + \frac{5}{2y^2} = \frac{3x+5}{2y^2}, y \neq 0$

Thyesat algjebrike kanë emëruesit e njëjtë.

Numëruesi i shumës është shuma e numëruesve të thyesave algjebrike.

Emëruesi i shumës është i barabartë me emëruesin e thyesave algjebrike.

**Thyesat algjebrike me emëruesit e njëjtë mblidhen** ashtu që mblidhen numëruesit e tyre, pastaj shuma e fituar pjesëtohet me emëruesin e njëjtë:

$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}, C \neq 0.$

### SHEMBULLI 2

Gjeni shumën e thyesave algjebrike $\frac{2a}{x-1}, \frac{3a-1}{x-1}$ dhe $\frac{2-ab}{x-1}$.

$\frac{2a}{x-1} + \frac{3a-1}{x-1} + \frac{2-ab}{x-1} = \frac{2a+3a-1+2-ab}{x-1} = \frac{5a+1-ab}{x-1}, x \neq 1$

### DETYRA 1

Gjeni shumën $\frac{3a}{2a^2x} + \frac{5ab}{2a^2x} + \frac{a-2b}{2a^2x}$.

### SHEMBULLI 3

Gjej ndryshimin e thyesës algjebrike $\frac{a}{c}$ me thyesën algjebrike $\frac{a+3}{c}$.

$\frac{a}{c} - \frac{a+3}{c} = \frac{a-(a+3)}{c}$

$= \frac{a-a-3}{c} = \frac{-3}{c}, c \neq 0$

Thyesat algjebrike kanë emëruesit e njëjtë.

Numëruesi i ndryshimit është ndryshimi i numëruesve të thyesës – të zbritshmit dhe thyesës – zbritësit.

Emëruesi i ndryshimit është i barabartë me emëruesin e thyesave.

**Thyesat algjebrike me emëruesit e njëjtë zbriten** ashtu që nga numëruesi i të zbritshmit zbritet numëruesi i zbritësit, pastaj ndryshimi i fituar pjesëtohet me emëruesin e tyre të përbashkët:

$\frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}, C \neq 0$

### SHEMBULLI 4

Gjeni ndryshimin $\frac{6a-1}{a+1} - \frac{2a-b}{a+1}$.

$\frac{6a-1}{a+1} - \frac{2a-b}{a+1} = \frac{6a-1-(2a-b)}{a+1} = \frac{6a-1-2a+b}{a+1} = \frac{4a+b-1}{a+1}, a \neq -1$

## DETYRA 2

Gjeni ndryshimin $\frac{2a-3b}{a^2b} - \frac{4a-5}{a^2b}$.

Nëse thyesat algjebrike kanë emëruesit e ndryshëm, atëherë ato fillimisht kthehen në thyesa me emëruesit të njëjtë, e më pas mblidhen ose zbriten si thyesa me emëruesit e njëjtë:

$$\frac{A}{M} \pm \frac{B}{N} = \frac{A \cdot N}{M \cdot N} \pm \frac{B \cdot M}{M \cdot N}, M, N \neq 0$$

### SHEMBULLI 5

Kryeni operacionet e kërkuara:

a) $\frac{5b}{2a^2} + \frac{3}{4ab} + \frac{2b}{a}$ b) $\frac{2}{c-x} + \frac{3}{x-c} - \frac{1}{x}$ c) $a + \frac{ax}{a-x}$ ç) $\frac{b^2}{2a+b} + 2a - b$

a) $\frac{5b}{2a^2} + \frac{3}{4ab} + \frac{2b}{a} = \frac{5b \cdot 2b + 3 \cdot a + 2b \cdot 4ab}{4a^2b} = \frac{10b^2 + 3a + 8ab^2}{4a^2b}, a \neq 0, b \neq 0$

b) $\frac{2}{c-x} + \frac{3}{x-c} - \frac{1}{x} = -\frac{2}{x-c} + \frac{3}{x-c} - \frac{1}{x} = \frac{-2x + 3x - (x-c)}{x(x-c)} = \frac{c}{x(x-c)}, x \neq 0, x \neq c$

c) $a + \frac{ax}{a-x} = \frac{a}{1} + \frac{ax}{a-x} = \frac{a(a-x) + ax}{a-x} = \frac{a^2}{a-x}, a \neq x$

ç) $\frac{b^2}{2a+b} + 2a - b = \frac{b^2}{2a+b} + \frac{2a-b}{1} = \frac{b^2 + (2a-b)(2a+b)}{2a+b} = \frac{4a^2}{2a+b}, b \neq -2a$

## DETYRA 3

Elektricisti preu dy copa teli, njërin me gjatësi $\frac{3}{7xy^2}$ metra, kurse tjetrin me gjatësi $\frac{5}{2x^2y}$ metra.
Sa është e gjithë gjatësia e telit që preu elektricisti? Shkruani përgjigjen në formën e thyesës algjebrike.

# Shumëzimi dhe pjesëtimi i thyesave algjebrike

## AKTIVITET

Njehsoni: a) $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ c) $\frac{5}{6} : \frac{3}{4}$

Shpjegoni rregullat sipas së cilave kryet operacionet e kërkuara.

Për shumëzimin, fuqizimin dhe pjesëtimin e thyesave algjebrike vlejnë rregullat e njëjta si për thyesat e rëndomta.

### SHEMBULLI 6

Gjeni prodhimin e thyesave algjebrike $\frac{9x}{2y^2}$ dhe $\frac{3x}{z}$.

$\frac{9x}{2y^2} \cdot \frac{y}{3x^2} = \frac{9x \cdot y}{2x^2 \cdot 3y^2} = \frac{3xy}{2x^2y^2} = \frac{3}{2xy}$

Numëruesi është prodhim i numëruesve të thyesave algjebrike.
Emëruesi është prodhim i emëruesve të thyesave algjebrike.

**Thyesat algjebrike shumëzohen** ashtu që veçmas shumëzohen numëruesit dhe emëruesit, e më prandaj prodhimi i numëruesve është numëruesi, kurse prodhimi i emëruesve është emëruesi i prodhimit:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}, B\neq 0, D\neq 0.$$

### SHEMBULLI 7

Shumëzoni thyesat algjebrike $\frac{5a^2x}{3by^3}$ dhe $-\frac{9b^2y}{10ax^2}$.

$$\frac{5a^2x}{3by^3}\cdot\left(-\frac{9b^2y}{10ax^2}\right)=-\frac{5a^2x\cdot 9b^2y}{3by^3\cdot 10ax^2}=-\frac{3ab}{2xy^2},\ abxy\neq 0$$

### SHEMBULLI 8

Trekëndëshi kënddrejtë ka katete me gjatësi $\frac{5}{x^2-4}$ cm dhe $\frac{x-2}{x+2}$ cm. Sa është syprina $P$ e trekëndëshit?

$$P=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{x^2-4}\cdot\frac{x-2}{x+2}\right)=\frac{5(x-2)}{2(x^2-4)(x+2)}=\frac{5}{2(x+2)^2}\ \text{cm}^2$$

Syprina e trekëndëshit është $\frac{5}{2(x+2)^2}$ cm$^2$.

Gjatë shumëzimit të thyesave algjebrike duhet parë nëse mund të kryhet thjeshtimi. Për këtë qëllim, numëruesit dhe emëruesit, (nëse janë polinome) i zbërthejmë në shumëzues, kurse thjeshtimin e kryejmë përpara shumëzimit të numëruesve dhe emëruesve, sikurse është treguar më sipër.

### DETYRA 4

Gjeni prodhimin e thyesave algjebrike $\frac{x-1}{2y}$ dhe $\frac{4y^2}{1-2x+x^2}$.

**Thyesa algjebrike fuqizohet** ashtu që numëruesi dhe emëruesi i saj, veçmas, fuqizohen me treguesin e njëjtë të fuqisë:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}, B\neq 0, n\in\mathbb{Z}.$$

### SHEMBULLI 9

Kryeni fuqizimin $\left(\frac{2a^2x}{3b}\right)^3$.

$$\left(\frac{2a^2x}{3b}\right)^3=\frac{(2a^2x)^3}{(3b)^3}=\frac{8a^6x^3}{27b^3}, b\neq 0$$

### DETYRA 5

Gjeni fuqinë e katërt të thyesës algjebrike $\frac{bc}{a^2+a}$.

**Thyesat algjebrike pjesëtohen** ashtu që thyesa – i pjesëtueshmi shumëzohet me vlerën reciproke të thyesës – pjesëtuesit:

$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0.$

## SHEMBULLI 10

Gjeni herësin: a) $-\frac{28a}{5b^3} : \frac{14a^2}{15b^4}$ b) $\frac{a^2-b^2+2a+1}{3x^2} : (a-b+1)$

a) $-\frac{28a}{5b^3} : \frac{14a^2}{15b^4} = -\frac{28a}{5b^3} \cdot \frac{15b^4}{14a^2} = -\frac{28a \cdot 15b^4}{5b^3 \cdot 14a^2} = -\frac{6b}{a}, a \neq 0, b \neq 0$

b) $\frac{a^2-b^2+2a+1}{3x^2} : (a-b+1) = \frac{(a+1)^2-b^2}{3x^2} : \frac{a-b+1}{1} = \frac{(a+1-b)(a+1+b)}{3x^2} \cdot \frac{1}{a-b+1}$

$= \frac{a+b+1}{3x^2}, a-b+1 \neq 0, x \neq 0$

## DETYRA 6

Pjesëtoni thyesën algjebrike $\frac{x}{x^2-16}$ me thyesën algjebrike $\frac{x^3+4x^2}{x-4}$.

## SHEMBULLI 11

Parcela drejtkëndore ka syprinë $\frac{12}{x}$ metra katrorë. Nëse gjerësia është $\frac{3}{y}$ metra, sa është gjatësia e saj?

$\frac{12}{x} : \frac{3}{y} = \frac{12}{x} \cdot \frac{y}{3} = \frac{4y}{x}$ metra  Gjatësia e parcelës është $\frac{4y}{x}$ metra.

## DETYRA PËR USHTRIME

Kryeni operacionet e theksuara me thyesat algjebrike:

1. a) $\frac{a+2}{b} + \frac{2a-5}{b}$ b) $\frac{2a+1}{a} + \frac{3x-1}{a} - \frac{x-2}{a}$ c) $\frac{2x+1}{(y-2)^2} + \frac{3x-1}{(y-2)^2} - \frac{x-2}{(y-2)^2}$
2. a) $\frac{3}{x+1} - \frac{5}{2x+1}$ b) $\frac{1}{x^2-4x+4} + \frac{5}{x^2-4}$ c) $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z}$
3. a) $\frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{1-x^2} + \frac{1}{x+1}$ b) $\frac{5}{2a+4} - \frac{4}{a^2-4} + \frac{1}{a-2}$ c) $\frac{xy-1}{xy+1} - \frac{xy+1}{1-xy} + \frac{4}{1-x^2y^2}$
4. a) $\frac{3}{x-c} + \frac{2}{c-x} - \frac{1}{x}$ b) $\frac{3a+1}{2a+6} - \frac{a-1}{a+3}$ c) $\frac{1}{x-3} - \frac{x+1}{x^2-9} + \frac{2}{x^2+6x+9}$
5. a) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \cdot \frac{2a}{a-b}$ b) $\frac{x+1}{y} \cdot \frac{4y^2}{x^2-1}$ c) $\frac{x-2}{6x+2y-2z} \cdot \frac{3x+y-z}{2x-x^2}$
6. a) $\frac{x-1}{2y} : \frac{(1-x)^2}{4y^2}$ b) $\frac{x^2}{(a-2)} : \frac{x^2}{(2-a)^2}$ c) $\frac{x^2-xy}{a^2+a} : \frac{2x-2y}{3a+3}$
7. Gjeni perimetrin e katërkëndëshit me brinjë $\frac{2}{x-5}, \frac{6x}{x+3}, \frac{1}{7x-2}$ dhe $\frac{x^2}{x^2+3}$.

8. Gjeni syprinën e trapezit me lartësi $\frac{x-2}{x^2+4}$ dhe bazat $\frac{2}{x^2+5}$, $\frac{x^2}{x+3}$.

9. Nëse nevoja ditore është $\frac{x^2}{x^2+3}$ proteina, kurse ti merr $\frac{x^2}{x^2+1}$ proteina, të satën pjesë të nevojës ditore për proteina e merr ti?

## DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM

1. Njehsoni vlerën e shprehjes dhe bëni kontrollin me kalkulator:
   a) $a^2+2\sqrt[3]{a}-4^2+a-\sqrt{a}$ për $a=64$ b) $x^2-\sqrt[3]{x^2}+5x\sqrt{x}-7$ për $x=81$

2. Pa përdorimin e kalkulatorit njehsoni:
   a) $\left(\frac{1}{7}\right)^0+\left(\frac{1}{13}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{11}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ b) $\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)^{-2}:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)^{-2}$
   c) $9^{\frac{1}{2}}-64^{\frac{5}{6}}+125^{\frac{2}{3}}$
   Shkruani zgjidhjen në formë të thyesës.

3. Kryeni operacionet e kërkuara me fuqitë me tregues numër të plotë:
   a) $\frac{3^{-1}xy^{-2}}{2^{-2}(x^2+y^2)^{-1}}$ b) $\frac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}\cdot\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)^{-1}$ c) $\left(\frac{a^{-3}\cdot a^7}{a^{-5}}:\frac{a^{-2}}{a^0}\right)^{-4}$

4. Kryeni operacionet e kërkuara me fuqitë me tregues numra racionalë:
   a) $a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{1}{4}}:ab^{-\frac{1}{2}}$ b) $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}}\right)^{-12}$ c) $\frac{2a^{-\frac{1}{3}}\cdot a^7}{a^{\frac{2}{3}}-a^{-\frac{1}{3}}}-\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}}$

5. Një avion ka fluturuar nga Evropa deri në Australi. Aeroportet janë në largësi $9{,}39\cdot10^3$ km nga njëri – tjetri. Fluturimi zgjat $7{,}26\cdot10^3$ minuta.
   Shpejtësia mesatare = distanca e përgjithshme : koha e nevojshme
   Cila ka qenë shpejtësia mesatare e avionit e shprehur në kilometra për minutë?

6. Saturni nuk ka orbitë rrethore rreth Diellit, por ka largësi minimale dhe maksimale nga ai. Largësia minimale e Saturnit nga Dielli është $4{,}6\cdot10^7$ km, kurse ajo maksimale është $6{,}98\cdot10^7$ km.
   Sa është ndryshimi në kilometra ndërmjet këtyre dy largësive? Shkruani përgjigjen në formën standarde.

7. Gjeni bashkësinë e vlerave të lejuara të ndryshoreve në shprehjen:
   a) $\frac{x+5x+3}{x^2+1}$ b) $\frac{a^2-16}{(a+4)\cdot(a-4)}$ c) $\frac{2a-2b}{2}$

8. Thjeshtoni polinomet.
   a) $7a^3-8{,}2b+0{,}5b-0{,}3a^3-a^3b^3$ b) $7xyz-4x^2z^2-7xz^2+6xz^2-xyz+4x^2z^2$

9. Lirohuni nga kllapat dhe thjeshtoni shprehjen:
   a) $(2x-y+x)-(x+y-5z)$ b) $a^2-2ab-b^2-[4a^2+6ab-(-2ab+7b^2)]$
   c) $-[(a-5b^2+c^3)-7(a+b^2-5c^3)]$ ç) $7x^2y-(5x^2y-9xyz-3x^2z)-2x^2y-[8xyz-(6xyz-4x^2z)]$

**10.** Kompania e ndërtimit e llogarit harxhimin e përgjithshëm të materialit për dy projekte duke përdorur polinome. Çmimi i projektit të parë është $4x^2 + 3x + 5$ euro. Çmimi i projektit të dytë është $2x^2 - x + 7$ euro, ku $x$ është numri i ditëve të punës.

a) Gjeni harxhimet e përgjithshme për të dy projektet bashkërisht.

b) Gjeni ndryshimin e harxhimeve ndërmjet dy projekteve.

**11.** Kryeni operacionet e shënuara dhe thjeshtoni shprehjet:

a) $4x^2y^3 - 6x + 5) \cdot (-4x)$ b) $(x^3 - 6x + 5) \cdot (-4x)$

c) $(3x + 4y) \cdot (x^2 + 5y^2)$ ç) $(5x - 3y) \cdot (4x + 7) - (2x - y) \cdot (3x + 8y)$

d) $(x^4 + x^2 + 1) : (x^2 - x + 1)$ dh) $(2x^3 - 4x^2 + 5) : (x^2 + 6)$

**12.** Dizajnuesi i peizazheve rregullon një kopsht drejtkëndor ku gjatësia është $x^2 + 5x + 6$ metra, kurse gjerësia $x + 2$ metra. Gjeni polinomin për syprinën e kopshtit.

**13.** Kryeni operacionet e shënuara dhe thjeshtoni shprehjet:

a) $(x + y)^2 - (x - y)^2 + (x - y) \cdot (x + y)$ b) $(o + 1)^2 + 3(o - 1)^2 - 5(o + 1) \cdot (o - 1)$

**14.** Njehsoni në mënyrën më të shpejtë:

a) $401^2$ b) $1002^2$ c) $99^2$ ç) $57 \cdot 63$ d) $72^2 - 68^2$ dh) $1{,}01 \cdot 0{,}99$

**15.** Në një kopsht frutash kishte $a$ rreshta me nga $b$ pemë frutash në secilin rresht. Sa pemë kishte më shumë në kopshtin tjetër, në të cilin kishte 15 rreshta më shumë, po nga 3 pemë më pak në secilin rresht, se sa në kopshtin e parë. Njehsoni numrin e pemëve për $a = 30$, $b = 38$.

**16.** Zbërthe në shumëzues të thjeshtë shprehjen:

a) $12ax - 6bx + 2ay - by$ b) $x^4 - 10x^2y + 25y^2$ c) $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$

ç) $a^3 + 3a^2 + 3a + 9$ d) $x^3 - 3x^2 + x + ax^2 - 3ax + a$ dh) $x^3 + y^3 + (x + y)^2 + x^2 - y^2$

**17.** Gjeni SHVP e polinomeve:

a) $x^2y + xy^2$ dhe $x^2 - y^2$ b) $5x - 5, 3x + 3$ dhe $2x^2 - 2$ c) $x^3 - 2x^2y$ dhe $x^2 - 4xy + 4y^2$

**18.** Gjeni PMP të polinomeve: a) $6x^2y^4$ dhe $9x^5y$ b) $x^2 + 4x + 4$ dhe $x^2 - 4$ c) $a^3 + 8, a^2 - 4$ dhe $a^2 + 2a$

**19.** Njehsoni vlerën e shprehjes:

a) $\dfrac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{ab}$, për $ab = 2$ b) $\dfrac{(a+b)^3 - a^3 - b^3}{a+b}$, për $ab = 5$

**20.** Kryeni operacionet e shënuara:

a) $\dfrac{(x+1)^2}{x} - \dfrac{(x-1)^2}{x}$ b) $\dfrac{1}{x-c} - \dfrac{1}{x+c} + \dfrac{1-2c}{x^2-c^2}$ c) $\dfrac{x^2-25}{x^2-9} \cdot \dfrac{x^2-3x}{x^2+3x}$

**21.** Thjeshtoni shprehjen:

a) $\dfrac{x}{2x^3 - 2x^2y} + \dfrac{4y}{x^2y + xy^2} - \dfrac{1}{x^2 - y^2}$ b) $\dfrac{2x^2 + 8xy + 8y^2}{xy + y} \cdot \dfrac{(x+1)}{3x^2 - 12y^2}$

c) $\dfrac{x^2 - y^2 + 2x + 1}{x(x - y + 1)} : (x - y + 1)$ ç) $\left(\dfrac{x^2+1}{2x} - 1\right) : \left(\dfrac{x^2+1}{2x} + 1\right)$

**22.** Një inxhinier projekton një tra që duhet të mbart dy ngarkesa të ndryshme, të shpërndara nëpër gjatësinë e tij. Shpërndarja e ngarkesës së përgjithshme është dhënë me

$$\frac{3x}{x^2 - 9} + \frac{2}{x - 3x}$$

Thjeshtoni shprehjen dhe shpjegoni pse shprehja e thjeshtuar ndihmon në llogaritjet inxhinierike.

## Tema 3:

# FUNKSIONI, BARAZIMI, SISTEMI I DY BARAZIMEVE DHE PABARAZIMI

**Me shtjellimin e kësaj teme do të aftësoheni:**

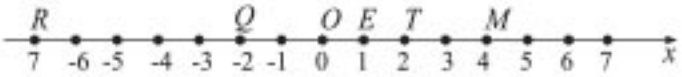
1. të llogaritni perimetrin dhe syprinën e shumëkëndëshave, kulmet e të cilëve janë dhënë me koordinata;
2. të njihni varësinë lineare në situata problemore, ta shkruani atë si funksion, të vizatoni grafikun e saj, të analizoni dhe të nxirrni përfundime;
3. të zgjidhni situata problemore që reduktohen në barazim, sistem barazimesh lineare me dy të panjohura dhe pabarazi.

# 3.1. Koordinatat e pikës dhe distanca ndërmjet dy pikave në sistemin koordinativ kënddrejtë

## Koordinatat pikës

**AKTIVITET**

a) Shkruani koordinatat e pikave $M$, $T$, $E$, $O$, $Q$ dhe $R$, të shënuara në boshtin numerik në vizatimin 1.



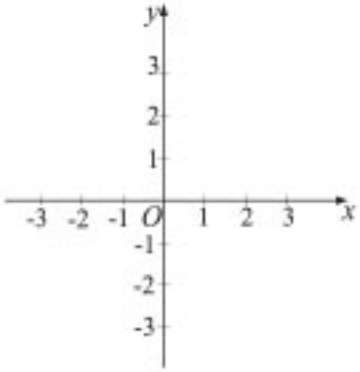

Vizatimi 1

Vizatoni një bosht numerik dhe shënoni pikat $A(+2)$ dhe $B(-2)$.

Si janë largesat e pikave $A(+2)$ dhe $B(-2)$ nga origjina e koordinatave $O$?

**Sistemi koordinativ kënddrejtë (ose kartezian)** përbëhet nga dy boshte numerike reciprokisht normale, të quajtura **boshte koordinative** (vizatimi 2).

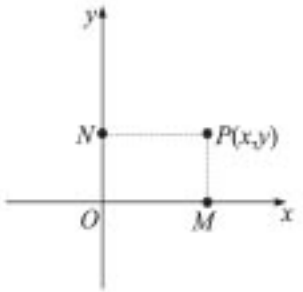
Boshti koordinativ horizontal quhet **boshti $x$** ose **boshti i abshisave**.
Boshti koordinativ vertikal quhet **boshti $y$** ose **boshti i ordinatave**.
Pika në të cilën priten dy boshtet koordinative quhet **origjinë e koordinatave** dhe shënohet me $O$.




Vizatimi 2

**Kahja pozitive e boshtit të abshisave** merret kahja djathtas nga origjina e koordinatave.
**Kahja pozitive e boshtit të ordinatave** merret kahja lart nga origjina e koordinatave.
Rrafshi në të cilin është përcaktuar sistemi koordinativ quhet **rrafsh koordinativ**.

$P$ është një pikë në rrafshin koordinativ (vizatim 3).
Pika $M$ është projeksioni normal i pikës $P$ mbi boshtin $x$.
Pika $N$ është projeksioni normal i pikës $P$ mbi boshtin $y$.
Pikës $M$ i përgjigjet një numër i vetëm real $x$ në boshtin $x$.
Pikës $N$ i përgjigjet një numër i vetëm real $y$ në boshtin $y$.
Pozicioni i pikës $P$ është plotësisht i përcaktuar nga çifti i renditur $(x, y)$ i numrave realë, të quajtur **koordinata** të pikës $P$.
Numri $x$ quhet **koordinatë e parë** ose **abshisë** e pikës $P$.
Numri $y$ quhet **koordinatë e dytë** ose **ordinatë** e pikës $P$.
Shkruajmë $P(x, y)$.




Vizatimi 3

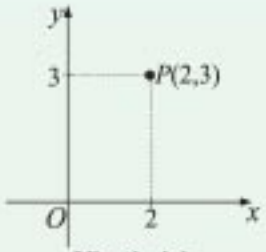
## SHEMBULLI 1

Vizatoni në rrafshin koordinativ pikën $P(2, 3)$.

Vizatojmë normalen mbi boshtin $x$ përmes pikës me koordinatë 2

Vizatojmë normalen mbi boshtin $y$ përmes pikës me koordinatë 3.

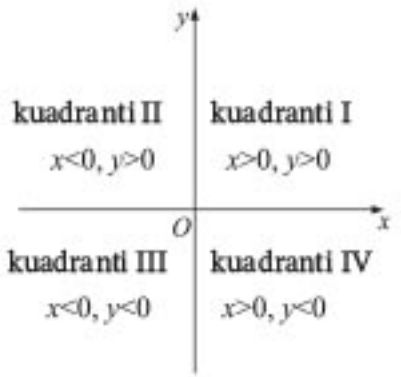
Pika $P$ është pika e prerjes së dy normaleve (vizatimi 4).



Vizatimi 4

Boshtet koordinative e ndajnë rrafshin koordinativ në katër pjesë të quajtura **kuadrantë** (vizatimi 5).

**Kuadranti I** është pjesa lart djathtas
**Kuadranti II** është pjesa lart majtas
**Kuadranti III** është pjesa poshtë majtas
**Kuadranti IV** është pjesa poshtë djathtas
Pika $P(x, y)$ ndodhet në:
Kuadrantin I, nëse $x > 0$ dhe $y > 0$
Kuadrantin II nëse, $x < 0$ dhe $y > 0$
Kuadrantin III nëse, $x < 0$ dhe $y < 0$
Kuadrantin IV nëse, $x > 0$ dhe $y < 0$



Vizatimi 5

## SHEMBULLI 2

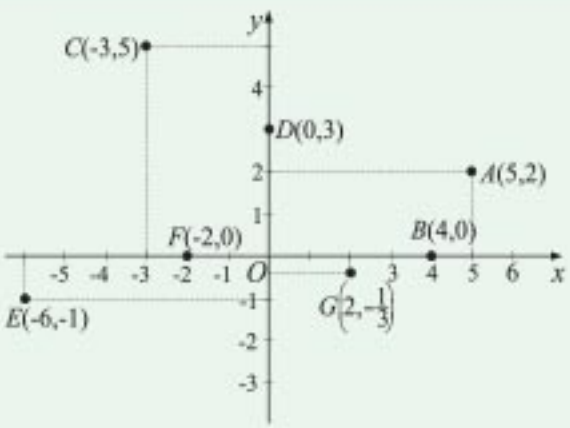
Vizatoni në rrafshin koordinativ pikat:

a) $A(5, 2)$ b) $B(4, 0)$ c) $C(-3, 5)$ ç) $D(0, 3)$
d) $E(-6, -1)$ dh) $F(-2, 0)$ e) $G\left(2, -\frac{1}{3}\right)$ ë) $H(0, -4)$

dhe përcaktoni në cilin kuadrant ose mbi cilin bosht ndodhen..

a) $A(5, 2)$ ndodhet në kuadrantin e parë
b) $B(4, 0)$ ndodhet mbi boshtin $x$
c) $C(-3, 5)$ ndodhet në kuadrantin e dytë
ç) $D(0, 3)$ ndodhet mbi boshtin $y$
d) $E(-6, -1)$ ndodhet në kuadrantin e tretë
dh) $F(-2, 0)$ ndodhet mbi boshtin $x$
e) $G\left(2, -\frac{1}{3}\right)$ ndodhet në kuadrantin e katërt
ë) $H(0, -4)$ ndodhet mbi boshtin $y$

Pikat janë paraqitur në vizatimin 6.



Vizatimi 6

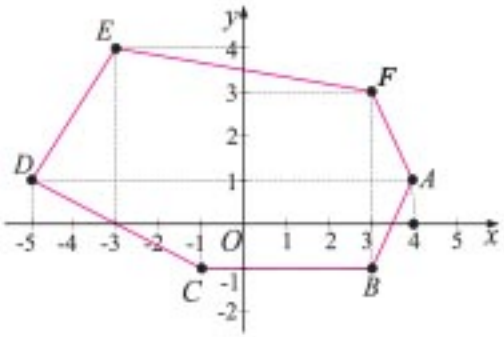
### DETYRA 1

Shkruani koordinatat e kulmeve të gjashtëkëndëshit *ABCDEF* (vizatimi 7).

### DETYRA 2

Vizatoni në rrafshin koordinativ pikat: $A(-4, 3)$, $B(2, 3)$ dhe $C(2, -3)$.

Pastaj, vizatoni pikën $D$ ashtu që $ABCD$ të jetë katror. Shkruani koordinatat e pikës $D$.



Vizatimi 7

## Largesa (distanca) ndërmjet dy pikave

### AKTIVITET

Llogaritni largesën (distancën) ndërmjet pikave në boshtin numerik:
a) $A(+2)$ dhe $B(+4)$ b) $M(-4)$ dhe $N(+7)$ c) $P(-3)$ dhe $Q(-5)$ ç) $S(-6)$ dhe $T(+4)$
Pastaj, kontrolloni saktësinë e formulës për llogaritjen e largësisë d ndërmjet pikave $E(x_1)$ dhe $F(x_2)$ në boshtin numerik: $d = |x_1 - x_2|$ që do të thotë $d = x_1 - x_2$, kur $x_1 \geq x_2$ dhe $d = x_2 - x_1$, kur $x_2 \geq x_1$.

Përdorimi i sistemit koordinativ na lejon të llogarisim largesën ndërmjet dy pikave në rrafshin koordinativ.

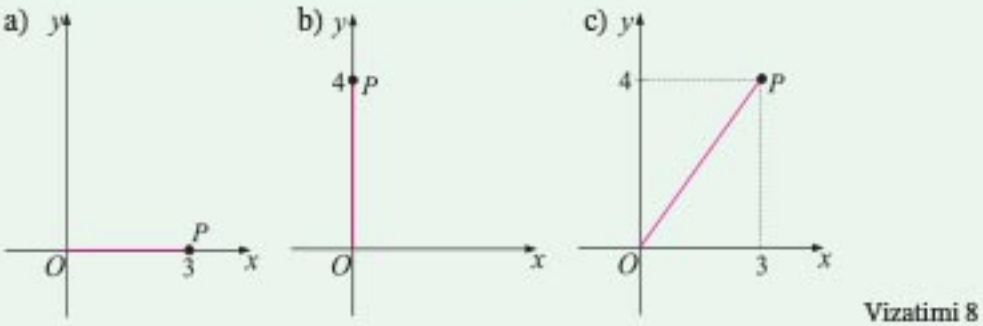
### SHEMBULLI 3

Një grimcë lëviz në vijë të drejtë nga pika fillestare $O(0, 0)$ drejt pikës fundore $P$:
a) $P(3, 0)$ b) $P(0, 4)$ c) $P(3, 4)$.
Sa njësi do të zhvendoset përgjatë boshtit $x$, dhe sa njësi përgjatë boshtit $y$? Sa është largesa $d$ nga pika fillestare deri te pika fundore e trajektores?

a) Grimca do të zhvendoset 3 njësi përgjatë boshtit $x$ dhe 0 njësi përgjatë boshtit $y$. Largesa nga pika fillestare deri te pika fundore është gjithashtu 3 njësi (vizatimi 8 a).

b) Zhvendosja e grimcës do të jetë 0 njësi përgjatë boshtit $x$ dhe 4 njësi përgjatë boshtit $y$. Largesa nga pika fillestare deri te pika fundore është gjithashtu 4 njësi (vizatimi 8 b).

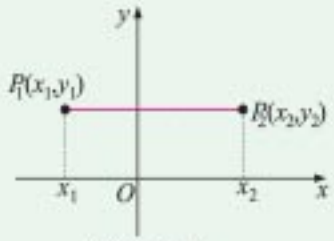
c) Grimca do të zhvendoset 3 njësi përgjatë boshtit $x$ dhe 4 njësi përgjatë boshtit y (vizatimi 8 c). Largesa nga pika fillestare deri te pika fundore, e llogaritur me teoremën e Pitagorës, do të jetë: $d = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ njësi.



Vizatimi 8

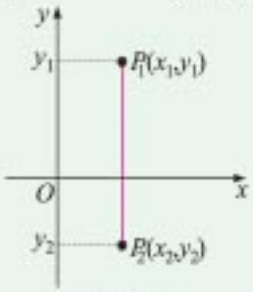
Le të përcaktojmë largesën $d$ midis pikave $P_1(x_1, y_1)$ dhe $P_2(x_2, y_2)$ në rrafshin koordinativ.

Nëse $P_1$ dhe $P_2$ shtrihen në një drejtëz paralele me boshtin $x$, atëherë $d = |x_1 - x_2|$ (vizatimi 9).




Vizatimi 9

Nëse $P_1$ dhe $P_2$ shtrihen në një drejtëz paralele me boshtin $y$, atëherë $d = |y_1 - y_2|$ (vizatimi 10).




Vizatimi 10

Le të supozojmë se $P_1$ dhe $P_2$ nuk shtrihen në një drejtëz paralele me boshtin $x$, e as në një drejtëz paralele me boshtin y (vizatimi 11).

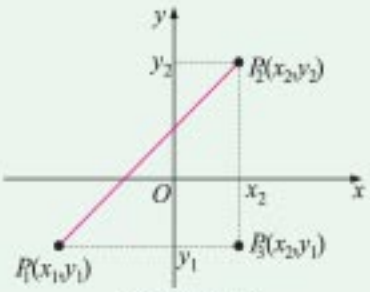
Zgjedhim pikën $P_3(x_2, y_1)$.

Trekëndëshi $P_1P_2P_3$ është trekëndësh kënddrejtë.

Nga teorema e Pitagorës për trekëndëshin $P_1P_2P_3$ fitojmë $d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$.

Për shkak se $x_2 - x_1 \geq 0$ dhe $y_2 - y_1 \geq 0$ rrjedh se $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Marrim rrënjën katrore nga të dy anët: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.




Vizatimi 11

## SHEMBULLI 4

Largesa ndërmjet pikave $P_1(2, -4)$ dhe $P_2(-2, -1)$ në rrafshin koordinativ është:

$d = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-(-4))^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Me llogaritjen e distancës midis pikave $P_1(x_1, y_1)$ dhe $P_2(x_2, y_2)$ në rrafshin koordinativ, në fakt llogarisim gjatësinë e segmentit $P_1P_2$: $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

## DETYRA 3

Njehsoni gjatësitë e brinjëve të trekëndëshit $ABC$, nëse $A(-1, 3)$, $B(2, 6)$ dhe $C(3, 2)$.

## DETYRA 4

Një grimcë lëviz nga pika $A(2, 1)$ në pikën $B(6, 4)$, e pastaj në pikën $C(9, 8)$. Sa është distanca totale që ka përshkuar grimca?

## DETYRA PËR USHTRIME

Vizatoni një sistem koordinativ me boshte të shënuar nga −6 deri në 6.

1. Vizatoni pikat:
   a) $A(2, 1)$, $B(2, 5)$, $C(6, 5)$ dhe $D(6, 1)$, e pastaj emërtoni formën gjeometrike $ABCD$.
   b) $E(-4, 0)$, $F(-2, 4)$, $G(0, 0)$,e pastaj, emërtoni formën gjeometrike $EFG$.
   c) $J(-3, -1)$, $K(-3, -3)$, $L(3, -4)$, $M(3, 3)$, e pastaj, emërtoni formën gjeometrike $JKLM$.

2. Vizatoni pikat: $E(2, 4)$, $F(1, -1)$ dhe $G(-2, -1)$. Vizatoni pikën $H$ ashtu që $EFGH$ të jetë paralelogram. Shkruani koordinatat e pikës $H$.

3. Ana, Blerim dhe Kate po përpiqen të gjejnë kulmin e tretë, $R$, të trekëndëshit barabrinjës $PQR$. Ata e dinë se $P(1, 0)$ dhe $Q(3, 0)$. Ana shkroi $R(3, 6)$, Blerim $R(2, -1)$, dhe Kate $R(2, 5)$. Cili prej tyre e shënoi saktë pikën $R$

4. Vizatoni pikat $S(-2, 4)$, $T(-4, 1)$ dhe $U(-2, -2)$. Pastaj, vizatoni pikën $V(5, a)$ ashtu që $STUV$ë jetë deltoid. Sa është vlera e koordinatës së dytë $a$?

5. Vizatoni pikat $A(0, 3)$ dhe $B(0, -1)$.
   a) Vizatoni kulmet $C$ dhe $D$ të katrorit $ABCD$, e pastaj shkruani koordinatat e tyre. Janë të mundshme dy zgjidhje.
   b) Vizatoni kulmet $P$ dhe $Q$ të katrorit $APBQ$ me diagonale $AB$, e pastaj shkruani koordinatat e tyre.

6. Cila pikë ndodhet më larg nga origjina e sistemit koordinativ, $A(4, 2)$ ose $B(-3, -4)$?

7. Cila nga pikat $A(5, 6)$ ose $B(5, 3)$ është më afër pikës $C(-3, 2)$?

8. Dy pikat skajore të një trau çeliku janë në koordinatat (–4,2) dhe (2,–2). Sa është gjatësia e traut?

9. Njehsoni gjatësitë e brinjëve të trekëndëshit $ABC$, nëse:
   a) $A(-1, 3)$, $B(2, 6)$ dhe $C(3, 2)$ b) $A(-3, 0)$, $B(0, 4)$ dhe $C(-3, -2)$
   Më pas njehsoni perimetrin e trekëndëshit $ABC$.

10. Kulmet e trekëndëshit a) $A(5, -3)$, $B(2, 4)$ dhe $C(3, 2)$ b) $A(3, 1)$, $B(4, 3)$ dhe $C(6, 2)$
    Përcaktoni nëse trekëndëshi është barakrahës, e pastaj njehsoni perimetrin e tij.

**HULUMTIM**

Në rrafshin koordinativ zgjidhni një pikë arbitrare $M(x, y)$. Pastaj, gjeni koordinatat e pikës $N$, nëse

a) pika $N$ është pasqyra e pikës $M$ nga simetria boshtore në lidhje me boshtin x.
b) pika $N$ është simetrike ndaj pikës $M$ nga simetria boshtore në lidhje me boshtin y.
c) pika $N$ është pasqyra e pikës $M$ për nga rrotullimi rreth origjinës së koordinatave për këndin prej $180^o$.

# 3.2. Pika e mesit e segmentit dhe syprina e trekëndëshit

## Pika e mesit e segmentit

**AKTIVITET**

Në boshtin numerik gjeni pikën e mesit të segmentit, skajet e të cilit janë:
a) $A(+5)$ dhe $B(+3)$ b) $M(-2)$ dhe $N(+4)$ c) $P(-1)$ dhe $Q(-5)$ ç) $S(-3)$ dhe $T(+6)$

Më pas, kontrolloni saktësinë e formulës për llogaritjen e koordinatës $x_3$ të pikës së mesit të segmentit, skajet e të cilit kanë koordinatat $x_1$ dhe $x_2$ në boshtin numerik: $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Përdorimi i sistemit koordinativ na lejon të gjejmë koordinatat e pikës së mesit të një segmenti të dhënë nga pikat skajore (skajet).

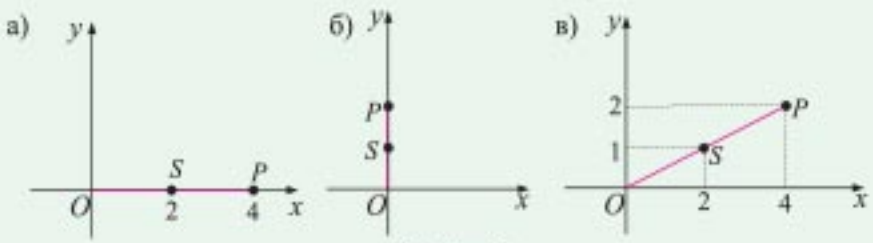
## SHEMBULLI 1

Një alpinist lëviz përgjatë një shtegu të drejtë nga pika e fillimit $O(0, 0)$ drejt pikës fundore:
a) $P(4, 0)$ b) $P(0, 2)$ c) $P(4, 2)$.
Gjeni koordinatat e mesit $S$ të shtegut $OP$.

a) Alpinisti lëviz përgjatë boshtit $x$. Koordinata e parë e mesit të shtegut është $\frac{4+0}{2} = 2$, ndërsa koordinata e dytë është 0, pra $S(2,0)$ (vizatimi 1 a).

b) Në këtë rast alpinisti lëviz përgjatë boshtit $y$. Koordinata e parë e mesit të shtegut është 0, ndërsa koordinata e dytë është $\frac{0+2}{2} = 1$, pra $S(0,1)$ (vizatimi 1 b).

c) Koordinata e parë e mesit të shtegut është $\frac{4+0}{2} = 2$, ndërsa koordinata e dytë është $\frac{0+2}{2} = 1$. Në këtë rast S(2,1) (vizatimi 1 c).

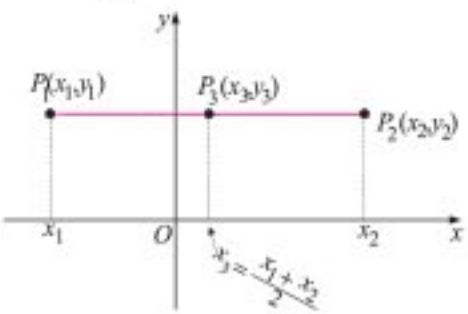



Vizatimi 1

Le të jetë $P_3(x_3, y_3)$ pika e mesit e segmentit me skajet $P_1(x_1, y_1)$ dhe $P_2(x_2, y_2)$.

Nëse $P_1$ dhe $P_2$ shtrihen në një drejtëz paralele me boshtin $x$, atëherë (vizatimi 2)

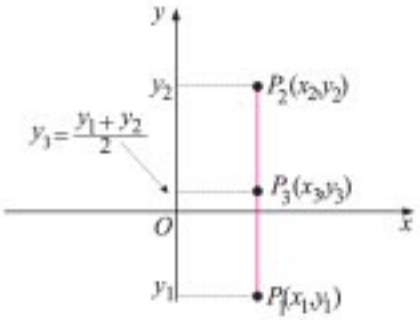
$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ dhe } y_3 = y_2 = y_1$$




Vizatimi 2

Nëse $P_1$ dhe $P_2$ shtrihen në një drejtëz paralele me boshtin $y$, atëherë (vizatimi 3)

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} \text{ dhe } x_3 = x_2 = x_1$$



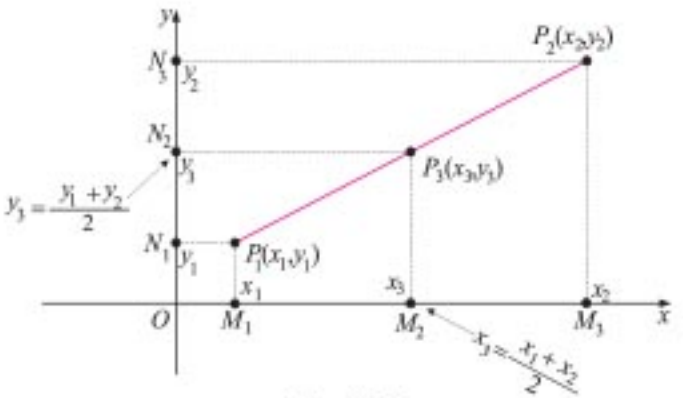

Vizatimi 3

Le të supozojmë se $P_1$ dhe $P_2$ nuk shtrihen në një drejtëz paralele me boshtin $x$, e as në një drejtëz paralele me boshtin $y$ (vizatimi 4).

Koordinatat e projeksioneve ortogonale $M_1$, $M_2$ dhe $M_3$, në boshtin $x$, të pikave $P_1$, $P_2$ dhe $P_3$, janë $x_1$, $x_2$ dhe $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, përkatësisht.

Koordinatat e projeksioneve ortogonale $N_1$, $N_2$ dhe $N_3$, në boshtin $y$, të pikave $P_1$, $P_2$ dhe $P_3$, janë $y_1$, $y_2$ dhe $y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$, përkatësisht.

Koordinatat e pikës $P$ janë $y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$ dhe $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$.



Vizatimi 4

### SHEMBULLI 2

Gjeni koordinatat e pikës së mesit $P_3(x_3, y_3)$ të segmentit me skaje $P_1(4, -5)$ dhe $P_2(-6, -3)$.

$x_3 = \frac{4 + (-6)}{2} = -1$ dhe $y_3 = \frac{-5 + (-3)}{2} = -4$

### DETYRA 1

Një tra homogjen i ka skajet në pikat $P(3, 7)$ dhe $R(11, -1)$. Ku ndodhet qendra e rëndesës $T$ të traut?

## Syprina e trekëndëshit

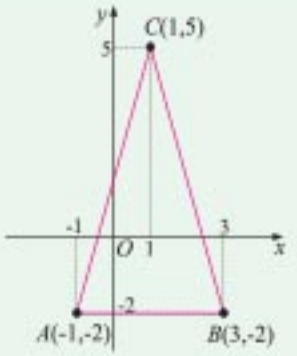
Syprina S e trekëndëshit $ABC$ me kulme $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ dhe $C(x_3, y_3)$ njehsohet me formulën $S = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$ njësi katrore.

### SHEMBULLI 3

Njehsoni syprinën e trekëndëshit $ABC$, nëse $A(-1, -2)$, $B(3, -2)$ dhe $C(1, 5)$ (vizitimi 5).

Sipas formulës për njehsimin e syprinës së një trekëndëshi, kulmet e të cilit janë dhënë me koordinatat e tyre, njehsojmë:

$$S = \frac{1}{2}|(-1)(-2 - 5) + 3(5 - (-2)) + 1(-2 - (-2)| =$$
$$= \frac{1}{2}|(-1)(-7) + 3(5 + 2) + 1(-2 + 2)| =$$
$$= \frac{1}{2}|7 + 21 + 0| = 14 \text{ njësi katrore.}$$



Vizatimi 5

Syprina e trekëndëshit $ABC$ me kulme $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ dhe $C(x_3, y_3)$ është e barabartë me zero, nëse dhe vetëm nëse kulmet e tij janë kolineare. Prandaj, **kushti për kolinearitetin** e tri pikave $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ dhe $C(x_3, y_3)$ është:

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$$

## SHEMBULLI 4

Kontrolloni nëse pikat $M(1, 2)$, $N(3, 6)$ dhe $P(5, 10)$ janë kolineare? $x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$

Sipas kushtit për kolinearitetin e tri pikave njehsojmë:
$1(6 - 10) + 3(10 - 2) + 5(2 - 6) = -4 + 24 - 20 = 0$
Pikat e dhëna janë kolineare.

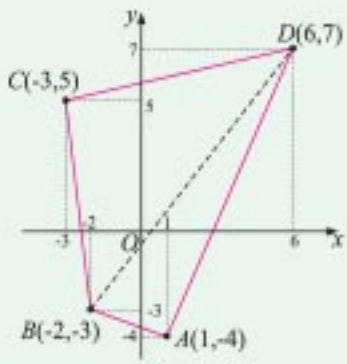
Për të gjetur syprinën e çfarëdo shumëkëndëshi, e ndajmë shumëkëndëshin në trekëndësha, të cilët janë disjunktë dhe unioni i të cilëve është i barabartë me shumëkëndëshin. Pastaj njehsojmë syprinat e trekëndëshave. Syprina e shumëkëndëshit është e barabartë me shumën e syprinave të të gjithë trekëndëshave.

## SHEMBULLI 5

Gjeni syprinën e katërkëndëshit ABCD, kulmet e të cilit janë $A(1, -4)$, $B(-2, -3)$, $C(-3, 5)$ dhe $D(6, 7)$ (vizitimi 6).

Llogarisim syprinën $S_1$ të trekëndëshit $ABD$:

$$S_1 = \frac{1}{2}|1(-3 - 7) + (-2)(7 - (-4)) + 6(-4 - (-3)| =$$
$$= \frac{1}{2}|1(-10) + (-2)(11) + 6(-1)| =$$
$$= \frac{1}{2}|-10 - 22 - 6| = 19 \text{ njësi katrore}$$



Vizatimi 6

Llogarisim syprinën $S_2$ të trekëndëshit $BCD$:

$$S_2 = \frac{1}{2}|(-2)(5 - 7) + (-3)(7 + 3) + 6(-3 - 5)| =$$
$$= \frac{1}{2}|(-2)(-2) + (-3) \cdot 10 + 6(-8)| =$$
$$= \frac{1}{2}|4 - 30 - 48| = 37 \text{ njësi katrore}$$

Për të llogaritur syprinën $S$ të katërkëndëshit $ABCD$, mbledhim syprinën $S_1$ të trekëndëshit $ABD$ dhe syprinën $S_2$ të trekëndëshit $BCD$:

$S = S_1 + S_2 = 19 + 37 = 56$ njësi katrore.

Syprina $S$ e katërkëndëshit $ABCD$ është 56 njësi katrore.

## DETYRA 2

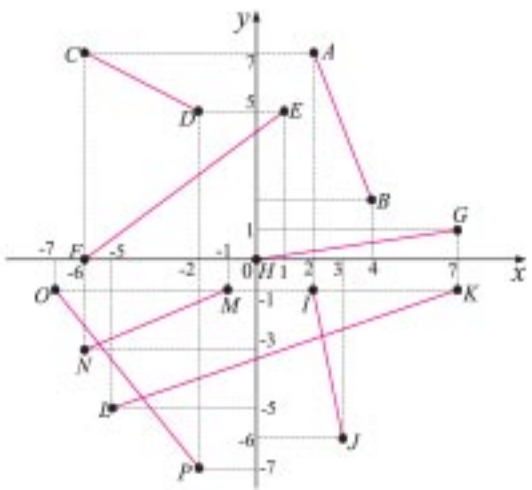
Për cilën vlerë të $a$ syprina e trekëndëshit $ABC$ me kulme $A(a, 2a)$, $B(3, 11)$ dhe $C(8, 6)$ është 5 njësi katrore?

## DETYRA 3

Ana jugore e çatisë së shtëpisë së Damianit është një trapez barakrahës $ABCD$, kulmet e të cilit kanë koordinata $A(-6, 0)$, $B(6, 0)$, $C(3, 4)$ dhe $D(-3, 4)$. Damiani dëshiron të vendosë panele diellore në të gjithë sipërfaqen e anës jugore të çatisë. Nëse nga 1 metër katror panele diellore Damiani mund të prodhojë 300 vat-orë energji elektrike në ditë, sa energji elektrike do të prodhojë gjatë një periudhe prej 90 ditësh me diell?

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Gjeni koordinatat e pikës së mesit $S$ të segmentit AB, nëse:
   a) $A(3, 6)$ dhe $B(9, 12)$ b) $A(-1, 2)$ dhe $B(3, 5)$ c) $A(-2, -4)$ dhe $B(-3, 7)$
2. Pika e mesit e segmentit $AB$ me skaje $A(10, a)$ dhe $B(4, 3)$ është $S(7, 5)$. Sa është vlera e parametrit $a$?
3. Në drejtkëndëshin $ABCD$ dy kulme të kundërta janë $A(-2,-4)$ dhe $C(8,6)$. Cilat janë koordinatat e prerjes $S$ të diagonaleve të drejtkëndëshit?
4. Një shinë e montuar është e vendosur nga pika $A$ deri te pika $B$. Cilat janë koordinatat e pikës së mesit $C$ në të cilën duhet të vendoset mbështetësja e shinës?
5. Njehsoni gjatësinë dhe gjeni pikën e mesit të çdo segmenti në vizatimin 7.
6. Njehsoni syprinën e paralelogramit $ABCD$, nëse $A(0, 1)$, $B(3, 7)$, $C(4, 4)$ dhe $D(1, -2)$.
7. Njehsoni syprinën e trapezit $ABCD$, nëse $A(1, 4)$, $B(5, 3)$, $C(-3, -5)$ dhe $D(-2, 1)$.
8. Tregoni nëse pikat $A(1, 2)$, $B(3, 6)$ dhe $C(5, 10)$ janë kolineare
9. Pikat $A(-2, -3)$, $B(3, -1)$ dhe $C(1, 4)$ janë kulme të trekëndëshit $ABC$. Njehsoni syprinën e trekëndëshit $A_1B_1C_1$, nëse $A_1$, $B_1$ dhe $C_1$ janë pikat e mesit të brinjëv $BC$, $AC$ dhe $AB$, përkatësisht.
10. Një punëtor ka salduar një pllakë metali me kulme në $A(-2,-1)$, $B(4,3)$ dhe $C(1,6)$. Sa është syprina e pllakës?



Vizatimi 7

# 3.3. Funksioni linear

## Fusha e përkufizimit dhe bashkësia e vlerave të funksionit linear

### SHEMBULLI 1

Një tren u nis nga stacioni i cili ndodhet 4 kilometra larg qytetit A dhe filloi të lëvizë në mënyrë të njëtrajtshme, me shpejtësi 50 kilometra në orë, në srejtim të kundërt të qytetit A. Në çfarë distance nga qyteti A do të jetë treni pas 1, 2, 3, ..., $x$ orësh nga nisja?

Pas 1 ore treni do të jetë larguar $A$ $(50 \cdot 1 + 4)$ kilometra nga qyteti A, pas 2 orësh do të jetë larguar $(50 \cdot 2 + 4)$ kilometra, pas $x$ orësh do të jetë larguar $(50 \cdot x + 4)$ kilometra.

Nëse me $y$ e shënojmë rrugën e kaluar, e cila është në funksion të kohës $x$, atëherë mund të shkruajmë se pas $x$ orësh treni do të jetë i larguar nga qyteti $A$ për $y(x) = (50 \cdot x + 4)$ kilometra.

Funksioni $y$ që jep numrin e kilometrave të përshkuar në varësi të numrit të orëve $x$ është funksioni linear $y = 50x + 4$.



Një funksion i formës $y = ax + b$, ku $a$ dhe $b$ janë numra realë, ndërsa $x$ është **ndryshore e pavarur** quhet **funksion linear.**
Numri $a$ quhet **koeficienti përpara ndryshores së pavarur** $x$, ndërsa numri $b$ quhet **termi i lirë i funksionit linear.**

Në rast të përgjithshëm, **fusha e përkufizimit (domeni)** $D$ e funksionit linear $y = ax + b$ është bashkësia e numrave realë $\mathbb{R}$, pra $D = \mathbb{R}$.

Në mënyrë të ngjashme, në rast të përgjithshëm, nëse koeficienti përpara ndryshores $a \neq 0$, atëherë **bashkësia e vlerave** V të funksionit linear është bashkësia e numrave realë $\mathbb{R}$, pra $D = \mathbb{R}$.

Nëse $a = 0$, atëherë funksioni linear quhet **funksion konstant.**
Për funksionin konstant $y = b$, bashkësia e vlerave $V = \{b\}$ është bashkësi njëelementëshe.

Nëse funksioni shqyrtohet në kushte të caktuara, fusha e përkufizimit dhe bashkësia e vlerave mund të jenë nënbashkësi të vërteta të bashkësisë së numrave realë $\mathbb{R}$. Në këtë kuptim, për fushën e përkufizimit dhe bashkësinë e vlerave të funksionit linear nga shembulli 1 kemi $D = [0, +\infty)$, $V = [4, +\infty)$.

### SHEMBULLI 2

a) Funksioni $y = -3x + 5$ është linear me koeficient $a = -3$ dhe term të lirë $b = 5$.
Për fushën e përkufizimit dhe bashkësinë e vlerave kemi se $D = V = \mathbb{R}$.

b) Funksioni $y = 3$ është funksion konstant, sepse koeficienti $a = 0$.
Për fushën e përkufizimit dhe bashkësinë e vlerave kemi se $D = \mathbb{R}$ dhe $V = \{3\}$.

## DETYRA 1

Në një rezervuar ka 10 litra ujë. Çdo minutë në rezervuar derdhen nga 5 litra ujë.

a) Shkruani funksionin linear që përcakton varësinë e sasisë së ujit në rezervuar nga koha për të cilën mbushet rezervuari.

b) Sa është koeficienti përpara ndryshores së pavarur, dhe sa është termi i lirë i funksionit linear?

c) Përcaktoni fushën e përkufizimit dhe bashkësinë e vlerave të funksionit.

### SHEMBULLI 3

Gjeni vlerën e koeficientit $a$, të funksionit linear $y = ax - 4$, nëse $y(3) = 2$.

Duhet të gjejmë vlerën e koeficientit $a$, ashtu që për vlerën e ndryshores $x = 3$ funksioni të marrë vlerën $y(3) = 2$. Kjo do të thotë se $a \cdot 3 - 4 = 2$ prej nga rrjedh se vlera e koeficientit përpara ndryshores është $a = 2$.

## Grafiku i funksionit linear dhe prerjet e grafikut me boshtet koordinative

### SHEMBULLI 4

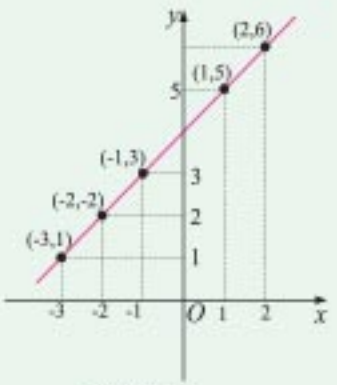
Në tabelë janë dhënë disa vlera të funksionit linear $y = x + 4$ që korrespondojnë me vlerat e ndryshores $x$.

| $x$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Komponenta e parë e çifteve të renditura (−3, 1), (−2, 2), (−1, 3), (0,4), (1, 5) dhe (2, 6) është vlera e ndryshores $x$, ndërsa komponenta e dytë është vlera përkatëse e funksionit $y$.

Këto çifte të renditura mund t'i paraqesim si pika në rrafshin koordinativ, duke vendosur në boshtin $x$ koordinatën e parë, dhe në boshtin $y$ koordinatën e dytë.

Duke i lidhur ato, fitojmë drejtëz, e cila vizualisht paraqet grafikun e funksionit linear të dhënë (vizatimi 1).




Vizatimi 1

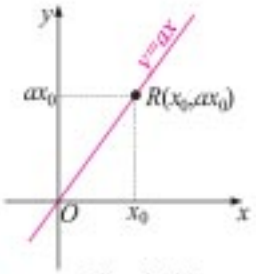


Grafiku i funksionit linear $y = ax$ është drejtëza e cila kalon nëpër origjinën e sistemit koordinativ (vizatimi 2).

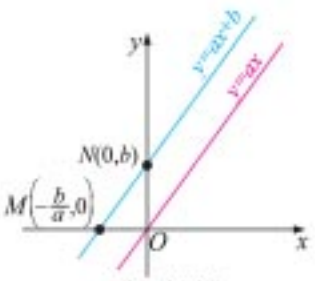
Për të vizatuar grafikun e funksionit linear $y = ax$, mjafton të vizatojmë një pikë $R(x_0, ax_0)$.. Pastaj, vizatojmë një vijë të drejtë që kalon përmes origjinës së koordinatave dhe pikës $R(x_0, ax_0)$.

Grafiku i funksionit linear $y = ax + b$ është drejtëz paralele me grafikun e funksionit linear $y = ax$, e pret boshtin e abshisave në pikën $M\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ dhe boshtin e ordinatave në pikën $N(0, b)$ (Vizatim 3).

Në këtë kuptim, koeficienti $a$ përpara ndryshores së pavarur quhet **koeficient i drejtimit** i funksionit linear, dhe termi i lirë $b$ quhet **prerje në boshtin e ordinatave**. Për të vizatuar grafikun e funksionit linear $y = ax + b$, mjafton të vizatojmë dy pika të grafikut. Më së shpeshti vizatojmë pikat e prerjes me boshtet koordinative $M\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ dhe $N(0, b)$. Vlera e ndryshores $x_0 = -\frac{b}{a}$ për të cilën vlera e funksionit linear është e barabartë me zero quhet **zero e funksionit**.



Vizatimi 2



Vizatimi 3

## SHEMBULLI 5

Zero e funksionit linear $y = 2x - 4$ është vlera e ndryshores $x_0 = -\frac{-4}{2} = 2$.

Prerja e funksionit linear me boshtin $x$ është në pikën $M(2, 0)$.
Prerja e funksionit linear me boshtin $y$ është në pikën $N(0, -4)$.

## SHEMBULLI 6

Vizatoni grafikun e funksionit linear: a) $y = 2x + 3$ b) $y = -x + 2$

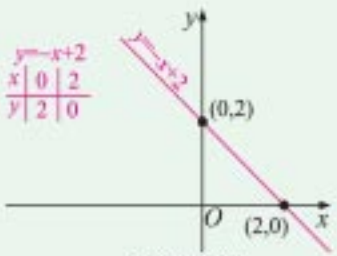
I gjejmë pikat e prerjes së grafikut me boshtet koordinative, e pastaj e vizatojmë drejtëzën e cila kalon përmes këtyre dy pikave.

a)



Vizatimi 4

b)



Vizatimi 5

## DETYRA 2

Një automobil ngadalëson nga një shpejtësi prej 25 metra në sekondë me një nxitim prej $-1$ m/s².

a) Vizatoni grafikun e shpejtësisë së automobilit, në varësi të kohës, derisa automobili të ndalojë së lëvizuri.
b) Përcaktoni kohën pas së cilës automobili do të ndalojë.

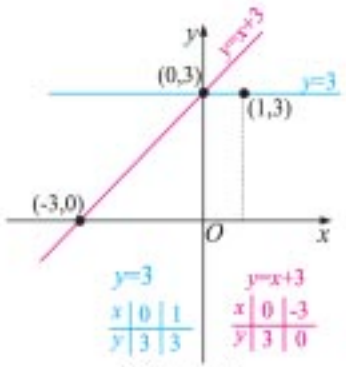
## AKTIVITET

a) Vizatoni në të njëjtin sistem koordinativ grafikët e funksioneve lineare $y = 3$ dhe $y = x + 3$. Krahasoni prerjet në boshtin e ordinatave, e pastaj përcaktoni pozicionin e ndërsjellë të dy grafikëve. Çfarë mund të përfundoni?

b) Vizatoni në të njëjtin sistem koordinativ grafikët e funksioneve lineare $y = 2x$ dhe $y = 2x$ dhe krahasoni koeficientët e drejtimit, dhe më pas përcaktoni pozicionin e ndërsjellë të dy grafikëve. Çfarë mund të përfundoni?

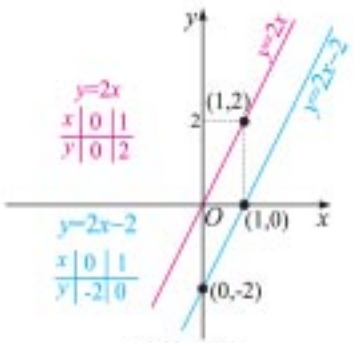
Nëse keni vizatuar saktë, me siguri fituat që grafikët e funksioneve lienare $y = 3$ dhe $y = x + 3$ priten në pikën $N(0, 3)$ (vizatimi 6), pasi që kanë prerje të njëjtë në boshtin e ordinatave, ndërsa grafikët e funksioneve lineare $y = 2x$ dhe $y = 2x - 2$ janë paralele, pasi funksionet lineare kanë të njëjtin koeficient të drejtimit (vizatimi 7).

a)




Vizatimi 6

b)




Vizatimi 7

1. Grafikët e funksioneve lineare $y = ax + b_1$ dhe $y = ax + b_2$, me koeficient të njëjtë drejtimi dhe me prerje të ndryshme në boshtin e ordinatës, janë drejtëza paralele.
2. Në veçanti, grafiku i funksionit $y = ax + b$, për $a = 0$ është drejtëz paralele me boshtin $x$, e cila kalon nëpër pikën $N(0, b)$.
3. Grafikët e funksioneve lineare $y = a_1x + b$ dhe $y = a_2x + b$, me prerje të njëjtë $b$ në boshtin e ordinatave dhe koeficientë drejtimi të ndryshme, janë drejtëza të calet e presin boshtin e ordinatave në pikën $N(0, b)$.

## SHEMBULLI 7

Gjeni koeficientin e drejtimit $a$, ashtu që grafiku i funksionit lenar $y = ax + 6$ të jetë drejtëz paralele me grafikun e funksionit linear $y = 3x + 4$.

Grafikët e të dy funksioneve lineare do të jenë paralele, nëse koeficientët e drejtimit do i kenë të barabartë, pra nëse $a = 3$.

## SHEMBULLI 8

Gjeni prerjen në boshtin e ordinatave $b$, ashtu që grafiku i funksionit linear $y = 6x - b$ ta presë boshtin e ordinatave në pikën e njëjtë në të cilën e pret edhe grafiku i funksionit linear $y = -2x + 6$.

Grafikët e të dy funksioneve lineare do ta presin boshtin e ordinatave në pikën e njëjtë, $b = -6$.

## DETYRA 3

Mile dëshiron të transferojë fotot e ekskursionit nga telefoni në kompjuter. Madhësia totale e fotove që duhet të transferohen është 750 megabajt. Pasi ka transferuar 300 megabajt fotografi, vuri re se për të transferuar fotot e mbetura duhet të presë edhe 90 sekonda.

a) Përcaktoni shpejtësinë mesatare të transferimit të të dhënave.

b) Vizatoni një grafik në të cilin shihet se si varet madhësia e fotove të transferuara nga koha e transferimit të fotove.

## Monotonia e funksionit linear

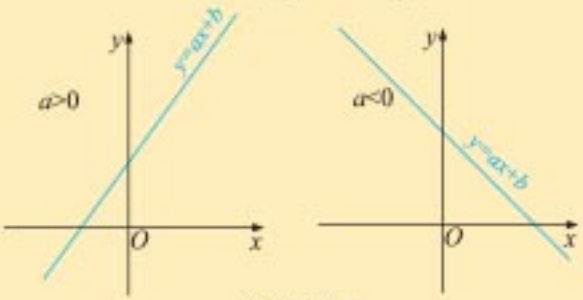
Funksioni linear në të cilin me rritjen e vlerës së ndryshores rritet edhe vlera e funksionit quhet **funksion monoton rritës.**
Funksioni linear në të cilin me rritjen e vlerës së ndryshores zvogëlohet vlera e funksionit quhet **funksion monoton rënës (zvogëlues ose zbritës).**
Për funksionin konstant do të themi se nuk është as monoton rritës dhe as monoton rënës.

### SHEMBULLI 9

a) Funksioni linear $y = 3x + 4$ është monoton rritës, sepse për $x_1 < x_2$ vlen $3x_1 + 4 < 3x_2 + 4$, pra $y(x_1) < y(x_2)$. Vërejmë se koeficienti i drejtimit është pozitiv.

b) Funksioni linear $y = -3x + 4$ është monoton rënës, sepse për $x_1 < x_2$ vlen $-3x_1 + 4 > -3x_2 + 4$, pra $y(x_1) > y(x_2)$. Në këtë rast koeficienti i drejtimit është negativ.

Funksioni linear $y = ax + b$ është monoton rritës nëse dhe vetëm nëse $a > 0$, ndërsa është monoton rënës nëse dhe vetëm nëse $a < 0$ (vizatimi 8).




Vizatimi 8

## DETYRA 4

Xhemaili hedh një gur me masë 0,1 kilogram nga një shkëmb 85 metra i lartë.

a) Vizatoni grafikun e energjisë potenciale të gurit në varësi të lartësisë, nga momenti i hedhjes deri në rënien e gurit në tokë.

b) A është funksioni monoton rritës apo monoton rënës?

## Studimi i kahut (rrjedhës) së funksionit linear

Të studiohet kahu (rrjedha) e një funksion linear do të thotë:
1. Të përcaktohet fusha e përkufizimit dhe bashkësia e vlerave të funksionit,
2. Të përcaktohen prerjet me boshtet koordinative, dhe
3. Të përcaktohet nëse funksioni është rritës, rënës apo konstant.

### SHEMBULLI 10

Studioni kahun dhe skiconi grafikun e funksionit linear $y = 3x - 1$.

1. Për fushën e përkufizimit D dhe bashkësinë e vlerave $V$ kemi $D = V = \mathbb{R}$.
2. Grafiku i funksionit linear e pret boshtin $x$ në pikën $M\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ dhe boshtin $y$ në pikën $N(0, -1)$
3. Funksioni është monoton rritës, sepse koeficienti i drejtimit është pozitiv. Konstruktimi i grafikut është paraqitur në vizatimin 9.



Vizatimi 9

### DETYRA 5

Ketri Verka ka 3000 lajthi për të kaluar dimrin. Funksioni që përshkruan numrin e lajthive të mbledhura nga Verka këtë vit është dhënë me $y = 60x + n$, ku $x$ është numri i ditëve në të cilat Verka ka mbledhur lajthi.

a) Nëse këtë vit Verka ka mbledhur lajthi për 43 ditë, sa lajthi i kanë mbetur nga viti i kaluar?

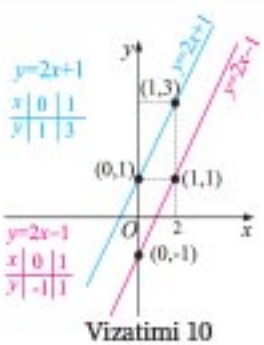
b) Studioni kahun dhe vizatoni grafikun e funksionit.

## Barazimi i drejtëzës. Kushti për paralelizëm dhe normalitet të dy drejtëzave

Pamë se grafiku i një funksioni linear është drejtëz. Për këto arsye, shprehja analitike për funksionin linear $y = ax + b$, ku $a$ dhe $b$ janë numra realë, mund ta interpretojmë si **barazim të drejtëzës**, me **koeficient drejtimi** $a$ dhe **prerje në boshtin e ordinatave** $b$.

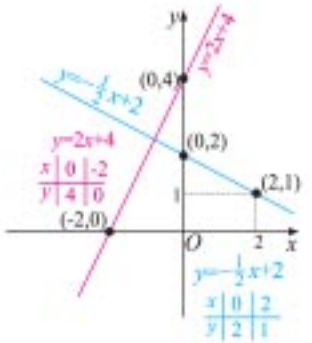
### SHEMBULLI 11

a) Në vizatimin 10 janë paraqitur dy drejtëza paralele $y = 2x + 1$ dhe $y = 2x - 1$.
Për koeficientët e tyre të drejtimit vlen $a_1 = a_2 = 2$.



Vizatimi 10

b) Në vizatimin 11 janë paraqitur dy drejtëza reciprokisht normale $y = 2x + 4$ dhe $y = -\frac{1}{2}x + 2$. Për koeficientët e tyre të drejtimit vlen $a_1 \cdot a_2 = 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1$.



Vizatimi 11

**Kushti për paralelizëm të dy drejtëzave** thotë:
Dy drejtëza $y = a_1x + b_1$ dhe $y = a_2x + b_2$ janë paralele nëse dhe vetëm nëse $a_1 = a_2$.

**Kushti për normalitet të dy drejtëzave** thotë:
Dy drejtëza $y = a_1x + b_1$ dhe $y = a_2x + b_2$ janë normale nëse dhe vetëm nëse $a_1 \cdot a_2 = -1$.

## SHEMBULLI 12

Është dhënë drejtëza $y = \frac{1}{4}x + 2$. Shkruani barazimin e drejtëzës që:
a) është paralele me drejtëzën e dhënë dhe kalon nëpër pikën $A(4, 8)$,
b) është normale me drejtëzën e dhënë dhe kalon nëpër pikën $A(-3, 1)$.

a) Drejtëza e dhënë ka koeficient drejtimi $a_1 = \frac{1}{4}$. Sipas kushtit për paralelizëm të dy drejtëzave, koeficienti i drejtimit të drejtëzës së kërkuar është $a_2 = \frac{1}{4}$. Drejtëza e kërkuar kalon nëpër $A(4, 8)$, që do të thotë $8 = \frac{1}{4} \cdot 4 + b_2$, që do të thotë $b_2 = 7$. Barazimi i drejtëzës së kërkuar është $y = \frac{1}{4}x + 7$.
b) Drejtëza e dhënë ka koeficient drejtimi $a_1 = \frac{1}{4}$. Sipas kushtit për normalitet të dy drejtëzave, koeficienti i drejtimit të drejtëzës së kërkuar është $a_2 = -4$. Drejtëza e kërkuar kalon nëpër $A(-3, 1)$, që do të thotë $1 = -4 \cdot (-3) + b_2$, që do të thotë $b_2 = -11$. Barazimi i drejtëzës së kërkuar është $y = -4x - 11$.

## DETYRA 6

Është dhënë trekëndëshi $ABC$ me kulmet $A(-5, -2)$, $B(7, 6)$ dhe $C(5,4)$. Shkruani barazimin e lartësisë ndaj brinjës $AB$.

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Perimetri $L$ i një trekëndëshi barakrahës, me bazë 4 cm dhe krah $b$ ($b > 2$cm) është $L = 4\text{ cm} + 2b$.
   a) Shkruani funksionin linear që përcakton varësinë e perimetrit nga krahu i trekëndëshit.
   b) Sa është koeficienti i drejtimit, dhe sa është prerja në boshtin e ordinatave të funksionit linear?
   c) Përcaktoni fushën e përkufizimit dhe bashkësinë e vlerave të funksionit.

2. Gjeni prerjet me boshtet koordinative të grafikut të funksionit linear:
   a) $y = x - 3$  b) $y = \frac{2}{3}x + \frac{3}{5}$  c) $y = \frac{4 - x}{9}$  ç) $y = \frac{2}{7} - \frac{x + 1}{3}$

3. Llogaritni vlerën e koeficientit të drejtimit $a$ në funksionin linear:

   a) $y = ax + 7$, nëse $x_0 = -\frac{2}{3}$ është zero e funksionit,

   b) $y = \frac{1}{a+1}x + \frac{3}{a}$, nëse grafiku i tij e pret boshtin $y$ në pikën $N(0, 3)$,

   c) $y = \frac{2a+3}{5}x - \frac{1+x}{3}$, nëse grafiku i tij kalon nëpër pikën $M(1, 1)$.

4. Cili nga funksionet e mëposhtme është rritës, dhe cili është rënës:

   a) $y = -x - 3$ b) $y = \frac{1}{2} - 3x$ c) $y = \frac{x}{4} + 2$ ç) $y = -x$

5. Studioni kahun dhe skiconi grafikun e funksionit linear:

   a) $y = -x + 7$ b) $y = 3x + 9$ c) $y = 2 - 6x$ ç) $y = x - 6$.

6. Një makinë elektrike është e lidhur në një prizë shtëpiake. Bateria ka një kapacitet prej 100 kilovat-orë energji elektrike. Priza e karikon baterinë me një shpejtësi konstante prej 8 kilovat-orë energji elektrike për çdo orë.

   a) Shkruani një funksion linear që modelon nivelin e baterisë, nëse bateria ka qenë e zbrazur në fillim.

   b) Sa energji ka në bateri pas 4.5 orësh?

   c) Sa kohë do të duhet për karikimin e plotë të baterisë?

7. Kapaciteti i mbetur i baterisë së telefonit celular i shprehur në përqindje në varësi të kohës është dhënë me funksionin $y = -5x + 80$, ku $x$ është koha e shprehur në orë. Lulja e lidh telefonin në prizë sapo telefoni ka një kapacitet të mbetur prej 15%.

   a) Pas sa kohësh Lulja do ta heqë telefonin nga priza?

   b) Vizatoni grafikun për kapacitetin e mbetur të telefonit në varësi të kohës.

   c) A është funksioni monoton rritës apo monoton rënës?

8. Temperatura e një filxhani çaji të ngrohtë bije për 3 °C çdo minutë. Temperatura fillestare e çajit është 85 °C.

   a) Sa gradë do të ketë çaji pas 8 minutash?

   b) Pas sa minutash çaji do të arrijë temperaturën prej 40 °C?

   c) Studioni kahun dhe vizatoni grafikun e funksionit.

9. Gjatë elektrolizës së ujit me një intensitet rryme prej 1 amper, sasia e hidrogjenit të liruar është $y = (0{,}115x + 0{,}5)$ mililitra, ku $x$ është koha e shprehur në sekonda.

   a) Vizatoni një grafik të sasisë së hidrogjenit të liruar në varësi të kohës.

   b) Sa është sasia e hidrogjenit të lirë në fillim të elektrolizës?

   c) Sa kohë duhet të kalojë që sasia e hidrogjenit të liruar të jetë më e madhe se 20 mililitra?

10. Shkruani barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikën $A(-2, -5)$ dhe është paralele me drejtëzën $y = 4x + 7$.

11. Përcaktoni tre çifte drejtëzash paralele nga barazimet e dhëna:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $y = 7 - x$ | $2y + 5x = 3$ | $5y - x = 2$ | $5x = 7 - 2y$ | $x - y = 3$ |
| $x + y = 27$ | $-x = 5y$ | $3y + 5 = 3x$ | $y + 5x = 1$ | $3y - 5x = 5$ |

12. Gjeni barazimin e drejtëzës që është normale me $2x + 2y = 5$ dhe kalon nëpër pikën $B(1, -2)$.

13. Segmenti $MN$ për skaje ka pikat $M(7, 4)$ dhe $N(2, 5)$. Shkruani barazimin e drejtëzës $AB$, e cila është normale me drejtëzën $MN$ dhe e përgjysmon segmentin $MN$

14. Janë dhënë kulmet $A(-4, -5)$ dhe $C(3, 8)$ të drejtkëndëshit $ABCD$ dhe barazimi i drejtëzës $x + 2y - 19 = 0$ në të cilën shtrihet njëra nga brinjët e tij. Shkruani barazimet e drejtëzave në të cilat shtrihen brinjët e tjera të drejtkëndëshit.

**HULUMTIM**

a) Vizatoni në të njëjtin sistem koordinativ funksionet lineare $y = 2x$ dhe $y = 3x$.
Përcaktoni lidhjen midis shpejtësisë së rritjes së dy funksioneve në varësi të koeficientëve të tyre të drejtimit.

b) Vizatoni në të njëjtin sistem koordinativ funksionet lineare $y = -2x$ dhe $y = -3x$.
Përcaktoni lidhjen midis shpejtësisë së rënies së dy funksioneve në varësi të koeficientëve të tyre të drejtimit.

c) Hulumtoni dhe zbuloni nëse në rastin e përgjithshëm ekziston një lidhje midis shpejtësisë së rritjes, si dhe shpejtësisë së rënies te funksioni linear të formës $y = ax$, në varësi të koeficientit të drejtimit $a$.

## 3.4. Funksionet e fuqisë

**SHEMBULLI 1**

Nëse gjatësia e brinjës së katrorit është $a = 2$ cm, atëherë syprina e katrorit është $a^2 = 2^2$ cm$^2$. Sa do të jetë syprina e katrorit, nëse gjatësia e brinjës është 3 cm, 4 cm,..., $x$ cm?

Syprina e katrorit ndryshon në varësi të gjatësisë së brinjës.
Funksioni $y$ që përshkruan syprinën e katrorit në varësi të gjatësisë së brinjës $x$ është një shembull i funksionit të fuqisë.

Funksioni i formës $y = ax^n$, ku $a$ është numër real, $a \neq 0$, $n$ është numër i plotë, $n \neq 0, 1$, dhe $x$ është **ndryshore e pavarur** quhet **funksion i fuqisë.**

Kufizimi $a \neq 0$ dhe $n \neq 0, 1$, në përkufizim është i nevojshëm sepse për $a = 0$ ose $n = 0$, funksionet $y = ax^n = 0 \cdot x^n = 0$ dhe $y = ax^n = ax^0 = a$ janë funksione konstante, ndërsa funksioni $y = ax^1 = ax$ është funksion linear. Të dy llojet e funksioneve nuk i përkasin klasës së funksioneve të fuqisë.

## SHEMBULLI 2

Funksionet $y = x^3, y = 5x^7$, $y = \frac{1}{x}$ dhe $y = \frac{1}{2x^6}$ janë shembuj të funksioneve të fuqisë.

**1⁰.** Le të jetë $y = ax^n$, ku $n$ është numër natyror çift.

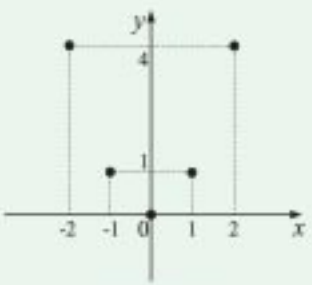
## SHEMBULLI 3

Vizatoni grafikun e funksionit $y = x^2$.

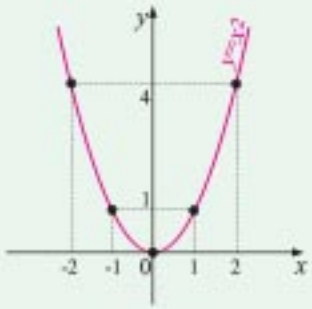
Gjejmë disa pika të grafikut me ndihmën e tabelës së vlerave:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = x^2$ | $(-2)^2 = 4$ | $(-1)^2 = 1$ | $0^2 = 0$ | $1^2 = 1$ | $2^2 = 4$ |

Pastaj i vendosim ato në një sistem koordinativ (vizatimi 1).




Vizatimi 1




Vizatimi 2

Nëse i lidhim me një vijë të vazhdueshme pikat, koordinatat e të cilave janë dhënë në tabelë, do të fitojmë grafikun e funksionit (vizatimi 2).

Funksionin $y = x^2$ e quajmë gjithashtu **funksion katror** (kuadratik).

Në rastin e përgjithshëm, fusha e përkufizimit është $D = \mathbb{R}$, ndërsa bashkësia e vlerave $V = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Nëse funksioni shqyrtohet në kushte të caktuara, fusha e përkufizimit dhe bashkësia e vlerave mund të jenë nënbashkësi të vërteta të bashkësisë së numrave realë, përkatësisht të bashkësisë së numrave realë jonegativë.

Funksioni **bie sipas fuqisë** (funksioni është fuqi dhe monoton rënës) në intervalin $(-\infty, 0)$ dhe **rritet sipas fuqisë** (funksioni është fuqi dhe monoton rritës) në intervalin $(0, +\infty)$.

Në rastin e përgjithshëm, grafiku i tij është një kurbë që quhet **parabolë**. Pika $O(0, 0)$ quhet **kulm** i parabolës. Vërejmë se parabola është **e hapur nga lart**.

## SHEMBULLI 4

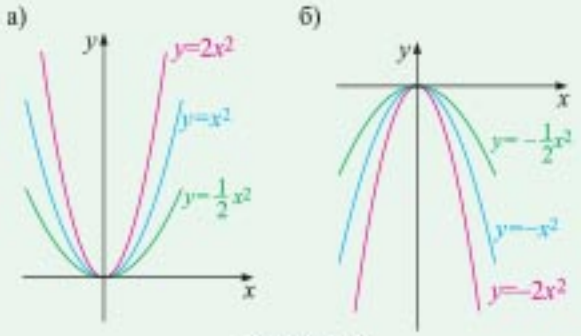
Vizatoni në të njëjtin sistem koordinativ grafikët e funksioneve:

a) $y = x^2, y = 2x^2$ dhe $y = \frac{1}{2}x^2$ b) $y = -x^2, y = -2x^2$ dhe $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Hartojmë tabelën e vlerave për secilin nga funksionet:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y=x^2$ | $(-2)^2=4$ | $(-1)^2=1$ | $0^2=0$ | $1^2=1$ | $2^2=4$ |
| $y=2x^2$ | $2\cdot(-2)^2=8$ | $2\cdot(-1)^2=2$ | $2\cdot 0^2=0$ | $2\cdot 1^2=2$ | $2\cdot 2^2=8$ |
| $y=\frac{1}{2}x^2$ | $\frac{1}{2}\cdot(-2)^2=2$ | $\frac{1}{2}\cdot(-1)^2=\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\cdot 0^2=0$ | $\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\cdot 2^2=2$ |
| $y=-x^2$ | $-(-2)^2=-4$ | $-(-1)^2=-1$ | $-0^2=0$ | $-1^2=-1$ | $-2^2=-4$ |
| $y=-2x^2$ | $(-2)\cdot(-2)^2=-8$ | $(-2)\cdot(-1)^2=-2$ | $(-2)\cdot 0^2=0$ | $(-2)\cdot 1^2=-2$ | $(-2)\cdot 2^2=-8$ |
| $y=-\frac{1}{2}x^2$ | $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-2)^2=-2$ | $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)^2=-\frac{1}{2}$ | $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0^2=0$ | $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1^2=-\frac{1}{2}$ | $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2^2=-2$ |

Nëse, veçmas për secilin funksion, i lidhim me vijë të vazhdueshme pikat, koordinatat e të cilave janë dhënë në tabelë, fitojmë grafikun e funksionit (vizatimi 3).




Vizatimi 3

a) Funksionet $y=x^2$, $y=2x^2$ dhe $y=\frac{1}{2}x^2$ **bien sipas fuqisë** në intervalin $(-\infty, 0)$ dhe **rriten sipas fuqisë** në intervalin $(0, +\infty)$ (vizatimi 3a)). Grafikët e funksioneve janë parabola të **hapura nga lart.**

b) Funksionet $y=-x^2$, $y=-2x^2$ dhe $y=-\frac{1}{2}x^2$ **rriten sipas fuqisë** në intervalin $(-\infty, 0)$ dhe **bien sipas fuqisë** në intervalin $(0, +\infty)$ (vizatimi 3b)). Grafikët e funksioneve janë parabola **të hapura nga poshtë.**

## SHEMBULLI 5

a) Si ndryshon numri kuantik magnetik $m$, nëse numri kuantik kryesor është $n=1, 2, 3, 4, 5$? Çfarë vëreni?

b) Shkruani funksionin që jep numrin e të gjithë numrave kuantikë magnetikë $m$ në varësi të numrit kuantik kryesor $n$.

c) Vizatoni grafikun e funksionit.

Numri kuantik kryesor $n$ përfaqëson nivelin kryesor energjetik të elektronit në atom. Vlerat e tij janë $n=1, 2, 3,\ldots$ Për një $n$ të dhënë, vlerat e lejuara të numrit kuantik orbital janë $l=0, 1, 2,\ldots, n-1$. Për një $l$ të dhënë, vlerat e lejuara të numrit kuantik magnetik janë $m=-l, -l+1,\ldots, 0,\ldots, l-1, l$. Kështu, numri i vlerave të lejuara të $m$ për një nivel të dhënë $n$ është shuma e numrit të vlerave të $m$ për çdo $l=0, 1, 2,\ldots, n-1$.

a) Le të llogarisim numrin e vlerave të lejuara të $m$, për $n = 1, 2, 3, 4, 5$:

Nëse $n = 1$, atëherë $l = 0$, prandaj sipas kësaj $m = 0$.

Në këtë rast, numri i përgjithshëm i vlerave të $m$ është 1 (i paraqitur në rreshtin e parë të tabelës).

Nëse $n = 2$, numri orbital $l = 0$ ose $l = 1$. Për $l = 0$, numri magnetik $m = 0$, ndërsa për $l = 1$, numri magnetik $m = -1, 0, 1$.

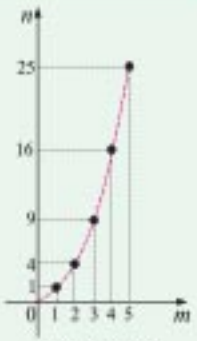
Së fundi, numri i përgjithshëm i vlerave për $m$ është $1 + 3 = 4$ (i paraqitur në rreshtin e dytë të tabelës).

| $n$ | $l$ | $m$ | Numri i përgjithshëm i vlerave për $m$ | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| | 1 | −1, 0, 1 | 3 | |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 9 |
| | 1 | −1, 0, 1 | 3 | |
| | 2 | −2, −1, 0, 1, 2 | 5 | |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 16 |
| | 1 | −1, 0, 1 | 3 | |
| | 2 | −2, −1, 0, 1, 2 | 5 | |
| | 3 | −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3 | 7 | |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 25 |
| | 1 | −1, 0, 1 | 3 | |
| | 2 | −2, −1, 0, 1, 2 | 5 | |
| | 3 | −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3 | 7 | |
| | 4 | −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4 | 9 | |

Numri i vlerave të mundshme të numrit kuantik magnetik $m$ për një numër kuantik kryesor të dhënë $n$ është $m = n^2$.

b) Funksion që jep varësinë e numrit kuantik magnetik $m$ nga numri kuantik kryesor $n$, është funksioni kuadratik $m = n^2$ fusha e përkufizimit të të cilit është $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

c) Grafiku i funksionit është paraqitur në vizatimin 4.



Vizatimi 4

**2°.** Le të jetë $y = ax^n$, ku $n$ është numër natyror tek, $n \neq 1$.

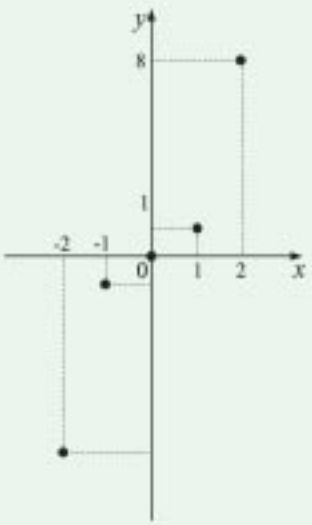
## SHEMBULLI 6

Vizatoni grafikun e funksionit $y = x^3$.

Gjejmë disa pika të grafikut me ndihmën e tabelës:

| $x$ | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = x^3$ | $(-2)^3 = -8$ | $(-1)^3 = -1$ | $0^3 = 0$ | $1^3 = 1$ | $2^3 = 8$ |

Pastaj i vendosim ato në një sistem koordinativ (vizatimi 5).




Vizatimi 5




Vizatimi 6

Nëse i lidhim me një vijë të vazhdueshme pikat, koordinatat e të cilave janë dhënë në tabelë, fitojmë grafikun e funksionit (vizatimi 6).

Në rastin e përgjithshëm, **fusha e përkufizimit** është $D = \mathbb{R}$, ndërsa **bashkësia e vlerave** $V = \mathbb{R}$. Nëse funksioni shqyrtohet në kushte të caktuara, fusha e përkufizimit dhe bashkësia e vlerave mund të jenë nënbashkësi të vërteta të bashkësisë së numrave realë. Funksioni **rritet sipas fuqisë** në të gjithë domenin e përkufizimit. Në rastin e përgjithshëm, grafiku i tij është lakore e quajtur **parabolë kubike**.

## DETYRA 1

Në të njëjtin sistem koordinativ vizatoni grafikët e funksioneve dhe shprehni vetitë e tyre:

a) $y = x^3$, $y = 2x^3$ dhe $y = \frac{1}{2}x^3$ b) $y = -x^3$, $y = -2x^3$ dhe $y = -\frac{1}{2}x^3$.

**3°.** Le të jetë $y = ax^n$, ku $n$ është numër negativ tek.

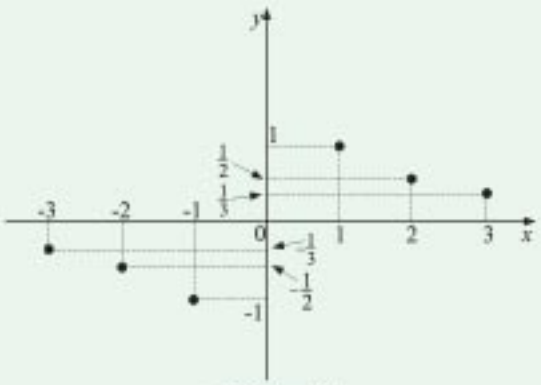
## SHEMBULLI 7

Vizatoni grafikun e funksionit $y = \frac{1}{x}$.

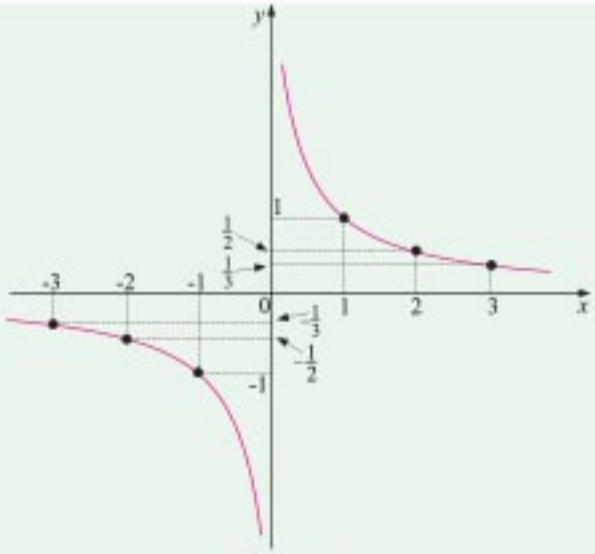
Hartojmë tabelën e vlerave për funksionin:

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \frac{1}{x}$ | $\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{-1} = -1$ | $\frac{1}{1} = 1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ |

Vlerat e fituara i vendosim në sistemin koordinativ (vizatimi 7).



Vizatimi 7



Vizatimi 8

Për të fituar grafikun e funksionit, i lidhim me vijë të vazhdueshme pikat, koordinatat e të cilave janë dhënë në tabelë (vizatim 8).

**Për fushën e përkufizimit** dhe për **bashkësinë e vlerave** të funksionit $y = \frac{1}{x}$, në rastin e përgjithshëm vlen $D = V = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Funksioni **bie sipas fuqisë në të gjithë fushën e përkufizimit**. Në rastin e përgjithshëm, grafiku i tij është një lakore e quajtur **hiperbolë**.

## DETYRA 2

Vizatoni në të njëjtin sistem koordinativ grafikët e funksioneve dhe shprehni vetitë e tyre:

a) $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$ dhe $y = \frac{1}{2x}$ b) $y = -\frac{1}{x}$, $y = -\frac{2}{x}$ dhe $y = -\frac{1}{2x}$

**4⁰.** Le të jetë $y = ax^n$, ku $n$ është numër negativ çift.

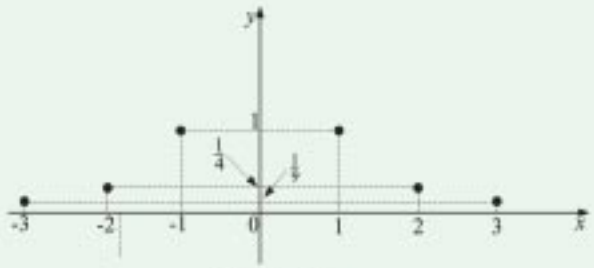
### SHEMBULLI 8

Vizatoni grafikun e funksionit $y = \frac{1}{x^2}$.

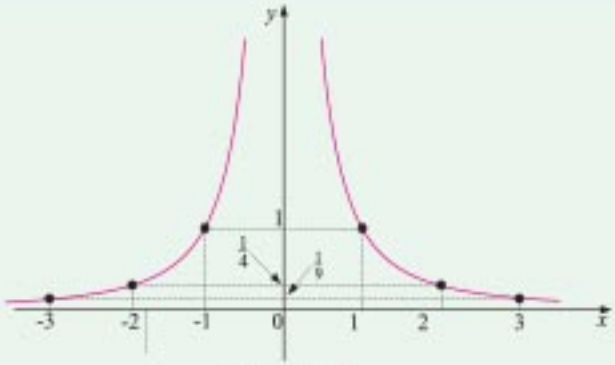
Gjejmë disa pika të grafikut me ndihmën e tabelës:

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \frac{1}{x^2}$ | $\frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$ | $\frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$ | $\frac{1}{(-1)^2} = 1$ | $\frac{1}{1^2} = 1$ | $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ |

Pastaj i vendosim ato në sistemin koordinativ (vizatimi 9).




Vizatimi 9




Vizatimi 10

Duke lidhur pikat e fituara, fitojmë grafikun e funksionit (vizatimi 10).

Në rastin e përgjithshëm, **fusha e përkufizimit** është $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dhe **bashkësia e vlerave** $V = \mathbb{R}^+$. Funksioni **rritet sipas fuqisë** në intervalin $(-\infty, 0)$ dhe **bie sipas fuqisë** në intervalin $(0, +\infty)$..

## DETYRA 3

Në të njëjtin sistem koordinativ vizatoni grafikët e funksioneve dhe shprehni vetitë e tyre:

a) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{2}{x^2}$ dhe $y = \frac{1}{2x^2}$ b) $y = -\frac{1}{x^2}$, $y = -\frac{2}{x^2}$ dhe $y = -\frac{1}{2x^2}$

## SHEMBULLI 9

Në një anije kozmike, astronautët bëjnë një eksperiment me të cilin do të mund të masin forcën e tërheqjes gravitacionale midis dy trupave. Eksperimenti përbëhet nga vendosja e trupave në largesë prej 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm dhe 5 cm. Në vendosjen e parë të trupave në largesë prej 1 centimetri, ata konstatuan se forca tërheqëse gravitacionale është 3600 mikronjuton.

a) Llogaritni forcën gravitacionale për vlerat tjera të largesës dhe ndërto një tabelë vlerash.

b) Nga të dhënat e tabelës, vizatoni grafikun e varësisë së forcës, të shprehur në mikronjuton, nga largesa, e shprehur në centimetra.

a) Forca gravitacionale e tërheqjes midis dy trupave jepet me formulën

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad (1)$$

ku $F$ është forca, $G$ është konstanta gravitacionale, $m_1$ dhe $m_2$ janë masat e trupave, ndërsa $r$ është largesa midis trupave.

Maset e trupave mund t'i konsiderojmë konstante, pasi ato nuk ndryshojnë gjatë eksperimentit. Nga formula (1) fitojmë $G \cdot (m_1 \cdot m_2) = F \cdot r^2$.

Me zëvendësimin për forcën $F_1 = 3600$ mikronjutën ($\mu$N) dhe largesën $r_1 = 1$ centimetra, gjejmë se $G \cdot (m_1 \cdot m_2) = F_1 \cdot r_1^2 = 3600 \cdot 10^{-6}\,\text{N} \cdot (0.01\text{m})^2 = 3600 \cdot 10^{-10}\,\text{Nm}^2$.

Nëse e shënojmë me $F_2$ forcën kur largesa është $r_2 = 2$ centimetra, atëherë nga formula (1) fitojmë

$$F_2 = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r_2^2} = \frac{3600 \cdot 10^{-10}\text{Nm}^2}{4 \cdot 10^{-4}\text{m}^2} = 900 \cdot 10^{-6}\text{N}$$

Në mënyrë të njëjtë, për fuqinë gravitacionale kur largesa është $r_3 = 3$ centimetra, $r_4 = 4$ centimetra dhe $r_5 = 5$ centimetra, fitojmë

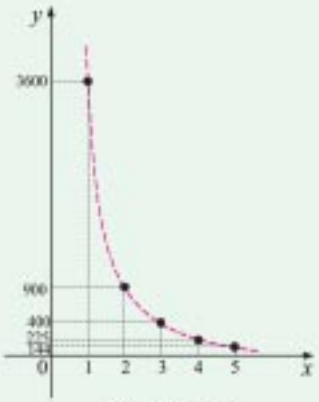
$F_3 = 400 \cdot 10^{-6}$ N, $F_4 = 225 \cdot 10^{-6}$ N dhe $F_5 = 144 \cdot 10^{-6}$ N.

Rezultatet e fituara nga llogaritjet i vendosim në tabelë

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 3600 | 900 | 400 | 225 | 144 |

b) Nga të dhënat e tabelës e vizatojmë grafikun e varësisë së fuqisë të shprehur në mikronjutonë nga largesa e shprehur në centimetra.

Çdo njësi ndarjeje në boshtin $x$ na tregon 1 centimetër, pavarësisht gjatësisë reale të asaj njësie ndarëse. Ngjashëm kemi lirinë e zgjedhjes se sa μN do të na paraqesë një njësi ndarëse në boshtin $y$. Meqë fuqia lëviz ndërmjet 144 μN dhe 3600 μN, do të zgjedhim që një njësi ndarjeje të përfaqësoj 500 μN.




Vizatimi 11

## DETYRA PËR USHTRIME

Në të njëjtin sistem koordinativ vizatoni grafikët e funksioneve:

1. a) $y = x^2, y = 3x^2$ dhe $y = \frac{1}{3}x^2$ b) $y = -x^2, y = -3x^2$ dhe $y = -\frac{1}{3}x^2$
2. a) $y = x^3, y = 3x^3$ dhe $y = \frac{1}{3}x^3$ b) $y = -x^3, y = -3x^3$ dhe $y = -\frac{1}{3}x^3$
3. a) $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{3}{x}$ dhe $y = \frac{1}{3x}$ b) $y = -\frac{1}{x}$, $y = -\frac{3}{x}$ dhe $y = -\frac{1}{3x}$
4. a) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{3}{x^2}$ dhe $y = \frac{1}{3x^2}$ b) $y = -\frac{1}{x^2}$, $y = -\frac{3}{x^2}$ dhe $y = -\frac{1}{3x^2}$
5. Një shkëmb rrëzohet nga një kreshtë detare e lartë 40 metra.
   a) Sa kohë do të jetë e nevojshme që shkëmbi të bjerë në det? Për nxitimin e rënies së lirë përdorni $g = 10$ m/s$^2$.
   b) Në çfarë lartësie mbidetare do të jetë shkëmbi në gjysmën e kohës së nevojshme për rënien e tij?
6. Shejla e vogël luan me kube të vegjël. Çdo kub i vogël ka brinjë 1 centimetër. Shejla i bashkon kubet dhe prej tyre formon kube me brinjë nga 2 centimetra deri në 6 centimetra.
   a) Sa kube të vegjël i nevojiten Shejlës për të ndërtuar kubet më të mëdhenj?
   b) Bëni një tabelë në të cilën do të tregoni varësinë e numrit të kubeve të vegjël të përdorur për të ndërtuar kubet më të mëdhenj.
7. a) a) Sime rrotullon një top të lidhur me një pe me gjatësi 25 centimetra. Nëse çdo sekondë topi bën një rrotullim të plotë, përcaktoni shpejtësinë këndore dhe shpejtësinë e lëvizjes së topit. Nëse topi ka masë 50 gram, gjej forcën centripetale të lëvizjes së topit.
   b) Sime e zvogëlon gjatësinë e perit nga 5 centimetra derisa të bëhet 5 centimetra, duke e mbajtur lëvizjen e topit ashtu që çdo sekondë të bëjë një rrotullim të plotë. Përcaktoni si do të ndryshojë madhësia e forcës centripetale.

8. Distanca midis Tokës dhe Hënës ndryshon midis 363 300 kilometrash dhe 405 500 kilometrash. Njehsoni për sa përqind do të zvogëlohet forca gravitacionale kur Hëna është më së largu nga Toka në krahasim me forcën gravitacionale kur Hëna është më së afërmi Tokës?

**HULUMTIM**

Hulumtoni dhe krahasoni shpejtësinë e rritjes sipas fuqisë, gjegjësisht shpejtësinë e rënies sipas fuqisë së funksionit $y = ax^n$ në krahasim me funksionin $y = x^n$, nëse:

a) $-\infty < a < -1$ b) $1 < a < +\infty$ c) $-1 < a < 0$ ç) $0 < a < 1$.

## 3.5. Funksioni eksponencial

**SHEMBULLI 1**

Bakteret më së shpeshti shumohen përmes ndarjes së thjeshtë, ku nga një bakter fitohen dy. Le të supozojmë se fillojmë me një kulturë me një bakter i cili ndahet çdo orë. Kjo do të thotë se numri i bakstereve dyfishohet në fund të çdo ore.

Në tabelë është treguar numri i baktereve në fund të çdo ore. Shohim që një bakter riprodhohet në mbi një mijë baktere për vetëm dhjetë orë.

| Orë | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Baktere | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 |

Për të përshkruar procese dhe gjendje të natyrës së ngjashme, do të paraqesim funksionin eksponencial. Për këtë qëllim, është e nevojshme të kemi parasysh se për çdo numër real pozitiv $a$ dhe për çdo numër real $x$, fuqia $a^x$ është një numër real pozitiv i përcaktuar në mënyrë të vetme. Për më tepër, për çdo numër real pozitiv $a \neq 1$ dhe për çdo numër pozitiv $A$, ekziston një numër I vetëm real $x$ i tillë që $a^x = A$.

Funksion i formës $y = Ma^x$, ku $a > 0$ dhe $a \neq 1$, $M > 0$ dhe $x$ është **ndryshore e pavarur**, quhet **funksion eksponencial.**

Kufizimi $a \neq 1$ në përkufizim është i nevojshëm për shkak të faktit se kur $a = 1$,
funksioni $y = a^x = 1^x = 1$ është funksion konstant i cili nuk i përket klasës së funksioneve eksponenciale.

**SHEMBULLI 2**

Funksionet $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ dhe $y = 0{,}25^x$, janë shembuj të funksioneve eksponenciale.

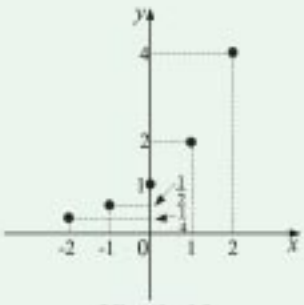
## SHEMBULLI 3

Vizatoni grafikun e funksionit $y = 2^x$.

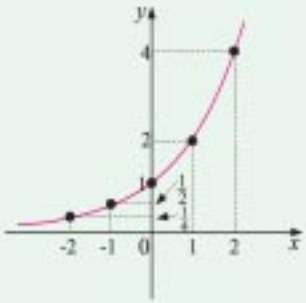
Gjejmë disa pika të grafikut me ndihmën e tabelës

Më pas ato i vizatojmë në sistemin koordinativ. (vizatimi 1).

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = 2^x$ | $2^{-2} = \frac{1}{4}$ | $2^{-1} = \frac{1}{2}$ | $2^0 = 1$ | $2^1 = 2$ | $2^2 = 4$ |




Vizatimi 1




Vizatimi 2

Nëse vizatojmë më shumë pika, fitojmë një ide më të qartë për grafikun e tij (vizatimi 2).

Fuqia $2^x$ është e përkufizuar për çdo vlerë të $x$, prandaj **fusha e përkufizimit** $D$ e funksionit të dhënë eksponencial është bashkësia e numrave realë, pra $D = \mathbb{R}$.

Meqë $2^x > 0$ për çdo numër real $x$, dhe meqë për çdo numër real pozitiv $A$ ekziston një numër real i vetëm $x$ i tillë që $2^x = A$, **bashkësia e vlerave** të funksionit të dhënë eksponencial përbëhet nga të gjithë numrat realë pozitivë, pra $V = \mathbb{R}^+$.

Funksioni **rritet në mënyrë eksponenciale** (funksioni është eksponencial dhe rritet në mënyrë monotone) sepse nga $x_1 < x_2$ rrjedh se $2^{x_1} < 2^{x_2}$.

Grafiku i funksionit kalon nëpër pikën (0, 1).

Kur vlerat e $x$ ulen pafundësisht, vlerat përkatëse të funksionit mbeten pozitive, zvogëlohen dhe kurrë nuk arrijnë vlerën zero. Kjo do të thotë se grafiku i funksionit i afrohet boshtit $x$, por kurrë nuk do ta presë apo prekë atë. Atëherë themi se boshti $x$ është **asimptotë** e funksionit $y = 2^x$.
Çfarë saktësisht do të thotë rritje eksponenciale?

**Rritja eksponenciale** nënkupton, rritje me një normë shumëzuese konstante në intervale kohore të barabarta, të sasisë fillestare në lidhje me kohën.

Proceset në të cilat kemi rritje eksponenciale në lidhje me kohën më së shpeshti modelohen me funksione eksponenciale të formës $y = M a^x$, $a > 1$ dhe $a \neq 1$, $M > 0$.
Nëse funksioni shqyrtohet në kushte të caktuara, fusha e përkufizimit dhe bashkësia e vlerave mund të jenë nënbashkësi të vërteta të bashkësisë së numrave realë $\mathbb{R}$.

## SHEMBULLI 4

Për të marrë një paraqitje më të qartë të rritjes eksponenciale, do t'i krahasojmë vlerat e funksionit eksponencial $y = 2^x$, me vlerat e funksionit fuqi $y = x^2$ dhe funksionit linear $y = 2x$.

| $x$ | $y=2^x$ | $y=x^3$ | $y=2x$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 8 | 9 | 6 |
| 4 | 16 | 16 | 8 |
| 5 | 32 | 25 | 10 |
| 6 | 64 | 36 | 12 |

Nga tabela mund të përfundojmë se, rritja eksponenciale është më e shpejtë se rritja e fuqisë, dhe rritja e fuqisë është më e shpejtë se rritja lineare.

## SHEMBULLI 5

Në një laborator me kushte ideale për jetë ka dy lloje bakteresh, Esheria Koli dhe Klostridi Perfringes. Periudha riprodhuese e Esheria Kolit është 20 minuta, e Klostridi Perfringes është 10 minuta. Në fillim të eksperimentit kishte afërsisht 3 baktere nga secili lloj dhe supozohet se asnjë bakter nuk do të vdesë.

a) Sa baktere nga secili lloj do të ketë pas 1 ore?

b) Shkruani funksionin për numrin e baktereve në varësi të kohës për bakterin Esheria Koli.

c) Shkruani funksionin për numrin e baktereve në varësi të kohës për bakterin Klostridi Perfringes.

ç) Vizatoni të dy funksionet në të njëjtin sistem koordinativ, dhe më pas tregoni cili funksion ka rritje eksponenciale më të shpejtë dhe shpjegoni pse.

a) Në fillim ka nga 3 baktere prej secilit lloj. Eksperimenti zgjat 1 orë = 60 minuta.
Bakteri Esheria Koli ndahet çdo 20 minuta. Për një periudhë prej 60 minutash ndahet $60 : 20 = 3$ herë. Kjo do të thotë se numri i baktereve dyfishohet 3 herë.
Numri i baktereve pas 1 ore do të jetë $3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = 24$.

Bakteri Klostridi Perfringes ndahet çdo 10 minuta. Për një periudhë prej 60 minutash ndahet $60 : 10 = 6$ herë. Kjo do të thotë se numri i baktereve dyfishohet 6 herë.
Numri i baktereve pas 1 orë do të jetë $3 \cdot 2^6 = 3 \cdot 64 = 192$.

Pas 1 ore do të ketë 24 baktere Esheria Koli dhe 192 baktere Klostridi Perfringes.

b) Funksioni eksponencial për numrin e baktereve në varësi të kohës për bakterin Esheria Koli është $y_1 = 3 \cdot 2^{\frac{x}{20}}$ ku $y_1(x)$ është numri i baktereve pas $x$ minutash.

c) Funksioni eksponencial për numrin e baktereve në varësi të kohës për bakterin Klostridi Perfringes është $y_2 = 3 \cdot 2^{\frac{x}{10}}$ ku $y_2(x)$ është numri i baktereve pas $y$ minutash.

ç) Tabelë e vlerave për numrin e baktereve në varësi të kohës për Esheria Koli:

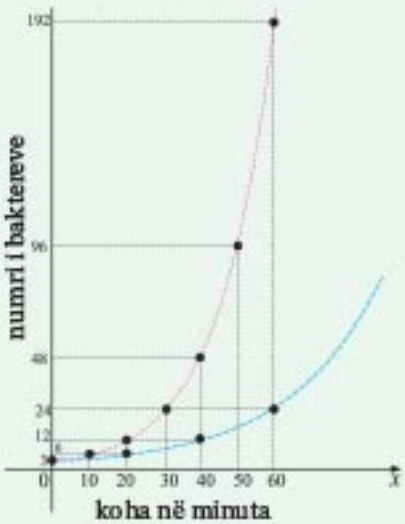
| Koha në minuta | 0 | 20 | 40 | 60 |
|---|---|---|---|---|
| Numri i baktereve | 3 | $3 \cdot 2 = 6$ | $3 \cdot 2^2 = 12$ | $3 \cdot 2^3 = 24$ |

Tabela e vlerave për numrin e baktereve në varësi të kohës për Klostridi Perfringes:

| Koha në minuta | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numri i baktereve | 3 | $3 \cdot 2 = 6$ | $3 \cdot 2^2 = 12$ | $3 \cdot 2^3 = 24$ | $3 \cdot 2^4 = 48$ | $3 \cdot 2^5 = 96$ | $3 \cdot 2^6 = 192$ |

Në vizatimin 3, grafiku me ngjyrë të kaltër e tregon rritjen eksponenciale të funksionit për bakterin Esheria Koli, ndërsa grafiku me ngjyrë të kuqe tregon rritjen eksponenciale të funksionit për bakterin Klostridi Perfringes.

Rritje eksponenciale më të shpejtë ka funksioni për bakterin Klostridi Perfringes, pasi bakteri në fjalë ndahet më shpesh.



Vizatimi 3

## DETYRA 2

Andra bën një eksperiment kimik në të cilin bën "pastë elefanti për dhëmbë". Vëllimi i pastës rritet dyfish për çdo sekondë.

a) Nëse vëllimi fillestar është 1024 milimetra kub, sa do të jetë vëllimi pas 1 sekondi?

b) Sa do të jetë vëllimi pas 6 sekondash?

c) Si do të ndryshojë vëllimi i pastës në varshmëri të kohës të shprehur në sekonda? Shkruani funksionin dhe vizatoni grafikun.

## AKTIVITET

Gjyshja e Elit ka gatuar ëmbëlsirë për ditëlindjen e saj të tetëmbëdhjetë. Elit i pëlqeu shumë ëmbëlsira, prandaj ditën e parë hëngri gjysmën e ëmbëlsirës. Gjyshja e saj i tha se nëse vazhdon të hajë me atë shpejtësi, do ta hajë tërë ëmbëlsirën për disa ditë. Eli mendoi një plan të mençur: ajo gjithmonë do të hajë gjysmën e ëmbëlsirës që i ka ngelur nga dita e mëparshme. Ajo mendon zgjuar se në këtë mënyrë ajo mund të hajë ëmbëlsirë për çdo ditë dhe asnjëherë të mos e mbarojë.

Pas ditës së parë Elit do t'i ngelet $\frac{1}{2}$ e ëmbëlsirës.

Pas ditës së ditë do t'i ngelet $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ e ëmbëlsirës.

Pas ditës së tretë do t'i ngelet $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ e ëmbëlsirës, etj.

a) Çfarë sasie e ëmbëlsirës do t'i ngelet pas ditës së pestë?

b) A do e përfundojë Eli ndonjëherë ëmbëlsirën?

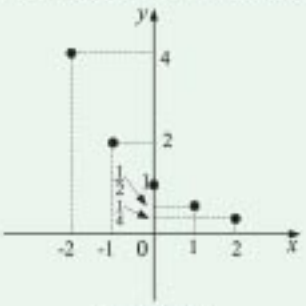
## SHEMBULLI 6

Vizatoni grafikun e funksionit $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

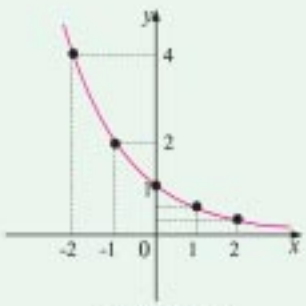
Gjejmë disa pika të grafikut të tij::

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$ |

Pikat e marra i vizatojmë në sistemin koordinativ (vizatimi 4). Duke i lidhur këto pika me një vijë të vazhdueshme, marrim grafikun e funksionit (vizatimi 5).




Vizatimi 4




Vizatimi 5

Fusha e përkufizimit D e funksionit është bashkësia e numrave realë, pra $D = \mathbb{R}$, ndërsa bashkësia e vlerave $V$ e funksionit përbëhet nga të gjithë numrat realë pozitivë, pra $V_f = \mathbb{R}^+$.

Funksioni **bie në mënyrë eksponenciale** (funksioni është eksponencial dhe monoton rënës), sepse nga $x_1 < x_2$ rrjedh se $2^{x_1} > 2^{x_2}$.
Grafiku i funksionit kalon nëpër pikën (0, 1).
Kur vlerat e $x$ rriten pafundësisht, vlerat përkatëse të funksionit mbeten pozitive, zvogëlohen dhe kurrë nuk arrijnë vlerën zero. Kjo do të thotë se grafiku i funksionit i afrohet boshtit $x$, por kurrë nuk do ta presë apo prekë atë. Pra, boshti $x$ është **asimptotë** e funksionit $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

## DETYRA 3

Vizatoni grafikun e funksionit eksponencial $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Çfarë do të thotë saktësisht rënie eksponenciale?

**Rënia eksponenciale** nënkupton, ulje me një normë shumëzuese konstante në intervale kohore të barabarta, të sasisë fillestare në lidhje me kohën.

Proceset në të cilat kemi zbërthim eksponencial në lidhje me kohën më së shpeshti modelohen me një funksion eksponencial të formës

$y = M a^x$, $0 < a < 1$ dhe $a \neq 1$, $M > 0$.

Edhe në këtë rast, nëse funksioni konsiderohet në kushte të caktuara, fusha e përkufizimit dhe bashkësia e vlerave mund të jenë nënbashkësi të vërteta të bashkësisë së numrave realë $\mathbb{R}$.

## SHEMBULLI 7

Substanca radioaktive A ka gjysmëzbërthim prej 20 minutash. Kjo do të thotë se në çdo 20 sekonda ngelet vetëm gjysma e masës së substancës. Substanca radioaktive B ka gjysmëzbërthim prej 30 minutash. Masa fillestare e secilës prej substancave është 16 gramë.

a) Sa gramë prej secilës substancë do të ngelen pas 1 ore?

b) Shkruani funksionin i cili bën modelimin e procesit të zbërthimit të substancës A.

c) Shkruani funksionin i cili bën modelimin e procesit të zbërthimit të substancës B.

ç) Vizatoni grafikët e të dy funksioneve në sistem të njëjtë koordinativ, e më pas tregoni cili funksion ka rënie më të shpejtë eksponenciale dhe sqaroni pse.

a) Në fillim ka nga 16 gramë nga secili lloj i substancës. Procesi zgjatë 1 orë = 60 minuta. Masa e substancës A përgjysmohet në 20 minuta. Për periudhën prej 1 ore përgjysmohet 60:20=3 herë.

Masa e substancës A pas 1 ore do të jetë $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2$ gramë. Masa e substancës B përgjysmohet në 30 minuta. Për periudhën prej 1 ore përgjysmohet 60:30=2 herë.

Masa e substancës B pas 1 ore do të jetë $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4$ gramë. Pas 1 ore do të kemi 2 gramë nga substanca A dhe 4 gramë nga substanca B.

b) Funksioni eksponencial që e modelon procesin e zbërthimit të substancës A është $y_1 = 16\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{20}}$ ku $y_1(x)$ është sasia e substancës në gramë pas $x$ minutash.

c) Funksioni eksponencial që e modelon procesin e zbërthimit të substancës B është $y_2 = 16\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{30}}$ ku $y_2(x)$ është sasia e substancës në gramë pas $x$ minutash.

ç) Tabela e vlerave për sasinë e substancës A në varësi të kohës:

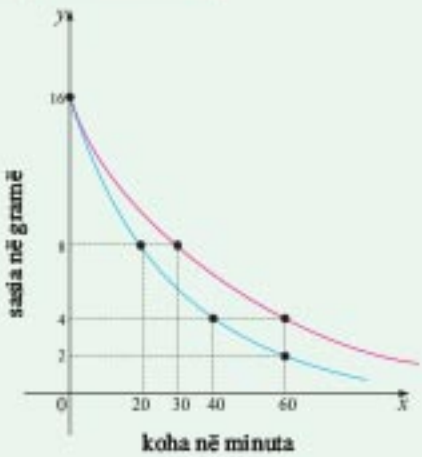
| Koha në minuta | 0 | 20 | 40 | 60 |
|---|---|---|---|---|
| Sasia në gramë | 16 | $16\left(\frac{1}{2}\right) = 8$ | $16\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4$ | $16\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2$ |

Tabela e vlerave për sasinë e substancës B në varësi të kohës:

| Koha në minuta | 0 | 30 | 60 |
|---|---|---|---|
| Sasia në gramë | 16 | $16\left(\frac{1}{2}\right) = 8$ | $16\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4$ |

Në vizatimin 6, grafiku me ngjyrë të kaltër e tregon rënien eksponenciale të masës së substancës A, ndërsa grafiku me ngjyrë të kuqe rënien eksponenciale të masës së substancës B.

Rënie eksponenciale më të shpejtë kemi tek substanca A, pasi ajo ka gjysmëzbërthim më të shkurtër.



Vizatimi 6

## DETYRA 4

Një antibiotik futet në organizëm në një dozë prej 200 miligramësh. Trupi e shpërbën gjysmën e barit çdo 6 orë. Sa miligramë antibiotik do të mbeten në organizëm pas:

a) 6 orësh b) 12 orësh c) 18 orësh?

Shkruani funksionin që modelon procesin e shkatërrimit të antibiotikut në lidhje me kohën dhe vizatoni grafikun e tij.

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Shprehni vetitë e funksionit:

   a) $y = 6^x$ b) $y = \left(\frac{1}{8}\right)^x$ c) $y = 12 \cdot 4^x$ ç) $y = 9\left(\frac{1}{9}\right)^x$

2. Vizatoni grafikun e funksionit, dhe më pas përcaktoni nëse funksioni rritet apo bie në mënyrë eksponenciale:

   a) $y = 4^x$ b) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ c) $y = 2 \cdot 5^x$ ç) $y = 3\left(\frac{1}{4}\right)^x$

3. Në një proces mitoze, nga një qelizë fitohen dy kopje identike. Një bakter shumëzohet me anë të mitozës çdo 5 sekonda.

   a) Nëse mitoza fillon me një qelizë, atëherë sa qeliza do të ketë pas 5 sekondash?

   b) Sa qeliza do të ketë pas 15 sekondash, dhe sa pas një minute?

   c) Shkruani funksionin që tregon numrin e baktereve pas $5x$ sekondash.

   d) Vizatoni grafikun e funksionit për 30 sekondat e para.

4. Struktura e ARN-së formohet me kombinim të 4 bazave themelore të ARN-së: Adenina, Citozina, Guanina dhe Uracili.

   a) Në sa mënyra mund të formohet një bazë themelore e ARN-së?

   b) Në sa mënyra mund të formohet një kombinim prej dy bazash themelore të ARN-së?

   c) Shkruani funksionin që llogarit numrin e mënyrave në të cilat mund të formohen $n$ baza ARN?

5. Një eksperiment laboratorik përbëhet nga lënia e një kolonie prej $10^6$ bakteresh stafilokoke të shumohen për një periudhë prej 2 orësh. Pas 2 orësh aplikohet penicilinë dhe fillon shkatërrimi i baktereve. Numri i baktereve rritet 4 herë çdo 40 minuta, dhe penicilina shkatërron gjysmën e baktereve çdo 20 minuta.

   a) Vizatoni një grafik në të cilin tregoni numrin e baktereve të shprehur në $10^6$ baktere në varësi të kohës, nëse eksperimenti zgjat 6 orë.

   b) Sa do të jetë numri i baktereve në fund të eksperimentit?

6. Në një vend me inflacion të lartë, banka jep interes në një depozitë kursimi prej 100% në vit dhe lejon tërheqjen e depozitës pas një numri të plotë vitesh. Hartoni një tabelë vlerash për funksionin që jep shumën e depozitës pas 1, 2, 3, 4, 5 vjetësh, dhe më pas vizatoni grafikun e tij.

7. Në vitin 2020, popullsia e peshqve kishte 16 777 216 individë. Popullsia e kafshëve jeton në një mjedis ekologjik të ndotur dhe numri i saj zvogëlohet me një normë prej 75% çdo vit. Sa do të jetë popullsia e kafshëve në vitin 2030?

8. Nenad ka një infeksion bakterial. Kur shkoi te mjeku, popullsia e baktereve ishte 2 milionë. Mjeku i shkroi një antibiotik që zvogëlon popullsinë e baktereve në $\frac{1}{4}$ e madhësisë së tyre çdo ditë.
   a) Gjeni madhësinë e popullsisë së baktereve pas 10 ditësh nga marrja e parë e barit.
   b) Gjeni madhësinë e popullsisë së baktereve pas 14 ditësh nga marrja e parë e barit.
   c) Shkruani funksionin që modelon madhësinë e popullsisë.
   ç) Vizatoni grafikun e madhësisë së popullsisë së shprehur në $10^6$ baktere në varësi të kohës në ditë.

**HULUMTIM**

a) Në të njëjtin sistem koordinativ vizatoni funksionet eksponenciale $y = 3^x$ dhe $y = 4^x$. Përcaktoni marrëdhënien midis shpejtësisë së rritjes eksponenciale të të dy funksioneve në varësi të bazave të tyre të fuqisë.

b) Në të njëjtin sistem koordinativ vizatoni funksionet eksponenciale $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ dhe $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. Përcaktoni marrëdhënien midis shpejtësisë së rënies së të dy funksioneve në varësi të bazave të tyre të fuqisë.

c) Hulumtoni dhe zbuloni nëse në rastin e përgjithshëm ekziston një lidhje midis shpejtësisë së rritjes eksponenciale, si dhe shpejtësisë së rënies eksponencial te një funksion eksponencial i formës $y = a^x$ në varësi të bazës së fuqisë $a$.

**HULUMTIM**

a) Shkruani parashtesat dhe vlerat e shumëzuesve dekadë dhe decimalë midis mili- dhe kilo- nga më i vogli te më i madhi. Cila është marrëdhënia midis tyre? Përcaktoni një funksion që do të përcaktojë vlerat e shumëzuesve.

b) Shkruani shumëzuesit midis kilo- dhe tera- nga më i vogli te më i madhi. Cila është marrëdhënia midis tyre? Përcaktoni një funksion që do të përcaktojë vlerat e shumëzuesve.

c) Shkruani shumëzuesit midis piko- dhe mikro- nga më i vogli te më i madhi. Cila është marrëdhënia midis tyre? Përcaktoni një funksion që do të përcaktojë vlerat e shumëzuesve.

# 3.6. Llojet e barazimeve dhe barazimet ekuivalente me një të panjohur

## Llojet e barazimeve

**AKTIVITET**

Lexoni shënimet algjebrike që korrespondojnë me pohimet:
Adnani ka $y$ libra.
Bojani ka 5 libra më shumë se Adnani. Bojani ka $(y + 5)$ libra.

Danieli ka një libër më pak se Adnani. Danieli ka $(y-1)$ libra.
Jovani ka dyfish më shumë libra se Adnani. Jovani ka $2y$ libra.

Shkruani shprehjen algjebrike për numrin e librave të Onurit, nëse ai ka trefish më shumë libra se Bojani.

Nëse i lidhim shprehjet algjebrike, për shembull shprehjet $x+5$ dhe $2x$ me shenjën e barazimit, përcaktojmë barazimin (ekuacionin) $x+5=2x$ me të panjohurën $x$, fusha e përkufizimit të të cilit mund të jetë bashkësia e numrave realë.



Dy shprehje algjebrike racionale nga të cilat të paktën njëra ka një ose më shumë ndryshore, të lidhura me shenjën „=“ (e barabartë), përcaktojnë një **barazim (ekuacion).**
Ndryshoret në barazim i quajmë **të panjohura**, dhe i shënojmë me $x, y, z, \ldots$

Bashkësia e vlerave të lejuara të të panjohurave quhet **fusha e përkufizimit** e barazimit dhe shënohet me $D$. Me marrëveshje, fusha e pëkrufizimit do të merret bashkësia maksimale e vlerave për të cilat barazimi ka kuptim, nëse nuk thuhet ndryshe.

### SHEMBULLI 1

a) Barazimi $5x+3=2$ është një barazim me të panjohurën $x$ dhe ka fushë përkufizimi $D=\mathbb{R}$.
b) Barazimi $\frac{1}{y-2}=3$ është një barazim me të panjohurën $y$ dhe ka fushë përkufizimi $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Sipas numrit të të panjohurave, barazimi mund të jetë: **barazim me një të panjohur, barazim me dy të panjohura**, etj.
Sipas shkallës më të lartë me të cilën ngrihen të panjohurat, barazimi mund të jetë **barazim i shkallës së parë ose linear, barazim i shkallës së dytë ose katror (kuadratik)** etj.

### SHEMBULLI 2

a) Barazimi $2x+4=7$ është barazim linear me një të panjohur.
b) Barazimi $x+y=2x$ është barazim linear me dy të panjohura.
c) Barazimi $x^2=x+y$ është barazim kuadratik me dy të panjohura.

### SHEMBULLI 3

Barazimi $7-3x=1$, për $x=2$ kthehet në barazi numerike të saktë $7-3\cdot 2=1$
për $x=3$ kthehet në barazi numerike të pasaktë $7-3\cdot 3=1$



**Zgjidhje** ose **rrënjë e një barazimi** me një të panjohur është çdo vlerë e të panjohurës nga fusha e përkufizimit për të cilën barazimi kthehet në barazi numerike të saktë.
Të gjitha zgjidhjet e një barazimi përbëjnë **bashkësinë e zgjidhjeve të barazimit**, dhe do ta shënojmë me $R$.

### SHEMBULLI 4

a) Barazimi $2 + x = 5$ ka zgjidhje të vetme për $x = 3$, pra $R = \{3\}$.

b) Për barazimin $6 + 3x = 3(2 + x)$ bashkësia e zgjidhjeve është $R = D = \mathbb{R}$. Në këtë rast themi se barazimi është **identitet.**

c) Për barazimin $7 + 3x = 2 + 3x$ bashkësia e zgjidhjeve është $R = \varnothing$. Në këtë rast themi se barazimi është **i pamundur.**

## Barazime ekuivalente me një të panjohur

### AKTIVITET

Çfarë mund të përfundoni për fushën e përkufizimit dhe bashkësinë e zgjidhjeve të barazimeve:
$2 + x = 5$ dhe $x - 3 = 0$.



Dy barazime që kanë të njëjtën fushë përkufizimi dhe të njëjtën bashkësi zgjidhjesh quhen **barazime ekuivalente (të barasvlershme).**

Për të zgjidhur një barazim të dhënë, e zëvendësojmë atë me një tjetër më të thjeshtë, por ekuivalent me të. Më pas, atë barazim e zëvendësojmë me një të tretë më të thjeshtë ekuivalent me të, e kështu me radhë, deri sa të arrijmë në një barazim zgjidhjet e të cilit janë të dukshme.
Procedura e zëvendësimit të një barazimi me një barazim ekuivalent me të quhet **transformim ekuivalent.**

### AKTIVITET

Ndiqni zëvendësimin e barazimit të dhënë me një barazim më të thjeshtë por ekuivalent me të, zgjidhja e të cilit është e dukshme:

$x - 7 = 2$ Në të dy anët e barazimit e shtojmë numrin 7.

$x - 7 + 7 = 2 + 7$ Barazimi i fituar është ekuivalent me barazimin e dhënë.

$x = 9$ Arritëm te zgjidhja e barazimit $x_0 = 9$.

A do të arrini në të njëjtën zgjidhje nëse numrin $-7$ e kaloni në anën tjetër, me shenjë të kundërt?



Nëse nëe të dy anët e barazimit shtojmë një shprehje të njëjtë, e cila është e përcaktuar për të gjitha vlerat e lejuara të të panjohurës, do të fitojmë një barazim ekuivalent me atë të dhënë.

Si pasojë kemi që:

- Nëse të dy anët e barazimit kanë terma të barabartë me shenja të njëjta, ata mund të anulohen (hiqen).
- Çdo term i barazimit mund të bartet nga njëra anë e barazimit në anën tjetër, me çrast ndryshon shenja e këtij termi.

## SHEMBULLI 5

Ndiqni transformimet ekuivalente të barazimit:

a) $7x - 3x + 2 = 9 - 3x$ Anulojmë termet e barabartë: $-3x$ dhe $-3x$.

$7x + 2 = 9$ Barazimi i fituar është ekuivalent me atë të dhënë.

b) $5x - 4 = 2x + 5$ Termin $2x$ bartim në anën e majtë të barazimit, ndryshon shenja e tij

$5x - 2x - 4 = 5$ Termin $-4$ e bartim në anën e djathtë të barazimit, ndryshon shenja e tij.

$5x - 2x = 5 + 4$ Barazimi i fituar është ekuivalent me barazimin e dhënë



Nëse të dy anët e barazimit i shumëzojmë me një shprehje të njëjtë, e cila është e përcaktuar dhe e ndryshme nga zero për të gjitha vlerat e lejuara të të panjohurës, do të marrim një barazim ekuivalent me atë të dhënë. Si pasojë kemi që:

- Shenjat e të gjithë termave të barazimit ndryshohen, nëse të dy anët e barazimit shumëzohen me $-1$.
- Nëse të dy anët e barazimit kanë një faktor të përbashkët, i cili nuk e përmban të panjohurën dhe është i ndryshëm nga zero, atëherë me të mund të pjesëtohen të dy anët e barazimit. Në atë rast themi se **barazimin e thjeshtojmë**.

## SHEMBULLI 6

Ndiqni transformimet ekuivalente të barazimit:

a) $-3x + 7 = 3$ Të dy anët e barazimit i shumëzojmë me numrin $-1$

$3x - 7 = -3$ Barazimi i fituar është ekuivalent me atë të dhënë.

b) $2x - 4 = 6$ E thjeshtojmë barazimin.

$x + 2 = 4$ Barazimi i fituar është ekuivalent me atë të dhënë.

Të theksojmë se me zbatimin e vetisë së mësipërme, një barazim me koeficientë thyesorë mund të transformohet në një barazim me koeficientë të plotë, nëse të dy anët e barazimit shumëzohen me një shumëfish të përbashkët të emëruesve. Ky transformim quhet **çlirim i barazimit nga emëruesit**.

## SHEMBULLI 7

Çironi nga emëruesit barazimin $\frac{x-1}{2} - 5 = \frac{x+2}{3}$.

$\frac{x-1}{2} - 5 = \frac{x+2}{3}$ Çdo term shumëzohet me SHVP të emëruesve: SHVP(2, 3) = 6

$6 \cdot \frac{x-1}{2} - 6 \cdot 5 = 6 \cdot \frac{x+2}{3}$ për t'u çliruar nga emëruesit.

$3(x-1) - 30 = 2(x+2)$ Barazimi i fituar është ekuivalent me barazimin e dhënë.

### DETYRA 1

Çlironi nga emëruesit barazimin $\frac{5(x+2)}{6} - \frac{2(x-1)}{3} = \frac{3(x-2)}{2}$.

### DETYRA 2

Automobili lëviz me shpejtësi konstante. Nëse fillojmë matjen e kohës në mesditë, pas $x$ orësh, automobili do të ketë përshkuar $60x + 20$ kilometra. Në cilën orë pasdite automobili do të ketë përshkuar 200 kilometra?

### DETYRA PËR USHTRIME

1. A janë ekuivalente barazimet e mëposhtme:
   a) $7x + 3x = 12 + 7x$ dhe $3x = 12$ b) $3 = \frac{15}{x}$ dhe $3x = 15$ c) $x + \frac{1}{x} = 5 + \frac{1}{x}$ dhe $x = 5$?
2. Për cilën vlerë të $x$ vlera numerike e shprehjes $5x - 2$ është e barabartë me:
   a) 8 b) 7 c) 0 ç) 6?
3. Për cilën vlerë të $x$ shprehjet $3x - 2$ dhe $4x + 1$ kanë vlera numerike të barabarta?
4. Duke përdorur disa transformime ekuivalente, zgjidheni barazimin
   a) $14 - 3x = 8 - 6x$ b) $2(3x - 1) = 22$ c) $\frac{6-5x}{3} + \frac{2x-1}{4} = \frac{x-4}{6}$
5. Cilët nga barazimet e mëposhtme janë identitete:
   a) $5x - 2x = 3x$ b) $\frac{4x+4}{16} = \frac{x+1}{2}$ c) $\frac{x-1}{15} + \frac{2x}{5} = \frac{3x-4}{3}$
6. Cilët nga barazimet e mëposhtme janë barazime të pamundura:
   a) $7x - x = 6x + 3$ b) $2(x - 3) + 2 = x + 6$ c) $\frac{2x-1}{2} = \frac{3x+2}{3}$
7. Bateria e telefonit mbushet me shpejtësi konstante. Pas x minutash telefoni është i mbushur $2x$+10%. Sa minuta është mbushur bateria, nëse ajo është e mbushur 70%?
8. Tretësira kimike ftohet në mënyrë lineare. Temperatura e saj pas $x$ minutash është $100 - 4x$ gradë Celsius. Sa minuta është ftohur tretësira e cila ka arritur temperaturën 60°C?

# 3.7. Zgjidhja e barazimeve lineare dhe e barazimeve që reduktohen në barazime lineare me një të panjohur

## Zgjidhja e barazimeve lineare me një të panjohur

### AKTIVITET

Duke përdorur transformime ekuivalente të barazimit $7x + 4 = 8 + 5x$, bartni të gjithë termet në anën e majtë dhe reduktoni. Përshkruani formën e barazimit të fituar.

Me transformime elementare të përshtatshme, çdo barazim linear me një të panjohur reduktohet në një barazim linear të formës (trajtës)

$$ax + b = 0 \qquad (1)$$

ku $a$ dhe $b$ janë numra ose shprehje në të cilat nuk shfaqet e panjohura $x$. Barazimi (1) quhet **forma (trajta) e përgjithshme e barazimit linear me një të panjohur**, $a$ quhet **koeficienti** para të panjohurës, dhe $b$ quhet **termi i lirë**.

## AKTIVITET

Gjeni bashkësinë e zgjidhjeve të barazimit linear: a) $2x + 4 = 0$ b) $0 \cdot x = 2$ c) $0 \cdot x = 0$.

Le të shqyrtojmë bashkësinë e zgjidhjeve të barazimit linear (1):

**1°.** $ax + b = 0, a \neq 0$ — E bartim b në anën e djathtë të barazimit, dhe më pas pjesëtojmë me $a$.

$x = -\frac{b}{a}$ — Barazimi i fituar është ekuivalent me atë të dhënë.

Ai ka **zgjidhje të vetme (unike)** $x_0 = -\frac{b}{a}$.

**2°.** $ax + b = 0, a = 0$ dhe $b \neq 0$ — E bartim $b$ në anën e djathtë të barazimit, dhe më pas zëvendësojmë $a = 0$.

$0x = -b$ — Barazimi i fituar është ekuivalent me barazimin e dhënë.

Ai është **barazim i pamundur**, sepse nuk ekziston numër real i cili i shumëzuar me zero jep një numër të ndryshëm nga zero.

**3°.** $ax + b = 0, a = 0$ dhe $b = 0$ — Zëvendësojmë $a = 0$ dhe $b = 0$.

$0 \cdot x = 0$ — Barazimi i fituar është ekuivalent me barazimin e dhënë.

Ai ka **pafund shumë zgjidhje**, sepse çdo numër real i shumëzuar me zero jep zero.

## SHEMBULLI 1

Zgjidhni barazimin $\frac{5x-2}{3} - \frac{x-8}{4} = \frac{x+14}{2} - 2$.

$\frac{5x-2}{3} - \frac{x-8}{4} = \frac{x+14}{2} - 2$ — Të dy anët e barazimit i shumëzojmë me SHVP(3, 4, 2) = 12 për t'u çliruar nga

$12 \cdot \frac{5x-2}{3} - 12 \cdot \frac{x-8}{4} = 12 \cdot \frac{x+14}{2} - 12 \cdot 2$ emëruesit.

$4(5x-2) - 3(x-8) = 6(x+14) - 12 \cdot 2$ — Çlirohemi nga kllapat.

$20x - 8 - 3x + 24 = 6x + 84 - 24$ — I grupojmë të gjithë termet që e përmbajnë të panjohurën në anën e majtë, ndërsa të gjithë termet e lirë në anën e djathtë.

$20x - 3x - 6x = 84 - 24 + 8 - 24$

$11x = 44$ — E thjeshtojmë barazimin me numrin 11.

$x = 4$ — Zgjidhja e barazimit është $x_0 = 4$.

Nëse barazimi përmban të panjohurën në emërues, atëherë pas çlirimit nga emëruesit mund të fitohet një barazim që përmban të gjitha zgjidhjet e barazimit të dhënë, por gjatë rrugës mund të fitojë edhe zgjidhje të tjera, për të cilat SHVP e emëruesve anulohet.

Nëse ka zgjidhje të tilla, ato duhet të përjashtohen nga bashkësia e zgjidhjeve.

### SHEMBULLI 2

Zgjidhni barazimin $\frac{15}{x} - \frac{7-x}{x-2} = 1$.

| | |
|---|---|
| $\frac{15}{x} - \frac{7-x}{x-2} = 1$ | Të dy anët e barazimit i shumëzojmë me prodhimin $x(x-2), x \neq 0$ dhe $x \neq 2$ për t'u çliruar nga |
| $\frac{15x(x-2)}{x} - \frac{(7-x)\cdot x\cdot(x-2)}{x-2} = x(x-2)$ | emëruesit. |
| $15(x-2) - x(7-x) = x(x-2)$ | Çlirohemi nga kllapat. |
| $15x - 30 - 7x + x^2 = x^2 - 2x$ | I grupojmë termet me dhe pa të panjohurën dhe i reduktojmë termet e ngjashëm. |
| $10x = 30$ | I pjesëtojmë të dy anët me numrin 10. |
| $x = 3$ | Zgjidhja e barazimit është $x_0 = 3$. |

### SHEMBULLI 3

Zgjidhni barazimin $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{2x}{x^2-4}$.

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{2x}{x^2-4}$ | Të dy anët e barazimit i shumëzojmë me shprehjen $x^2-4 = (x-2)(x+2), x \neq -2$ dhe $x \neq 2$. |
| $(x-2) - (x+2) = 2x$ | I grupojmë termet me dhe pa të panjohurën dhe i reduktojmë termet e ngjashëm. |
| $2x = -4$ | $x_0 = -2$ nuk është zgjidhje e barazimit. |
| $x = -2$ | Bashkësia e zgjidhjeve të barazimit është $R = \emptyset$, pra barazimi është i pamundur. |

### SHEMBULLI 4

Zgjidhni barazimin $\frac{2x-7}{x-5} = 1 - \frac{2-x}{x-5}$.

| | |
|---|---|
| $\frac{2x-7}{x-5} = 1 - \frac{2-x}{x-5}$ | Të dy anët e barazimit i shumëzojmë me shprehjen $x-5, x \neq 5$. |
| $2x - 7 = x - 5 - (2-x)$ | I grupojmë termet me dhe pa të panjohurën dhe i reduktojmë termet e ngjashëm. |
| $0 \cdot x = 0$ | Zgjidhje të barazimit janë të gjithë numrat realë $x$, me kusht që $x \neq 5$. Shkruajmë $R = \mathbb{R} \setminus \{5\}$. |

## DETYRA 1

Radhitni barazimet në renditjen e duhur për të fituar zgjidhjen e saktë të barazimit fillestar. Disa nga barazimet nuk janë të sakta. Zbuloni gabimet që janë bërë gjatë zgjidhjes për të fituar barazimet e pasakta.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $2x = 3$<br>$x = 1{,}5$ | $2x = -15$<br>$x = 6$ | $3(5x - 3) = 13x - 6$<br>$15x - 9 = 13x - 6$ | $15x - 6 = 13x - 6$<br>$2x - 9 = -6$ |

**DETYRA 2**

Gjatë elektrolizës së ujit me intensitet konstant të rrymës, sasia e hidrogjenit të çliruar pas $t$ orësh është $\frac{t}{2}$ litra. Për sa orë do të mbushet një balonë me vëllim 1.5 litra?

## Barazimi linear me parametër

Parametri në një barazim linear me një të panjohur nënkupton "një konstante vlera e së cilës mund të ndryshojë" brenda një bashkësie të caktuar. Ndryshimi i parametrit në bashkësinë e caktuar ndikon drejtpërdrejt në bashkësinë e zgjidhjeve të barazimit.

**SHEMBULLI 5**

Zgjidhni barazimin $ax - 2 = x$, ku $a$ është një parametër real.

$ax - 2 = x$ — I grupojmë termet me dhe pa të panjohurën dhe i reduktojmë termet e ngjashëm.

$ax - x = 2$ — Nxjerrim shumëzuesin e përbashkët para kllapës.

$(a - 1)x = 2$ — Fillojmë diskutimin sipas vlerave të parametrit $a$:

- Nëse $a - 1 = 0$, pra $a = 1$, atëherë barazimi merr formën $0 \cdot x = 2$. Në këtë rast barazimi është i pamundur dhe bashkësia e zgjidhjeve është $R = \emptyset$.
- Nëse $a - 1 \neq 0$, pra $a \neq 1$, atëherë barazimi ka zgjidhje të vetme $x_0 = \frac{2}{a-1}$.

Një barazim linear me një të panjohur mund të përmbajë edhe më shumë parametra. Në atë rast, diskutimi për bashkësinë e zgjidhjeve të barazimit kryhet për secilin parametër veç e veç, si dhe për lidhjet e mundshme midis tyre.

**SHEMBULLI 6**

Zgjidhe barazimin $\frac{x}{a+b} + \frac{x}{b} = \frac{b}{a+b}$, ku $a$ dhe $b$ janë parametra realë.

Para se të fillojmë zgjidhjen, duhet të përcaktojmë vlerat e parametrave për të cilat barazimi nuk ka kuptim.

Në këtë rast nuk lejohet pjesëtimi me 0, prandaj duhet $b \neq 0$ dhe $a \neq -b$.

Themi se barazimin e zgjidhim me kusht $b \neq 0$ dhe $a \neq -b$.

$\frac{x}{a+b} + \frac{x}{b} = \frac{b}{a+b}$ — I shumëzojmë të dy anët e barazimit me shprehjen $b(a + b)$

$\frac{b(a+b)x}{a+b} + \frac{b(a+b)x}{b} = \frac{b(a+b)b}{a+b}$ — për t'u çliruar nga emëruesit

$bx + (a + b)x = b^2$ — Nxjerrim faktorin e përbashkët para kllapës.

$(a+2b)x=b^2$ Fillojmë diskutimin sipas vlerave të parametrave $a$ dhe $b$.

- Nëse $a+2b=0$, atëherë $a=-2b$, barazimi merr formën $0\cdot x=b^2$.
  Në këtë rast barazimin është i pamundur dhe bashkësia e zgjidhjeve është $R=\emptyset$.
- Nëse $a+2b\neq 0$, atëherë $a\neq -2b$, atëherë barazimi ka zgjidhje unike $x_0=\frac{b^2}{a-2b}$.

## DETYRA 3

Për cilën vlerë të parametrit $a$, barazimi:

a) $5x+a=2$ ka zgjidhje $x_0=0$ b) $5a-2x=3$ ka zgjidhje $x_0=1$?

## DETYRA PËR USHTRIME

**1.** Zgjidhni barazimet:

a) $(x-1)(x-2)-(x-3)(x-4)=6$ b) $3x^2-(3x+2)(x-1)=8$ c) $t(t-3)+4=t^2-2(t+4)$

**2.** Zgjidhni barazimet:

a) $x-\frac{2}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{9-2x}{3}$ b) $\frac{y+17}{5}+2=\frac{3y-7}{4}$ c) $\frac{14x-1}{15}+\frac{2x-3}{5}=\frac{3x-4}{3}$

**3.** Zgjidhni barazimet:

a) $1+\frac{2x-\frac{10-7x}{3}}{2}=\frac{x}{2}+\frac{x-\frac{1+x}{3}}{3}$ b) $x+\frac{1+\frac{3x}{2}}{4}+\frac{2+\frac{x}{4}}{3}=2$

**4.** Zgjidhni barazimet:

a) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x}=3$ b) $\frac{5}{x}-\frac{2}{x+1}=\frac{3}{x-1}$ c) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=2-\frac{x}{x^2-1}$

**5.** Zgjidhni barazimet:

a) $\frac{2}{2x-3}+\frac{2x-3}{x}=2$ b) $\frac{y+1}{y-3}-\frac{y-1}{y+3}=\frac{8y}{y^2-9}$ c) $\frac{2}{x}+\frac{x+2}{x(x-2)}=\frac{4}{x(x-2)}$

**6.** Zgjidhni barazimin me parametër:

a) $(x+k)^2=x(x+k)+5k^2$ b) $n(1+y)=m(1-y)$ c) $\frac{x-a}{x-1}+\frac{x-1}{x-a}=2$

**7.** Për cilën vlerë të parametrit $a$, barazimi

a) $ax-6=a+2(x-4)$ ka zgjidhje unike b) $x-2ax=2a+5$ është i pamundur?

**8.** Sasia e mishit të prodhuar në laborator pas $t$ sekondash është $\frac{10+6t}{7}$ gram. Sa kohë nevojitet për të krijuar një qofte të vogël prej 100 gram mish laboratori?

**9.** Zgjatja e një suste mekanike që bëhet duke vendosur $x$ pesha të vogla është $\frac{62+4x}{3}$ milimetra. Përcaktoni numrin e peshave të nevojshme për ta zgjeruar sustën deri në 110 milimetra.

# 3.8. Formulimi dhe zgjidhja e barazimeve lineare me një të panjohur

## AKTIVITET

Një fabrikë mori një porosi prej 86 bulonave. Ato duhet të paketohen në tri kuti ashtu që:

Në kutinë e parë të ketë $x$ bulona.

Në kutinë e dytë të ketë $x + 6$ bulona.

Në kutinë e tretë të ketë $2x$ bulona.

Formuloni një barazim sipas të cilit mund të gjeni numrin e bulonave në secilën kuti.

Zgjidhja e shumë problemeve nga shkencat natyrore dhe shoqërore, si dhe problemeve nga jeta jonë e përditshme, sillet në formulimin dhe zgjidhjen e barazimeve lineare me një të panjohur. Gjatë kësaj, pjesa më serioze e zgjidhjes së problemit është përkthimi i tij në formën algjebrike përkatëse. Edhe pse nuk ka rregulla të përcaktuara rreptësisht për zgjidhjen e këtyre detyrave, megjithatë, mund të veçojmë disa hapa, si një procedurë për të arritur në zgjidhjen e problemit të parashtruar.

## SHEMBULLI 1

Shuma e dy numrave është 94. Numri më i madh është për 5 më i vogël se dyfishi i numrit më të vogël. Cilët janë ata numra?

1. Veçojmë pyetjen: Cilët janë dy numrat?
2. Shënojmë madhësitë e panjohura: me $x$ numrin më të vogël dhe me $94 - x$ numrin më të madh.
3. Përcaktojmë lidhjen algjebrike: numri më i madh është për 5 më i vogël se dyfishi i numrit më të vogël.
4. Formulojmë barazimin: $94 - x = 2x - 5$..
5. E zgjidhim barazimin:

$94 - x = 2x - 5$

$94 + 5 = 2x + x$

$99 = 3x$

$x = 33$ Zgjidhja e barazimit është $x_0 = 33$.

Numri më i vogël është 33, ndërsa numri më i madh është $94 - 33 = 61$.

6. Bëjmë kontrollin e rezultatit: $33 + 61 = 94$ dhe $94 - 33 = 2 \cdot 33 - 5$.

Të theksojmë se kontrolli është i nevojshëm, sepse mund të ndodhë që barazimi të jetë imirë i formuluar dhe i zgjidhur, por për zgjidhjet e fituara detyra të mos ketë kuptim.

## SHEMBULLI 2

Jana është 7 vjet më e madhe se vëllai i saj. Pas 5 vjetësh shuma e moshave të tyre do të jetë 63. Sa vjet ka secili prej tyre?

1. Pyetja: Sa vjet kanë Jana dhe vëllai i saj?
2. Madhësi të panjohura: $x$ është numri i viteve të Janës, $x - 7$ është numri i viteve të vëllait të saj.

3. Për të arritur deri te lidhja algjebrike, kushtet e dhëna në problem i paraqesim në tabelë

| Madhësitë | Jana | Vëllai i Janës |
|---|---|---|
| numri i viteve | $x$ | $x-7$ |
| numri i viteve pas 5 vjetësh | $x+5$ | $(x-7)+5$ |

Numri i viteve të Janës pas 5 vjetësh i mbledhur me numrin e viteve të vëllait të saj pas 5 vjetësh është 63.

4. Formulojmë barazimina $(x+5)+(x-7)+5=63$.
5. Zgjidhim barazimin $(x+5)+(x-7)+5=63$:

$(x+5)+(x-7)+5=63$

$2x+3=63$

$x=30$ Jana për momentin ka 30 vjet, dhe vëllai i saj $30-7=23$ vjet.

6. Kontroll i rezultatit: $(30+5)+(23+5)=63$.

## SHEMBULLI 3

Petari kishte 6500 denarë në bankënota prej 50, 100 dhe 500 denarësh. Ai kishte numër të barabartë bankënotash nga secili lloj. Nga sa bankënota nga secili lloj ka pasur ai?

Petari kishte x bankënota nga secili lloj. Kushtet e dhëna në problem do t'i paraqesim në tabelë

| Madhësitë | Bankënota nga 50 denarë | Bankënota nga 100 denarë | Bankënota nga 500 denarë |
|---|---|---|---|
| numri i bankënotave | $x$ | $x$ | $x$ |
| vlera në denarë | 50 | 100 | 500 |
| vlera totale në denarë | $50x$ | $100x$ | $500x$ |

Meqë shuma totale e parave që kishte Petari ishte 6500 denarë, mund të formulojmë barazimin $50x+100x+500x=6\,500$

zgjidhja e të cilit është $x_0=10$. Sipas kësaj, Petari kishte 10 bankënota nga secili lloj.

Kontrolli: $50\cdot 10+100\cdot 10+500\cdot 10=6\,500$

Të theksojmë se zgjidhja ka kuptim vetëm nëse numri i kartemonedhave $x$ është numër natyror.

## SHEMBULLI 4

Në një supermarket çmimet e artikujve ushqimorë u ulën për 40%. Nëse çmimi i një produkti është 180 denarë, gjeni çmimin e tij para shpalljes së uljes.

Le të jetë $x$ çmimi i produktit para shpalljes së uljes. Nëse çmimi i produktit u ul për 40%, atëherë çmimi i produktit u ul për $0{,}4x$ denarë. Meqë çmimi i produktit tani është 180 denarë, arrijmë te barazimi

$x-0{,}4x=180$

zgjidhja e të cilit është $x_0=300$.

Çmimi i produktit para shpalljes së uljes ishte 300 denarë.

Kontrolli: $300-0{,}4\ 300=180$.

## SHEMBULLI 5

Për të rrethuar një kopsht drejtkëndor nevojiten 130 metra tel. Gjatësia e kopshtit është 5 metra më e madhe se gjerësia. Gjeni përmasat e kopshtit.

Le të jetë gjerësia e kopshtit $x$ metra. Atëherë gjatësia e tij është $x + 5$ metra. Nëse dimë që për të rrethuar kopshtin nevojiten 130 metra tel, mund të formulojmë barazimin

$2x + 2(x + 5) = 130$

zgjidhja e të cilit është $x_0 = 30$.

Kopshti është i gjerë 30 metra dhe i gjatë 35 metra.

Kontrolli: $2 \cdot 30 + 2(30 + 5) = 130$.

## SHEMBULLI 6

Një pishinë mbushet me dy tuba për 6 orë. Tubi i parë e mbush pishinën për 10 orë. Për sa orë e mbush pishinën tubi i dytë?

Tubi i parë e mbush pishinën për 10 orë, që do të thotë për një orë mbush $\frac{1}{10}$ e pishinës.

Rubineti i dytë e mbush pishinën për $x$ orë, që do të thotë se për një orë mbush $\frac{1}{x}$ e pishinës.

Të dy rubinetët së bashku e mbushin pishinën për 6 orë, që do të thotë për një orë mbushin $\frac{1}{6}$ e pishinës.

Duke parë se pjesën e pishinës që e mbushin të dy tubat për një orë, pavarësisht nëse e mbushin pishinën së bashku apo veçmas, mbetet e njëjtë, mund të formulojmë barazimin $\frac{1}{10} + \frac{1}{x} = \frac{1}{6}$ i cila për $x \neq 0$ është ekuivalent me barazimin $3x + 30 = 5x$ zgjidhja e të cilit është $x_0 = 15$.

Tubi i dytë e mbush pishinën për 15 orë.

Kontrolli: $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6}$.

## SHEMBULLI 7

Roboti është i programuar të lëvizë me shpejtësi konstante prej $v$ metra në sekondë. Për një kohë prej $t$ sekondash, ai ka përshkuar një distancë totale prej $d$ metrash.

Shkruani barazimin linear me të cilin do ta shprehni distancën $d$ përmes kohës $t$, duke përdorur $v$ si parametër.

Nëse roboti lëviz me $v = 1{,}5$ metra në sekondë, sa kohë do të duhet për të përshkuar 120 metra?

Nga fizika dimë se

$d = v \cdot t$ $d$ është distanca (në metra)

$v$ është shpejtësia (parametër, në metra për sekondë)

$t$ është koha (në sekonda)

Duke zëvendësuar vlerat e dhëna, $v = 1{,}5$ metra në sekondë dhe $d = 120$ metra, në barazim, fitojmë

$120\,\text{m} = 1{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$

që do të thotë se koha është $t = 80$ sekonda.

Robotit do t'i duhen 80 sekonda për të përshkuar 120 metra me shpejtësi 1,5 m/s.

## DETYRA 1

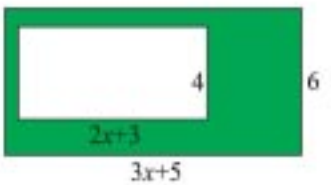
Është e nevojshme të instalohet një sistem solar për një shtëpi që konsumon 4500 Wh (vat-orë) energji elektrike në ditë. Në dispozicion janë panele solare që prodhojnë 250 Wh energji elektrike secila, ndërsa dielli ndriçon 6 orë në ditë. Sa panele solare nevojiten për të plotësuar energjinë e nevojshme ditore?

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Nëna e Adorit është 3 herë më e vjetër se Adori. Pas 14 vjetësh, ajo do të jetë 2 herë më e vjetër se ai. Sa vjet ka secili prej tyre?

2. Një kompani dërgon kompjuterë server të rinj në dy qendra për ruajtjen e të dhënave. Numri i përgjithshëm i kompjuterëve server është 72. Qendra e dytë për ruajtjen e të dhënave do të marrë dyfishin e kompjuterëve të qendrës së parë për ruajtjen e të dhënave. Sa kompjuterë server do të marrë secila qendër për ruajtjen e të dhënave?

3. Llogaritni syprinat e drejtkëndëshit të gjelbër dhe të bardhë në vizatimin 1, nëse pjesa e ngjyrosur me të gjelbër është 28 centimetra katrorë.



Vizatimi 1

4. Pemishtja e mollëve e gjyshit Agim është 1 200 metra katrorë. Për ta mbrojtur atë nga breshëri, nipi i tij Ardijani vendosi t'i blejë një rrjetë mbrojtëse. Nëse rrjeta ka formë drejtkëndëshe me gjerësi 5 metra, çfarë gjatësie të rrjetës mbrojtëse duhet të blejë Ardijani për të mbrojtur të gjithë pemishten e gjyshit Agim?

5. Përzihen 10 litra alkool 40% me 5 litra alkool 53%. Sa përqind alkool është përzierja?

6. Një çiklist përshkoi një distancë prej 18 kilometrash për kohën në të cilën një këmbësor përshkoi 10 kilometra. Nëse çiklisti lëvizte me shpejtësi për 9.6 kilometra në orë më të madhe nga shpejtësia e këmbësorit, me çfarë shpejtësie lëvizte secili prej tyre?

7. Për prodhimin e energjisë elektrike, REK Manastir përdor 1 kilogram qymyr për të prodhuar 0,6 kilovat-orë energji elektrike për një orë. Jana vuri re se një kondicioneri inverter i duhen 2 orë pune për të rritur temperaturën për një gradë Celsius. Nëse fuqia e kondicionerit është 2,4 kilovat-orë energji elektrike, sa qymyr do të kursehet nëse Jana vendos të ngrohë dhomën në 22 gradë Celsius, në vend të 23 gradë Celsius?

8. Dejani dëshiron të përcaktojë kohën e nevojshme për tretjen e 10 qebapëve me peshë 12 gramë secila. Për tretjen e 15 miligram proteina në stomak nevojitet 1 miligram i enzimës pepsinë.
   a) Sa miligram pepsinë nevojiten për tretjen e qebapëve, nëse proteinat përbëjnë 20% të masës së mishit?
   b) Sa orë do të zgjasë tretja e qebapëve, nëse organizmi prodhon 200 miligram pepsinë çdo orë?

9. Sinjali telefonik në rrjetin telefonik lëviz me shpejtësinë e dritës, $3 \cdot 10^8$ metra në sekondë, ndërsa zëri lëviz me një shpejtësi prej 340 metra në sekondë. Ana dhe Bojani flasin në dy telefona të cilët janë të vendosur 1.7 metra larg. Sa është gjatësia e rrugës që përshkon sinjali telefonik nëse zërin nga dëgjuesja dhe zërin e Anës, Bojan i dëgjon njëkohësisht?

# 3.9. Sistemi i dy barazimeve lineare me dy të panjohura

## Barazimi linear me dy të panjohura

### AKTIVITET

Shkruani një barazim sipas pohimit:
"Ivani ka 24 fletore nga të cilat $5x$ janë fletore të kaltra dhe $7y$ janë fletore të gjelbra".
Sa të panjohura përmban barazimi që shkruajtët?
Cila është shkalla më e lartë me të cilën ngrihen të panjohurat në barazim?



Një barazim me dy të panjohura reale të shkallës së parë quhet **barazim linear me dy të panjohura.**
**Zgjidhje** e barazimit linear me dy të panjohura është çdo çift i renditur numrash realë për të cilin barazimi kthehet në barazi numerike të saktë.

### SHEMBULLI 1

a) Barazime me dy të panjohura janë, për shembull, barazimet $5x - 6y = 9$, $3x = 4y$ dhe $y = 1 - x$.
b) Për barazimin $2x + 3y = 4$, çifti$(2, 0)$ është zgjidhje e tij sepse $2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 4$, ndërsa
çifti $(2, -4)$ nuk është zgjidhje e tij sepse $2 \cdot 2 + 3 \cdot (-4) \neq 4$.

### DETYRA 1

Përcaktoni vlerën e parametrit m ashtu që çifti (1, 2) të jetë zgjidhje e barazimit

$(2x - 3)m - 6 = y + m$.

Nëse dy barazime lineare me dy të panjohura të njëjta kanë bashkësi zgjidhjesh të barabarta, atëherë ato quhen **ekuivalente**.
Me **transformimet ekuivalente** në vijim të kryera në një barazim linear me dy të panjohura fitohet një barazim ekuivalent me të:

- njëra anë e barazimit zëvendësohet me një shprehje identikisht të barabartë.
- në të dy anët e barazimit shtohet e njëjta shprehje, ose ndonjë anëtar i barazimit transferohet nga njëra anë në tjetrën, por me shenjë të kundërt.
- të dy anët e barazimit shumëzohen ose pjesëtohen me të njëjtin numër të ndryshëm nga zero.

### SHEMBULLI 2

Ndiqni zëvendësimin e barazimit të dhënë me një barazim më të thjeshtë i cili është ekuivalent me të:
$\frac{y-2}{6} - \frac{x}{3} = y - \frac{x+1}{4}$

I shumëzojmë të dy anët e barazimit me SHVP $(6, 3, 4) = 12$.

| | |
|---|---|
| $12\left(\frac{y-2}{6} - \frac{x}{3}\right) = 12\left(y - \frac{x+1}{4}\right)$ | Thjeshtojmë. |
| $2(y-2) - 4x = 12y - 3(x+1)$ | Çlirohemi nga kllapat. |
| $2y - 4 - 4x = 12y - 3x - 3$ | Anëtarët $12y$ dhe $-3x$ i transferojmë në anën e majtë të barazimit, shenjat e tyre ndryshohen. |
| | Anëtarin $-4$ e bartim në anën e djathtë të barazimit, shenja e tij ndryshohet. |
| $2y - 4x - 12y + 3x = -3 + 4$ | I reduktojmë anëtarët e ngjashëm. |
| $-x - 10y = 1$ | Barazimi i fituar është ekuivalent me barazimin e dhënë. |

Me transformime elementare të përshtatshme, çdo barazim linear me dy të panjohura reduktohet në një barazim linear të formës (trajtës)

$$ax + by = c, \qquad (1)$$

ku a, b dhe c janë numra ose shprehje në të cilat nuk shfaqen të panjohurat x dhe y. Barazimi (1) quhet **forma (trajta) e përgjithshme e barazimit linear me dy të panjohura**, a dhe b quhen **koeficientët** para të panjohurave, ndërsa c quhet **termi i lirë**.

### DETYRA 1

Me transformime ekuivalente, sillni barazimin $\frac{x}{2} - \frac{y-3}{5} - 2 = 3 - x$ në formën e përgjithshme.

Le të shqyrtojmë bashkësinë e zgjidhjeve të barazimit linear (1):

**1°.** $ax + by = c, a \neq 0$
Çdo çift i renditur $\left(\frac{c-bk}{a}, k\right), k \in \mathbb{R}$, është zgjidhje e barazimit.
Bashkësia e zgjidhjeve të barazimit është $R = \left\{\left(\frac{c-bk}{a}, k\right) \middle| k \in \mathbb{R}\right\}$.

**2°.** $ax + by = c, a = b = 0, c \neq 0$
Barazimi nuk ka zgjidhje reale, bashkësia e zgjidhjeve është $R = \emptyset$.

**3°.** $ax + by = c, a = b = c = 0$
Çdo çift i renditur numrash realë është zgjidhje e barazimit, bashkësia e zgjidhjeve është $R = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

### SHEMBULLI 3

Zgjidhe barazimin: a) $3(x-2) + 2(y-3) = 2x + y$ b) $3(x-2) + 2(y-3) = 3x + 2y$

| | |
|---|---|
| a) $3(x-2) + 2(y-3) = 2x + y$ | Barazimin e sjellim në formë të thjeshtuar ekuivalente |
| $x + y = 12$ | $a = 1 \neq 0$. Bashkësia e zgjidhjeve është $R = \{(12-k, k) \mid k \in \mathbb{R}\}$. |
| b) $3(x-2) + 2(y-3) = 3x + 2y$ | Barazimin e sjellim në formë ekuivalente më të thjeshtuar. |
| $-12 = 0$ | $a = b = 0, c = -12 \neq 0$. Bashkësia e zgjidhjeve është $R = \emptyset$. |

Bashkësia e të gjitha pikave në rrafsh, koordinatat $(x, y)$ të të cilave janë zgjidhje e barazimit linear me dy të panjohura $ax + by = c$ quhet **grafik i barazimit linear.**

Nëse $a \neq 0$ dhe $b \neq 0$, atëherë barazimi linear me dy të panjohura $ax + by = c$ është ekuivalent me barazimin

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b},$$

që në thelb është një funksion linear, grafiku i të cilit është drejtëza me koeficient drejtimi $-\frac{a}{b}$.
Në mënyrë specifike, nëse $a = 0$, atëherë drejtëza është paralele me boshtin $x$.
Nëse $a \neq 0$ dhe $b = 0$, atëherë barazimi linear me dy të panjohura $ax + by = c$ është ekuivalent me barazimin

$$x = \frac{c}{a}$$

grafiku i të cilit paraqet drejtëz paralele me boshtin $y$.

## SHEMBULLI 4

Vizatoni grafikun e barazimit linear me dy të panjohura:

a) $x - 2y = 6$ b) $4(x + y) = 8 + 4x$ c) $3(x - y) = 6 - 3y$

a) $x - 2y = 6$ Barazimin e sjellim në formë ekuivalente..

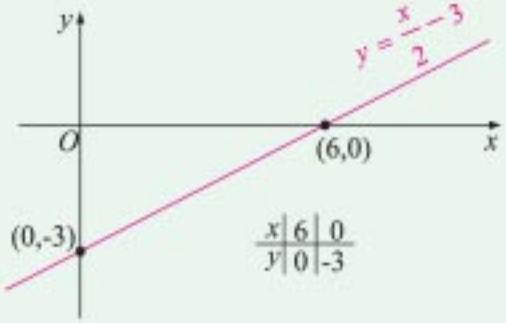
$y = \frac{x}{2} - 3$ Grafiku i tij është drejtëza $y = \frac{x}{2} - 3$ (vizatimi 1).

b) $4(x + y) = 8 + 4x$ Barazimin e sjellim në formë ekuivalente.

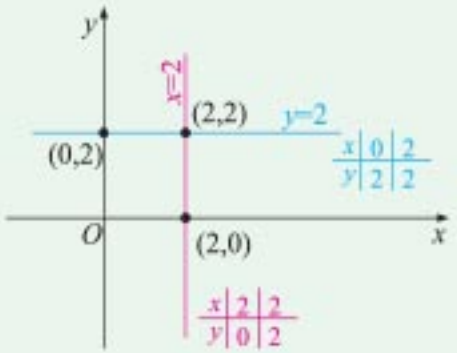
$y = 2$ Grafiku i tij është drejtëza $y = 2$ (vizatimi 2).

c) $3(x - y) = 6 - 3y$ Barazimin e sjellim në formë ekuivalente.

$x = 2$ Grafiku i tij është drejtëza $x = 2$ (vizatimi 2).




Vizatimi 1




Vizatimi 2

## DETYRA 1

Një fabrikë prodhon dy produkte A dhe B. Për prodhimin e një pjese të produktit A nevojiten 4 orë pune, ndërsa për prodhimin e një pjese të produktit B nevojiten 6 orë pune. Fabrika punon me një kapacitet prej 120 orësh në muaj.

Sa pjesë në muaj do të prodhohen nga produkti A, nëse për çdo muaj prodhohen nga 16 pjesë nga produkti B?

## Sistemi i dy barazimeve lineare me dy të panjohura

### AKTIVITET

Shkruaj dy barazime sipas pohimit.
"Drita ka 14 copë rroba nga të cilat 3x janë bluza dhe 2y janë pantallona. Bluza ka për 2 më shumë se pantallona".
Sa të panjohura përmban secili barazim që shkruajtët?
Cila është shkalla më e lartë me të cilën ngrihen të panjohurat në secilin barazim?
Çfarë paraqet bashkësia e dy barazimeve lineare me dy të panjohura të njëjta që shkruajtët?

Bashkësia e dy barazimeve lineare me dy të panjohura reale të njëjta quhet **sistem i dy barazimeve lineare me dy të panjohura.**

### SHEMBULLI 5

Sistemi $\begin{cases} x-2y=1 \\ x-y=-2 \end{cases}$ është një shembull i sistemit të dy barazimeve lineare me dy të panjohura.

**Zgjidhje** e një sistemi të dy barazimeve lineare me dy të panjohura është çdo çift i renditur numrash realë $(x, y)$ i cili është zgjidhje e çdo barazimi të sistemit.

### SHEMBULLI 6

a) $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ x-4y=-2 \end{cases}$ Çifti i renditur $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ është zgjidhje e çdo barazimi të sistemit, prandaj është zgjidhje e sistemit të dhënë.
Çifti i renditur $(-3, 5)$ është zgjidhje e barazimit $3x+2y=1$, por nuk është zgjidhje e barazimit $x-4y=-2$, prandaj nuk është zgjidhje e sistemit të dhënë.

b) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ Sistemi nuk ka zgjidhje, sepse shuma e dy numrave nuk mund të marrë njëkohësisht dy vlera të ndryshme.

c) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ Sistemi ka pafund shumë zgjidhje, sepse ekzistojnë pafund shumë numra realë shuma e të cilëve është e barabartë me një.

Dy sisteme barazimesh lineare me dy të panjohura janë **ekuivalente** nëse kanë bashkësi zgjidhjesh të barabarta.

Nëse çdo barazim i sistemit zëvendësohet me ekuivalentin e tij, atëherë fitohet një sistem që është ekuivalent me atë fillestar. Meqenëse çdo barazim linear me dy të panjohura është ekuivalent me një barazim të formës së përgjithshme $ax+by=c$, çdo sistem i dy barazimeve lineare me dy të panjohura mund të reduktohet në **formën (trajtën) e përgjithshme**

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

ku $a_1$, $a_2$, $b_1$ dhe $b_2$ janë **koeficientë para të panjohurave**, ndërsa $c_1$ dhe $c_2$ janë **terme të lira.**

## SHEMBULLI 3

Sille në formën e përgjithshme sistemin $\begin{cases} 2(x+1)-3=5(y+2) \\ \frac{x}{3}-\frac{y+2}{5}=1 \end{cases}$.

| | |
|---|---|
| $2(x+1)-3=5(y+2)$ | Barazimi i parë i sistemit zëvendësohet me një barazim |
| $2x-5y=11$ | ekuivalent të tij në formën e përgjithshme. |
| $\frac{x}{3}-\frac{y+2}{5}=1$ | Barazimi i dytë i sistemit zëvendësohet me një barazim |
| $5x-3y=21$ | ekuivalent të tij në formën e përgjithshme. |
| $\begin{cases} 2x-5y=11 \\ 5x-3y=21 \end{cases}$ | Sistemi i fituar është ekuivalent me atë të dhënë dhe është në formë të përgjithshme. |

Nëse me ndihmën e transformimeve elementare një sistem sillet në formën $\begin{cases} x=p \\ y=q \end{cases}$ atëherë çifti $(p, q)$ është zgjidhje e sistemit.

## SHEMBULLI 4

| | |
|---|---|
| $\begin{cases} 2(x+y)-3=2y+1 \\ 3x-y+1=-2x+5(x+1) \end{cases}$ | E sjellim sistemin në formë të përgjithshme. |
| $\begin{cases} 2x=4 \\ -y=4 \end{cases}$ | Aplikojmë transformime elementare. |
| $\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ | Lexojmë se çifti i renditur $(2, -4)$ është zgjidhje e sistemit. |

Ideja kryesore e të gjitha metodave për zgjidhjen e sistemit të dy barazimeve lineare me dy të panjohura është që sistemi, me ndihmën e një vargu transformimesh ekuivalente, të sillet në formën

$$\begin{cases} x=p \\ y=q \end{cases}$$

Atëherë lexojmë se çifti i renditur $(p, q)$ është zgjidhje e sistemit.

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Drini hedh dy topa me masë 0,1 kilogramë vertikalisht lart. Shkruani një shprehje me të cilën mund të llogaritet shuma e energjive potenciale të dy topave, nëse i pari ndodhet në lartësi $x$, dhe i dyti në lartësi $y$. Shprehja për energjinë potenciale jepet me $E_p = mgh$. Përdorni $g = 10$ m/s$^2$.

2. Është dhënë barazimi $2x + 3y = 3$. Gjeni zgjidhjen për të cilën:
   a) $x = 3$ b) $y = -1$ c) $x = 0$ ç) $y = 0$

3. Me ndihmën e transformimeve ekuivalente sillni në formën e përgjithshme barazimin:
   a) $3(x-2)-2(y-5)=x-y$ b) $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=3$ c) $\frac{x+y}{3}-\frac{y}{2}=5x-y$
4. Shkruani bashkësinë e zgjidhjeve të barazimit linear:
   a) $3x+7y=41$ b) $\frac{x+1}{3}-\frac{y+2}{5}-1=0$ c) $2\left(\frac{x}{4}-3\right)+3y+2=2x+3(y-4)$
5. Në bashkësinë e zgjidhjeve të barazimit linear $3(x-y)+2=x-5y+1$ gjni atë zgjidhje për të cilën $x=2y$.
6. Vizatoni grafikun e barazimit linear:
   a) $3x-2y=-12$ b) $3\left(\frac{x+1}{3}-4y\right)+6=3x$ c) $2x=0$ ç) $-5y=0$
7. Për cilën vlerë të parametrit $b$ grafiku i barazimit linear $2x+by=5$ kalon nëpër pikën $A(-1, 3)$?
8. Një dietë lejon konsumimin e dy llojeve të produkteve në një vakt. Një njësi e produktit të parë përmban 80 miligram vitaminë C, dhe një njësi e produktit të dytë përmban 160 miligram vitaminë C. Nevoja ditore për vitaminën C është 960 miligram.
   a) Sa njësi të produktit të parë duhet të konsumohen në një vakt që përmban 30 njësi të produktit të dytë?
   b) Sa njësi të produktit të dytë duhet të konsumohen, nëse në vakt përjashtohet produkti i parë?
9. Sillni në formën e përgjithshme sistemin e dy barazimeve lineare me dy të panjohura:
   a) $\begin{cases}3(x-2y)=6y\\x+y=3\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{x+y}{3}+x=15\\y-\frac{y-x}{3}=\frac{6}{5}\end{cases}$ c) $\begin{cases}\frac{x+7}{5}-\frac{2x-y}{4}=3y-5\\\frac{4x-3}{6}+\frac{5y-7}{2}=18-5x\end{cases}$

# 3.10. Metodat për zgjidhjen e sistemit të dy barazimeve lineare me dy të panjohura

## Metoda grafike

**AKTIVITET**

Vizatoni grafikun e barazimit linear me dy të panjohura::

a) $x-4y=8$ b) $2(x-y)=2x-2y$ c) $5(x+y)=10+5x$

Për një sistem të dhënë të dy barazimeve lineare me dy të panjohura, le të jetë p grafiku i barazimit të parë, dhe q grafiku i barazimit të dytë. Nëse çifti i renditur i numrave realë (m,n) është zgjidhje e sistemit, atëherë çifti $(m, n)$ është zgjidhje e të dy barazimeve, që do të thotë se pika me koordinata $(m, n)$ u përket të dy grafikëve $p$ dhe $q$. Nëse grafikët $p$ dhe $q$ janë drejtëza, atëherë në varësi të marrëdhënies së këtyre drejtëzave kemi:

1°. Nëse drejtëzat priten, atëherë sistemi i dy barazimeve lineare me dy të panjohura **ka një zgjidhje të vetme** (sistemi është i përcaktuar).

2°. Nëse drejtëzat nuk kanë pikë të përbashkët, pra janë paralele, atëherë sistemi i dy barazimeve lineare me dy të panjohura **nuk ka zgjidhje** (sistemi është kundërthënës (kontradiktor)).

3°. Nëse drejtëzat përputhen, atëherë sistemi i dy barazimeve lineare me dy të panjohura **ka pafund shumë zgjidhje** (sistemi është i papërcaktuar).

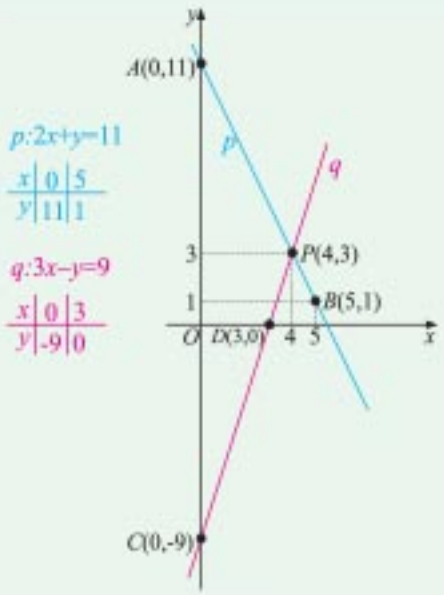
Të zgjidhet një sistem i dy barazimeve lineare me dy të panjohura me **metodën grafike**, do të thotë të vizatohen grafikët e dy barazimeve lineare në të njëjtin sistem koordinativ dhe të shqyrtohet marrëdhënia e tyre reciproke.

## SHEMBULLI 1

Zgjidhni sistemin me metodën grafike:

a) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 3y = 9 \end{cases}$

a)




Vizatimi 1

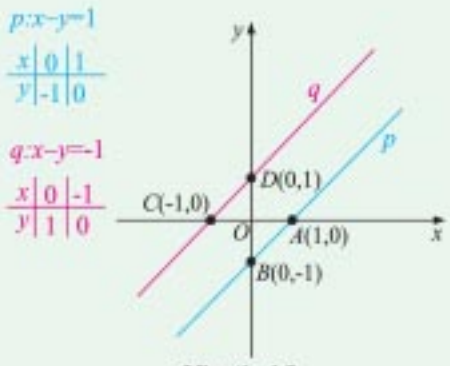
Grafiku i barazimit të parë është drejtëza p e cila kalon nëpër pikat A(0, 11) dhe B(5, 1).

Grafiku i barazimit të dytë është drejtëza q e cila kalon nëpër pikat C(0, −9) dhe D(3, 0).

Drejtëzat p dhe q priten në pikën P(4, 3).

Çifti i renditur (4, 3) është zgjidhja unike e sistemit (vizatimi 1).

b)



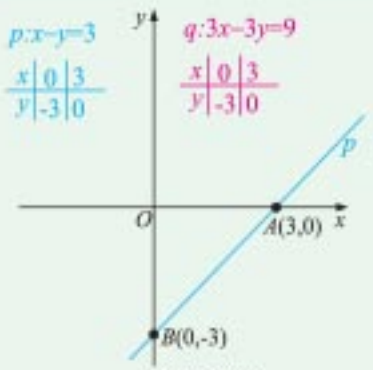

Vizatimi 2

Grafiku i barazimit të parë është drejtëza p e cila kalon nëpër pikat A(1, 0) dhe B(0, −1).

Grafiku i barazimit të dytë është drejtëza q e cila kalon nëpër pikat C(−1, 0) dhe D(0, 1).

Drejtëzat p dhe q janë paralele. Sistemi nuk ka zgjidhje (vizatimi 2).

c)




Vizatimi 3

Grafiku i barazimit të dytë është drejtëza q e cila kalon nëpër të njëjtat pika A(3, 0) dhe B(0, −3).

Grafiku i barazimit të dytë është drejtëza q e cila kalon nëpër të njëjtat pika $A(3, 0)$ dhe $B(0, -3)$.

Drejtëzat p dhe q përputhen.

Sistemi ka pafund shumë zgjidhje (vizatimi 3).

## DETYRA 1

Zgjidheni grafikisht sistemin:

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+3y=3 \end{cases}$

### HULUMTIM

Hulumtoni dhe zbuloni kur sistemi:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

ka një zgjidhje unike, ka pafund shumë zgjidhje ose është kontradiktor:

1. Nëse $b_1=0$ ose $b_2=0$. 2. Nëse $a_1=0$ ose $a_2=0$. 3. Nëse $a_1=0$ dhe $b_2=0$ ose $a_2=0$ dhe $b_1=0$

4. Nëse $b_1\neq 0$ dhe $b_2\neq 0$, dhe vlen kushti:

a) $\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2}$ b) $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ dhe $\frac{c_1}{b_1}=\frac{c_2}{b_2}$ c) $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ dhe $\frac{c_1}{b_1}\neq\frac{c_2}{b_2}$.

## Metoda e zëvendësimit

### AKTIVITET

Zgjidheni sistemin e dy barazimeve lineare me dy të panjohura:

a) $\begin{cases} x=2 \\ x+y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3(x+2)-7=0 \\ y=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y+4=0 \\ 2x+y=8 \end{cases}$

Nëse nga njëri barazim i sistemit shprehim njërën të panjohurë përmes tjetrës, dhe pastaj me shprehjen e fituar e zëvendësojmë atë të panjohur në barazimin e dytë, atëherë barazimi i ri i fituar dhe barazimi i parë i sistemit formojnë një sistem të ri që është ekuivalent me atë të dhënë.

Kjo procedurë për zgjidhjen e sistemit të barazimeve lineare me dy të panjohura njihet me emrin **metoda e zëvendësimit**. Për zbatimin e kësaj metode është e nevojshme që sistemi të sillet në formën e përgjithshme.

## SHEMBULLI 2

Me metodën e zëvendësimit zgjidheni sistemin:

a) $\begin{cases} 3x-2y=-9 \\ x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{5x-4}{3}+\frac{3y+1}{4}=x+y \\ \frac{7x-2}{6}-\frac{8y+1}{9}=x-y \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x-2y=-9 \\ x-y=2 \end{cases}$ E zgjidhim barazimin e dytë sipas $x$.

$\begin{cases} 3x-2y=-9 \\ x=2+y \end{cases}$ Shprehjen e fituar për $x$ e zëvendësojmë në barazimin e parë.

$\begin{cases} 3(2+y)-2y=-9 \\ x=2+y \end{cases}$ E thjeshtëzojmë barazimin e parë me transformime ekuivalente.

$\begin{cases} y=-15 \\ x=2+y \end{cases}$ Vlerën e fituar për $y$ e zëvendësojmë në barazimin e dytë.

$\begin{cases} y=-15 \\ x=-13 \end{cases}$ Sistemi ka një zgjidhje unike $(-13, -15)$.

b) $\begin{cases} \frac{5x-4}{3}+\frac{3y+1}{4}=x+y \\ \frac{7x-2}{6}-\frac{8y+1}{9}=x-y \end{cases}$ Me një varg transformimesh e sjellim sistemin në formë të përgjithshme.

$\begin{cases} 8x-3y=13 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ E zgjidhim barazimin e dytë sipas $y$.

$\begin{cases} 8x-3y=13 \\ y=\frac{8-3x}{2} \end{cases}$ Shprehjen e fituar për $y$ e zëvendësojmë në barazimin e parë.

$\begin{cases} 8x-3\cdot\frac{8-3x}{2}=13 \\ y=\frac{8-3x}{2} \end{cases}$ Aplikojmë transformime ekuivalente në barazimin e parë.

$\begin{cases} x=2 \\ y=\frac{8-3x}{2} \end{cases}$ Vlerën e fituar për $x$ e zëvendësojmë në barazimin e dytë.

$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ Sistemi ka një zgjidhje unike $(2, 1)$.

c) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=5 \end{cases}$ E zgjidhim barazimin e parë për y.

$\begin{cases} y=3-x \\ 2x+2y=5 \end{cases}$ Shprehjen e fituar për y e zëvendësojmë në barazimin e dytë.

$\begin{cases} y=3-x \\ 2x+2(3-x)=5 \end{cases}$ Aplikojmë transformime ekuivalente në barazimin e dytë.

$\begin{cases} y=3-x \\ 0\cdot x=-1 \end{cases}$ Barazimi $0\cdot x=-1$ nuk ka zgjidhje. Sistemi nuk ka zgjidhje.

**DETYRA 2**

Me metodën e zëvendësimit zgjidheni sistemin:

a) $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x-y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 6x-2y=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x+y}{3}+x=15 \\ y-\frac{y-x}{5}=\frac{6}{5} \end{cases}$

## Metoda e koeficientëve të kundërt

Nëse në një sistem mbledhim ose zbresim anën e majtë të njërit barazim me anën e majtë të tjetrit dhe anën e djathtë të njërit me anën e djathtë të tjetrit barazim, do të fitojmë një barazim të ri, i cili së bashku me njërin nga barazimet e dhëna formon një sistem të ri të dy barazimeve lineare me dy të panjohura, ekuivalent me atë të dhënë. Kjo procedurë njihet si **metoda e koeficientëve të kundërt** dhe zbatohet pasi sistemi të jetë sjellë në formën e përgjithshme.

**SHEMBULLI 3**

Me metodën e koeficientëve të kundërt zgjidhe sistemin:

a) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x-y=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x+1)(y-1)-2x=x(y-1) \\ 3xy+10(x+4)=3y(x+4) \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-2y=m \\ x+my=2 \end{cases}$, $m$ është parametër real.

a) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x-y=9 \end{cases}$

E mbledhim anën e majtë të barazimit të parë me anën e majtë të barazimit të dytë dhe anën e djathtë të barazimit të parë me anën e djathtë të barazimit të dytë.

Barazimi i fituar së bashku me barazimin e parë formon një sistem të ri ekuivalent me atë të dhënë.

$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x-y+(2x+y)=9+1 \end{cases}$

E thjeshtëzojmë barazimin e dytë me transformime ekuivalente.

$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 5x=10 \end{cases}$

Zgjidhjen e barazimit $5x + 10$ e zëvendësojmë në barazimin e parë.

$\begin{cases} 2\cdot 2+y=1 \\ x=2 \end{cases}$

Llogarisim vlerën e të panjohurës $y$.

$\begin{cases} y=-3 \\ x=2 \end{cases}$

Sistemi ka një zgjidhje të vetme $(2, -3)$.

b) $\begin{cases} (x+1)(y-1)-2x=x(y-1) \\ 3xy+10(x+4)=3y(x+4) \end{cases}$

E sjellim sistemin në formë të përgjithshme.

$\begin{cases} -2x+y=1 \\ 5x-6y=-20 \end{cases}$

Të dy anët e barazimit të parë i shumëzojmë me numrin 6. Anën e majtë të barazimit të fituar e mbledhim me anën e majtë të barazimit të dytë dhe anën e djathtë të atij barazimi me anën e djathtë të barazimit të dytë.

Barazimi i fituar së bashku me barazimin e parë formon një sistem të ri ekuivalent me atë të dhënë.

$\begin{cases} -2x+y=1 \\ 5x-6y+6(-2x+y)=-20+6 \end{cases}$ E thjeshtëzojmë barazimin e dytë me transformime ekuivalente.

$\begin{cases} -2x+y=1 \\ -7x=-14 \end{cases}$ Zgjidhjen e barazimit $-7x=-14$ e zëvendësojmë në barazimin e parë.

$\begin{cases} -2\cdot 2+y=1 \\ x=2 \end{cases}$ Llogarisim vlerën e të panjohurës $y$.

$\begin{cases} y=5 \\ x=2 \end{cases}$ Sistemi ka një zgjidhje unike (2, 5).

c) $\begin{cases} x-2y=m \\ x+my=2 \end{cases}$ Zbresim anën e majtë të barazimit të parë nga ana e majtë e barazimit të dytë dhe anën e djathtë të të parit nga ana e djathtë e të dytit.

Barazimi i fituar së bashku me barazimin e parë formon një sistem të ri ekuivalent me atë të dhënë.

$\begin{cases} x-2y=m \\ x+my-(x-2y)=2-m \end{cases}$ E thjeshtëzojmë barazimin e dytë me transformime ekuivalente.

$\begin{cases} x-2y=m \\ (2+m)y=2-m \end{cases}$ Fillojmë diskutimin sipas parametrit real $m$.

- Nëse $m=-2$, atëherë barazimi i dytë i sistemit është i formës $0\cdot y=4$, prandaj sistemi është kundërthënës.
- Nëse $m\neq -2$, atëherë sistemi merr formën $\begin{cases} x-2y=m \\ y=\dfrac{2-m}{2+m} \end{cases}$.

Zgjidhja e sistemit të fundit është $x=\dfrac{m^2+4}{m+2}$ dhe $y=\dfrac{2-m}{2+m}$.

## DETYRA PËR USHTRIME

Zgjidheni grafikisht sistemin e dy barazimeve lineare me dy të panjohura:

**1.** $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 6x-8y=12 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} y=2x-3 \\ 4x-2y=6 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 2x=y+3 \\ 4x-2y=5 \end{cases}$

**4.** $\begin{cases} x=3 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} y=0 \\ 4x+y=8 \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x+2y-6=0 \\ x+2y=-4 \end{cases}$

Zgjidheni me metodën e zëvendësimit sistemin e dy barazimeve lineare me dy të panjohura

**7.** $\begin{cases} x-3y=4 \\ x-y=8 \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} 5x+2y=16 \\ 4x-y=5 \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} 3x=2y-9 \\ x=2+y \end{cases}$

**10.** $\begin{cases} 3(x+2y)=4(y-x)+2 \\ 5(x+y)=3(y-2x)+2 \end{cases}$ **11.** $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3}+x=15 \\ y-\dfrac{y-x}{5}=\dfrac{6}{5} \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} 3x+y=a \\ x-3y=b \end{cases}$, $a$ dhe $b$ janë parametra realë

Zgjidheni me metodën e koeficientëve të kundërt sistemin e dy barazimeve lineare me dy të panjohura:

**13.** $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} x = y \\ 2y = 10 - 3x \end{cases}$

**16.** $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = -1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y = -2 \end{cases}$ **17.** $\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{y+4}{5} = 0 \\ \frac{x+1}{4} = \frac{x+2}{3} \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} ax + by = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$, $a$ dhe $b$ janë parametra realë

**19.** Për cilën vlerë të parametrit $m$ sistemi

a) $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ -4x + 2y = 5 \end{cases}$ është kundërthënës b) $\begin{cases} mx - y = 3 \\ 2x - my = 2 \end{cases}$ është i përcaktuar

c) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x + my = m + 2 \end{cases}$ është i papërcaktuar

## 3.11. Zbatimi i sistemit të dy barazimeve lineare me dy të panjohura në situata problemore

### AKTIVITET

Një kompani ka parapaguar për $x$ licenca standarde për softuerë dhe y licenca premium për softuerë. Licenca standarde kushton 120 denarë në muaj, ndërsa licenca premium kushton 200 denarë në muaj. Kompania ka parapaguar për 15 licenca për 2280 denarë në muaj.

Hartoni një sistem prej dy barazimesh me dy të panjohura, sipas të cilit do mund të gjeni numrin e licencave standarde dhe premium për softuerë për të cilat ka parapaguar kompania.

Një numër i madh problemesh nga jeta e përditshme, teknika dhe shkenca në përgjithësi, reduktohen në zgjidhjen e barazimeve dhe sistemeve të barazimeve.

### SHEMBULLI 1

Një kullotë në formë drejtkëndëshi ka perimetër 40 metra. Gjeni gjatësinë dhe gjerësinë e kullotës, nëse gjatësia e tij është për 4 metra më e madhe se gjerësia.

Le të jetë gjatësia e kullotës $x$ metra dhe gjerësia y metra.

Nga kushti i parë në detyrë, perimetri i drejtkëndëshit është 40 metra, fitojmë barazimin $2x + 2y = 40$.

Nga kushti i dytë në detyrë, gjatësia e kullotës është 4 metra më e madhe se gjerësia, fitojmë barazimin $x - 4 = y$. Kështu, fitojmë sistemin $\begin{cases} 2x + 2y = 40 \\ x - 4 = y \end{cases}$

zgjidhja e të cilit është $x = 12$ dhe $y = 8$. Kullota në fjalë është 12 metra e gjatë dhe 8 metra e gjerë.

Kontrolli: $\begin{cases} 2 \cdot 12 + 2 \cdot 8 = 40 \\ 12 - 4 = 8 \end{cases}$

## SHEMBULLI 2

Në një test nga matematika kishte 10 detyra. Për çdo detyrë të zgjidhur saktë fitohen 3 pikë, ndërsa për çdo detyrë me zgjidhje të pasaktë zbriten 2 pikë.
Sa detyra zgjidhi saktë një nxënës i cili fitoi 15 pikë dhe punoi në të gjitha detyrat?

Le të jetë $x$ numri i detyrave të zgjidhura saktë dhe $y$ numri i detyrave me zgjidhje të pasakta.
Nga kushti i parë se nxënësi shënoi 15 pikë fitojmë barazimin $3x - 2y = 15$.
Nga kushti i dytë se testi kishte 10 detyra dhe nxënësi i punoi të gjitha, fitojmë barazimin $x + y = 10$.
Në këtë mënyrë fitojmë sistemin $\begin{cases} 3x - 2y = 15 \\ x + y = 10 \end{cases}$, zgjidhja e të cilit është $x = 7$ dhe $y = 3$. Nxënësi zgjidhi saktë 7 detyra.
Kontrolli: $\begin{cases} 3 \cdot 7 - 2 \cdot 3 = 15 \\ 7 + 3 = 10 \end{cases}$

## SHEMBULLI 3

Dy enë që nxënë 100 litra dhe 144 litra lëng, përmbajnë një sasi të caktuar lëngu. Nëse lëngun nga ena më e vogël e derdhim në atë më të madhe dhe e mbushim plotësisht, atëherë në enën më të vogël do të mbetet $\frac{1}{5}$ e sasisë fillestare të lëngut. Nëse, përsëri, lëngun nga ena më e madhe e derdhim në enën më të vogël dhe e mbushim plotësisht, atëherë në enën më të madhe do të mbeten $\frac{7}{12}$ e sasisë fillestare. Sa lëng kishte tek enët para derdhjes?

Le të jetë $x$ sasia e lëngut në enën më të vogël para derdhjes dhe $y$ sasia e lëngut në enën më të madhe.
Sipas kushteve në detyrë arrijmë në sistemin $\begin{cases} \frac{4}{5}x + y = 144 \\ x + \frac{5}{12}y = 100 \end{cases}$
zgjidhja e të cilit është $x = 60$ dhe $y = 96$. Para derdhjes, në enën më të vogël kishte 60 litra lëng, dhe në enën më të madhe kishte 96 litra lëng.
Kontrolli: $\begin{cases} \frac{4}{5} \cdot 60 + 96 = 144 \\ 60 + \frac{5}{12} \cdot 96 = 100 \end{cases}$

## SHEMBULLI 4

Admiri investoi një shumë prej 12 000 denarësh në dy banka të ndryshme, me normë vjetore interesi prej 9% në të parën dhe 11% në të dytën. Nëse për një vit fitoi interes prej 1180 denarë, nga sa para investoi në secilën bankë?

Le të ketë investuar $x$ denarë në bankën e parë, dhe $y$ denarë në bankën e dytë, atëherë nga kushtet në detyrë arrijmë në sistemin $\begin{cases} x + y = 12\,000 \\ 0{,}09x + 0{,}11y = 1180 \end{cases}$, zgjidhja e të cilit është $x = 7000$ dhe $y = 5000$.
Admiri investoi 7000 denarë në bankën e parë dhe 5000 denarë në bankën e dytë.
Kontrolli: $\begin{cases} 7000 + 5000 = 12\,000 \\ 0{,}09 \cdot 7000 + 0{,}11 \cdot 5000 = 1180 \end{cases}$

## SHEMBULLI 5

Një çiklist e përshkon distancën midis dy qyteteve për një kohë të caktuar, kur lëviz me shpejtësi konstante. Nëse ai e rrit shpejtësinë për 5 kilometra në orë, do të arrijë për 1 orë më parë, ndërsa nëse e ul shpejtësinë për 3 kilometra në orë, do të arrijë për 1 orë më vonë. Gjeni shpejtësinë e çiklistit, kohën për të cilën çiklisti e përshkoi distancën midis qyteteve dhe distancën midis qyteteve.

Le të lëvizë çiklisti me shpejtësi $x$ kilometra në orë dhe le të ketë përshkuar distancën midis qyteteve për $y$ orë. Në këtë rast, me shpejtësi $x$ kilometra në orë për $y$ orë do të përshkojë $xy$ kilometra rrugë, ndërsa me shpejtësi $(x+5)$ kilometra në orë për $(y-1)$ orë do të përshkojë $(x+5)(y-1)$ kilometra rrugë. Meqenëse rruga e përshkuar në të dy rastet është e barabartë me distancën midis qyteteve, fitojmë barazimin $(x+5)(y-1)=xy$.

Duke menduar në të njëjtën mënyrë fitojmë barazimin $(x-3)(y+1)=xy$.

Në këtë mënyrë arrijmë në sistemin $\begin{cases}(x+5)(y-1)=xy\\(x-3)(y+1)=xy\end{cases}$

zgjidhja e të cilit është $x=15$ dhe $y=4$. Shpejtësia e çiklistit është 15 kilometra në orë, koha për të cilën ai e përshkon distancën midis qyteteve është 4 orë, ndërsa distanca midis qyteteve është $15\cdot 4=60$ kilometra.

Kontrolli: $\begin{cases}(15+5)(4-1)=15\cdot 4\\(15-3)(4+1)=15\cdot 4\end{cases}$

## DETYRA 1

Një anije kozmike përdor dy lloje karburanti, karburantin kryesor dhe karburantin rezervë. Çdo njësi e karburantit kryesor mundëson udhëtim prej 5 kilometrash. Çdo njësi e karburantit rezervë mundëson udhëtim prej 3 kilometrash. Pas përdorimit të gjithsej 20 njësive karburanti, anija udhëtoi 80 kilometra. Sa njësi nga secili karburant ka përdorur anija kozmike?

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Gjatësia e një drejtkëndëshi është dy herë më e madhe se gjerësia e tij. Sa është gjatësia dhe gjerësia e drejtkëndëshit, nëse perimetri i tij është 72 centimetra?
2. Këndi më i madh nga dy këndet shtuese (suplementare) është për 4 më i madh se trefishi i këndit më të vogël. Gjeni këndet.
3. Këndi më i madh i ngushtë në një trekëndësh kënddrejtë është 15 shkallë më i vogël se dyfishi i këndit më të vogël të ngushtë. Gjeni këndet e ngushta në trekëndëshin kënddrejtë.
4. Marko dëshiron të punësohet si shitës. Kompania e parë i ofron rrogë prej 800 denarësh në ditë dhe 10 denarë për një artikull të shitur. Kompania e dytë i ofron 1000 denarë në ditë dhe 8 denarë për një artikull të shitur. Sa artikuj duhet të shesë Marko që rrogat nga të dy kompanitë të jenë identike?
5. Dy kazanët e naftës për ngrohjen e shkollës nxënë 500 litra naftë. Kazani më i madh nxë 120 litra naftë më shumë se kazani më i vogël. Sa litra naftë nxë secili kazan?

6. Rina çdo ditë vrapon dhe vozit biçikletë. Ditën e parë vrapoi 10 minuta dhe voziti biçikletë 20 minuta, duke shpenzuar 300 kalori. Ditën e dytë vendosi t'i ndërrojë kohët dhe vrapoi 20 minuta dhe voziti biçikletë 10 minuta dhe përsëri shpenzoi 300 kalori. Sa kalori për minutë djeg Rina duke vrapuar, dhe sa duke vozitur biçikletën?

7. Sekretari i shkollës, Petari, duhet të blejë materiale zyre. Javën e kaluar bleu 3 pako letër dhe 4 pako lidhëse për 2000 denarë. Këtë javë bleu 5 pako letër dhe 2 pako lidhëse për 3100 denarë. Sa kushton një pako letër, dhe sa kushton një pako lidhëse?

8. Sasia totale e kripës në dy sandviçe dhe tri copa djathë është 4720 miligramë. Në pesë sandviçe dhe dy copa djathë ka 6300 miligramë kripë. Sa kripë ka në një sandviç, dhe sa ka në një copë djathi?

9. Udhëtimi me varkë motorike në një distancë prej 18 kilometrash zgjat 2 orë me rrymën e lumit dhe 4 orë e 30 minuta kundrejt rrymës së lumit. Cila është shpejtësia e varkës motorike në ujë të qetë, dhe cila është shpejtësia e lumit?

10. Një grup nxënësish vendosi të mbledhin fonde dhe të blejnë një numër të caktuar fidanësh. Nëse secili prej tyre jep nga 150 denarë, atëherë u mungojnë edhe 170 denarë, ndërsa nëse secili jep nga 180 denarë do të kenë tepricë prej 100 denarësh. Sa nxënës ka në grup dhe sa para nevojiten për fidanët?

# 3.12. Llojet e mosbarazimeve dhe mosbarazimet ekuivalente me një të panjohur

## Llojet e mosbarazimeve

**AKTIVITET**

Formoni nga një mosbarazi numerike duke përdorur shenjat e mosbarazisë të dhëna në tabelë:

| më e vogël | më e madhe | më e vogël ose e barabartë | më e madhe ose e barabartë |
|---|---|---|---|
| $<$ | $>$ | $\leq$ | $\geq$ |



Dy shprehje algjebrike racionale, nga të cilat të paktën njëra shprehje ka një ose më shumë ndryshore, të lidhura me një shenjë mosbarazie përcaktojnë **mosbarazim.**
Ndryshoret në mosbarazim i quajmë **të panjohura** dhe i shënojmë me $x, y, z,$. Bashkësia e vlerave të lejuara të të panjohurave quhet **fusha e përkufizimit** e mosbarazimit dhe shënohet me $D$.

**SHEMBULLI 1**

Mosbarazimi $5x + 3 > 2$ është mosbarazim me të panjohurën $x$ dhe ka fushë përkufizimi $D = \mathbb{R}$.

Sipas numrit të të panjohurave, mosbarazimi mund të jetë: **mosbarazim me një të panjohur**, **mosbarazim me dy të panjohura**, etj.
Sipas shkallës më të lartë në të cilën ngriten të panjohurat, mosbarazimi mund të jetë **mosbarazim i shkallës së parë ose linear**, **mosbarazim i shkallës së dytë ose kuadratik**, etj.

### SHEMBULLI 2

a) Mosbarazimi $2x + 4 < 7$ është mosbarazim linear me një të panjohur.
b) Mosbarazimi $x + y \geq 2x$ është mosbarazim linear me dy të panjohura.
c) Mosbarazimi $x^2 \leq x + y$ është mosbarazim kuadratik me dy të panjohura.

### SHEMBULLI 3

Mosbarazimi $7 - 3x \geq 1$, për $x = 2$ kthehet në një mosbarazi të saktë numerik $7 - 3 \cdot 2 \geq 1$
për $x = 3$ kthehet në një mosbarazi të pasaktë numerik $7 - 3 \cdot 3 \geq 1$

**Zgjidhja e një mosbarazimi** me një të panjohur është çdo vlerë e të panjohurës nga fusha e përkufizimit për të cilën mosbarazimi kthehet në një mosbarazi të saktë numerik.
Të gjitha zgjidhjet e një mosbarazimi përbëjnë **bashkësinë e zgjidhjeve të mosbarazimit**, të cilën do ta shënojmë me $R$.

### SHEMBULLI 4

a) Zgjidhje e mosbarazimit $x > 5$ është çdo numër real nga intervali i hapur $(5, +\infty)$, pra $R = (5, +\infty)$.
b) Për mosbarazimin $6 + 3x \geq 3(2 + x)$ bashkësia e zgjidhjeve është $R = D = \mathbb{R}$. Në rast të tillë themi se mosbarazimi është **identitet**.
c) Për mosbarazimin $7 + 3x < 2 + 3x$ bashkësia e zgjidhjeve është $R = \emptyset$. Në rast të tillë themi se mosbarazimi është **i pamundur**.

## Mosbarazimet ekuivalentë me një të panjohur

### AKTIVITET

Çfarë mund të vëreni për përkufizimit dhe bashkësinë e zgjidhjeve të mosbarazimeve:
$2 + x < 5$ dhe $x - 3 < 0$?

Dy mosbarazime që kanë të njëjtën fushë përkufizimi dhe të njëjtën bashkësi zgjidhjesh quhen **mosbarazime ekuivalente**.

Për të zgjidhur një mosbarazim të dhënë, i njëjti zëvendësohet me një tjetër më të thjeshtë, por ekuivalent me të. Pastaj, ai mosbarazim zëvendësohet me një të tretë më të thjeshtë ekuivalent me të, e kështu me radhë, derisa të arrijmë në një mosbarazim zgjidhjet e të cilit janë të qarta. Procedura e zëvendësimit të mosbarazimit me një mosbarazim ekuivalent me të quhet **transformim ekuivalent**

## AKTIVITET

Ndiqni zëvendësimin e mosbarazimit të dhënë me një mosbarazim më të thjeshtë i cili është ekuivalente me të, dhe zgjidhja e të cilit është e qartë:

| | |
|---|---|
| $x-5<2$ | Të dy anëve të mosbarazimit u shtojmë numrin 5. |
| $x-5+5<2+5$ | Kryejmë veprimet e shënuara në të dy anët e mosbarazimit. |
| $x<7$ | Mosbarazimi i fituar është ekuivalent me mosbarazimin e dhënë. |

A do të arrinit në të njëjtën zgjidhje nëse numrin $-5$ e transferoni në anën tjetër, me shenjë të kundërt?



Nëse të dy anëve të mosbarazimit u shtojmë një shprehje të njëjtë, e cila është e përcaktuar për të gjitha vlerat e lejuara të të panjohurës, fitojmë një mosbarazim ekuivalent me atë të dhënë.
Si pasojë kemi se:

- Nëse të dy anët e mosbarazimit kanë terma të barabartë me të njëjtat shenja, ata mund të anulohen (hiqen).
- Çdo term i mosbarazimit mund të transferohet nga njëra anë e mosbarazimit në anën tjetër me çrast ndryshon shenja e këtij termi.

## SHEMBULLI 1

Ndiqni transformimet ekuivalente të mosbarazimit:

| | |
|---|---|
| a) $5x-3x+3\geq 8-3x$ | Anulojmë shprehjet e barabarta: $-3x$ dhe $-3x$. |
| $5x+3\geq 8$ | Mosbarazimi i fituar është ekuivalente me atë të dhënë. |
| b) $4x-5<3x+2$ | Shprehjen $3x$ e bartim në anën e majtë të mosbarazimit me çrast i ndryshohet shenja. |
| $4x-5-3x<2$ | Termin $-5$ e transferojmë në anën e djathtë të mosbarazimit me çrast i ndryshohet shenja. |
| $4x-3x<5+2$ | Mosbarazimi i fituar është ekuivalent me mosbarazimin e dhënë. |



Nëse të dy anët e mosbarazimit i shumëzojmë me një shprehje të njëjtë, e cila është e përcaktuar dhe merr vetëm vlera pozitive për të gjitha vlerat e lejuara të të panjohurës, fitojmë një mosbarazim ekuivalente me atë të dhënë.

Si pasojë, nëse të dy anët e mosbarazimit kanë një shumëzues të përbashkët pozitiv, atëherë me të mund të pjesëtohen të dy anët e mosbarazimit. Në këtë rast themi se **e thjeshtojmë mosbarazimin.**

### SHEMBULLI 2

Ndiqni transformimet ekuivalente të mosbarazimit $3(x-2) < 15$.

| | |
|---|---|
| $3(x-2) < 15$ | Të dy anët e mosbarazimit i pjesëtojmë me numrin 3. |
| $x-2 < 5$ | Mosbarazimi i fituar është ekuivalent me atë të dhënë. |

Të theksojmë se me zbatimin e vetisë së mësipërme, një mosbarazim me koeficientë thyesorë mund të transformohet në një mosbarazim me koeficientë të plotë, nëse çdo term i mosbarazimit shumëzohet me një shumëfish të përbashkët pozitiv të emëruesve. Transformimi i këtillë quhet **çlirimi i mosbarazimit nga emëruesit**.

### SHEMBULLI 3

Çlirojeni nga emëruesit mosbarazimin $\frac{2x-7}{3} < \frac{x+1}{2} - 5$.

| | |
|---|---|
| $\frac{2x-7}{3} < \frac{x+1}{2} - 5$ | Çdo anëtar e shumëzojmë me SHVP të emëruesve: SHVP $(2, 3) = 6$. |
| $6 \cdot \frac{2x-7}{3} < 6 \cdot \frac{x+1}{2} - 6 \cdot 5$ | Thjeshtojmë. |
| $2(2x-7) < 3(x+1) - 30$ | Mosbarazimi i fituar është ekuivalent me mosbarazimin e dhënë. |

### DETYRA 1

Çlirojeni nga emëruesit mosbarazimin $\frac{x-5}{2} - 3 > \frac{3x-2}{6}$.



Nëse të dy termet e mosbarazimit i shumëzojmë me një shprehje të njëjtë, e cila për të gjitha vlerat e lejuara të të panjohurës është e përcaktuar dhe merr vetëm vlera negative, dhe nëse e ndryshojmë kahjen e mosbarazimit (< me >, > me <, <= me >=, >= me <=) do të fitojmë një mosbarazim ekuivalent me atë të dhënë.

Si pasojë e kësaj vetie kemi se nëse të dy anët e një mosbarazimi të dhënë i shumëzojmë me –1, atëherë ndryshon kahja e mosbarazimit.

### SHEMBULLI 5

| | |
|---|---|
| $-x > 7$ | Të dy anët e mosbarazimit i shumëzojmë me –1. |
| $x < -7$ | Është ndryshuar kahja e mosbarazimit. |

Nga dy vetitë e fundit rrjedh përfundimi se nëse të dy anët e një mosbarazimi të dhënë shumëzohen me një shprehje të caktuar, atëherë duhet të shqyrtohen rastet kur ajo shprehje është pozitive, kur është negative dhe kur është zero.

Në rastin kur shprehja është 0, kini parasysh se $0 \geq 0$ dhe $0 \leq 0$ janë mosbarazi të sakta, ndërsa $0 > 0$ dhe $0 < 0$ janë mosbarazi të pasakta.

### DETYRA 2

Shuma e faturës telefonike është $350 + 20x$ denarë, ku $x$ është numri i thirrjeve të kryera. Sa thirrje maksimalisht mund të kryhen që shuma e faturës telefonike të mos kalojë vlerën 1000 denarë?

### DETYRA PËR USHTRIME

1. A janë mosbarazimet e mëposhtme ekuivalente:
   a) $x - 4x > 10 + 4x$ dhe $x > 10$ b) $3x^2 + 3x > 12 + 3x^2$ dhe $3x > 12$
   c) $x + \frac{1}{x} \leq 5 + \frac{1}{x}$ dhe $x \leq 5$
2. Cilët nga mosbarazimet e mëposhtme janë identitete:
   a) $5x^2 - 2x^2 \geq x^2$ b) $3x - 2 < 3x + 1$ c) $(y + 5)^2 \geq y^2 + 10y + 5$
3. Cilët nga mosbarazimet e mëposhtme janë të pamundura:
   a) $5 - 4x > 10 - 4x$ b) $2(x - 3) + 2 < 2x + 6$ c) $\frac{4x - 1}{2} > \frac{6x + 2}{3}$
4. Zbuloni gabimet që ka bërë Seadi gjatë kryerjes së transformimeve ekuivalente të mosbarazimit:
   a) $5(x - 2) + 3(x + 4) \geq 2(x - 1) + 8$
   $5x - 10 + 3x + 12 \geq 2x - 2 + 8$
   $8x + 2 \geq 2x + 6$
   $10x \geq 8$
   $x \geq \frac{4}{5}$
   b) $5(2 - 3x) \leq 2(x + 4) - 3(x - 1)$
   $10 - 15x \leq 2x + 8 - 3x + 3$
   $-15x - 2x + 3x \leq 8 + 3 - 10$
   $-14x \leq 1$
   $x \leq -\frac{1}{14}$
5. Një server merr $8x$ kërkesa në orë, ku $x$ është numri i përdoruesve. Sa më së shumti përdorues mund të ketë serveri, nëse ai mund të përpunojë më së shumti 5000 kërkesa në orë?

# 3.13. Formulimi dhe zgjidhja e mosbarazimeve lineare me një të panjohur

## Zgjidhja e mosbarazimeve lineare me një të panjohur

### AKTIVITET

Me zbatimin e transformimeve ekuivalente në mosbarazimin $5x + 4 > 8 + 2x$ bartni të gjith ë termat në anën e majtë dhe reduktoni ata. Më pas përshkruani formën e mosbarazimit së fituar.

Me të gjitha transformimet e mësipërme, çdo mosbarazim linear me një të panjohur reduktohet në një mosbarazim lineare të formës (trajtës)

$ax + b > 0$ (ose $ax + b \geq 0$)

e quajtur **formë (trajtë) e përgjithshme e mosbarazimit linear me një të panjohur**, ku a quhet **koeficienti** para të panjohurës, dhe b quhet **termi i lirë**.

## AKTIVITET

Gjeni bashkësinë e zgjidhjeve të mosbarazimit linear:

a) $2x+4<0$ b) $0\cdot x\le 2$ c) $0\cdot x\ge 0$.

Le të shqyrtojmë bashkësinë e zgjidhjeve të mosbarazimit linear

**1°.** $ax+b>0$ (ose $ax+b\ge 0$) dhe $a>0$.

$x>-\frac{b}{a}$ (ose $x\ge -\frac{b}{a}$)

E bartim b në anën e djathtë të mosbarazimit, dhe pastaj pjesëtojmë me $a$.

Mosbarazimi i fituar është ekuivalente me atë të dhënë.

**Bashkësia e zgjidhjeve** është interval i kufizuar nga e majta $\left(-\frac{b}{a},\infty\right)$ (ose $\left[-\frac{b}{a},\infty\right)$).

**2°.** $ax+b>0$ (ose $ax+b\ge 0$) dhe $a<0$

$x<-\frac{b}{a}$ (ose $x\le -\frac{b}{a}$)

E bartim $b$ në anën e djathtë të mosbarazimit, dhe pastaj pjesëtojmë me $a$.

mosbarazimi i fituar është ekuivalente me mosbarazimin e dhënë

**Bashkësia e zgjidhjeve** është intervali $\left(-\infty,\frac{-b}{a}\right)$ (ose $\left(-\infty,\frac{-b}{a}\right]$).

**3°.** $ax+b>0$ (ose $ax+b\ge 0$) dhe $a=0$
$0\cdot x+b>0$ (ose $0\cdot x+b\ge 0$ )

Zëvendësojmë $a=0$.
Mosbarazimi i fituar është ekuivalente me mosbarazimin e dhënë.
Nëse $b>0$ (ose $b\ge 0$) mosbarazimi është **identitet**.
Nëse $b\le 0$ (ose $b<0$) mosbarazimi është **i pamundur**.

## SHEMBULLI 1

Zgjidheni mosbarazimin $\frac{x-3}{3}-1>\frac{x-1}{2}-2$.

| | |
|---|---|
| $\frac{x-3}{3}-1>\frac{x-1}{2}-2$ | I shumëzojmë të dy anët e mosbarazimit me SHVP $(2,3)=6$. |
| $6\cdot\frac{x-3}{3}-6\cdot 1>6\cdot\frac{x-1}{2}-6\cdot 2$ | Thjeshtojmë. |
| $2(x-3)-6>3(x-1)-12.$<br>$2x-6-6>3x-3-12$ | Çlirohemi nga kllapat.<br>I grupojmë të gjithë anëtarët që përmbajnë të panjohurën në anën e majtë, dhe të gjithë termat e lirë në anën e djathtë. |
| $2x-3x>-3-12+6+6$ | I reduktojmë anëtarët e ngjashëm. |
| $-x>-3$ | I shumëzojmë të dy anët me numrin $-1$. |
| $x<3$ | Bashkësia e zgjidhjeve është intervali $(-\infty,3)$. |

Bashkësinë e zgjidhjeve mund ta paraqesim grafikisht në boshtin numerik, ashtu që pjesën e boshtit numerik në të cilën shtrihen pikat që paraqesin zgjidhjet e pabarazimit e theksojmë (vizatimi 1).




Vizatimi 1

## SHEMBULLI 2

Zgjidhe mosbarazimin $(x-2)^2 - 3x \leq x(x-3)$

| | |
|---|---|
| $x^2 - 4x + 4 - 3x \leq x^2 - 3x$ | Zhvillojmë fuqinë dhe çlirohemi nga kllapat. |
| | I grupojmë anëtarët me dhe pa të panjohurën dhe i reduktojmë anëtarët e ngjashëm. |
| $-4x \leq -4$ | Të dy anët e mosbarazimit i pjesëtojmë me $-4$. |
| $x \geq 1$ | Bashkësia e zgjidhjeve është intervali $[1, +\infty)$. |

Bashkësia e zgjidhjeve të mosbarazimit është paraqitur grafikisht në vizatimin 2.




Vizatimi 2

## DETYRA 1

Rradhitni mosbarazimet në renditjen e duhur për të fituar zgjidhjen e saktë të mosbarazimit fillestare. Disa mosbarazime nuk janë të sakta. Zbuloni gabimet që janë bërë gjatë zgjidhjes për të fituar mosbarazimet e pasakta.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $2x > 3$<br>$x > 1{,}5$ | $2x > -15$<br>$x < 6$ | $3(5x-3) > 13x-6$<br>$15x-9 > 13x-6$ | $15x-6 > 13x-6$<br>$2x-9 > -6$ |

## DETYRA 2

Monika ka 300 denarë dhe dëshiron të blejë produkte me vlerë totale prej $15x + 30$ denarë, ku $x$ është numri i produkteve të blera.
Sa produkte më së shumti bleu Monika?

## SHEMBULLI 3

Zgjidheni mosbarazimin $mx - 5 > 3x - m$, ku $m$

| | |
|---|---|
| $mx - 5 > 3x - m$ | I grupojmë të gjithë anëtarët që përmbajnë të panjohurën në anën e majtë, ndërsa termat e lirë në anën e djathtë. |
| $mx - 3x > 5 - m$ | Mosbarazimi i fituar është ekuivalente me atë të dhënë. |
| $(m-3)x > 5 - m$ | Fillojmë diskutimin sipas vlerave të parametrit $m$: |

Nëse $m - 3 > 0$, pra $m > 3$, atëherë bashkësia e zgjidhjeve është intervali $\left(\frac{5-m}{m-3}, +\infty\right)$.

Nëse $m-3<0$, pra $m<3$, atëherë bashkësia e zgjidhjeve është intervali $\left(-\infty, \frac{5-m}{m-3}\right)$.

✓ Nëse $m-3=0$, pra $m=3$, atëherë mosbarazimi merr formën $0 \cdot x > 2$.

Në këtë rast mosbarazimi është i pamundur dhe bashkësia e zgjidhjeve është bashkësi boshe.

**DETYRA 1**

Zgjidheni mosbarazimin me parametër $2x - m < m - 2$, ku $m$ është parametër real.

## Zbatimi i mosbarazimeve lineare me një të panjohur

### SHEMBULLI 4

Shpati po përgatitet për një ndeshje boksi dhe duhet të ulë peshën e trupit. Ai duhet të djegë së paku 2000 kalori shtesë në ditë.
Nëse Shpati djeg 2750 kalori në ditë, sa kalori në ditë mund të konsumojë për të arritur qëllimin?

Le të jetë $x$ numri i kalorive që duhet të konsumojë Shpati në ditë. Nga kushti në detyrë fitojmë mosbarazimin $2750 - x \geq 2000$, i cila është ekuivalente me mosbarazimin $x \leq 750$.

Shpati duhet të konsumojë më së shumti 750 kalori në ditë.

Kontrolli: $2\,750 - 750 \geq 2\,000$

### SHEMBULLI 5

Irina dëshiron të ngjyrosë krevatin e vogël të Milës. Për këtë qëllim duhet të ngjyrosë 180 decimetra katrorë. Nëse me një kuti ngjyre mund të ngjyroest një sipërfaqe prej 50 decimetrash katrorë, të paktën sa kuti ngjyra duhet të blejë Irina?

Le të jetë $x$ numri i kutive të ngjyrave që duhet të blejë Irina. Nga kushti në detyrë fitojmë mosbarazimin $50x \geq 180$, i cili është ekuivalent me mosbarazimin $x \geq 3{,}6$.

Zgjidhja e detyrës së parashtruar është numri natyror më i vogël që është më i madh se 3,6, pra numri 4.

Irena duhet të blejë të paktën 4 kuti ngjyra.

Kontrolli: $50 \cdot 4 \geq 180$

### SHEMBULLI 6

Një dron e konsumon baterinë e tij me një shpejtësi prej 0.625% në minutë. Droni duhet të aterojë përpara se të ketë konsumuar 60% të baterisë së tij. Sa minuta më së shumti mund të fluturojë droni?

Le të jetë $x$ koha e shprehur në minuta për të cilën droni mund të fluturojë. Nga kushti në detyrë fitojmë mosbarazimin $0{,}625\%\, x < 60\%$ i cili është ekuivalente me mosbarazimin $x < 96$.

Zgjidhja e problemit të paraqitur është numri natyror më i madh që është më i vogël se 96, pra numri 95.

Droni mund të fluturojë më së shumti 95 minuta.

Kontrolli: $0{,}625\% \cdot 95 < 60\%$

## SHEMBULLI 7

Një kuti e madhe ushqimi për kafshët shtëpiake përmban trefish më shumë porcione ushqimi se një kuti e vogël ushqimi për kafshët shtëpiake. Pavarësisht se cilën kuti do të blejë Onuri, ai së pari ndan nga një porcion për të kryer kontrollin e cilësisë së ushqimit. Pastaj, ushqimin e ndan për dy qentë e tij të cilët çdo ditë hanë nga një porcion ushqim. Kutia e madhe siguron ushqim për 5 ditë më shumë se dyfishin e numrit të ditëve nga kutia e vogël.
Sa porcione ushqimi të paktën përmban kutia e vogël?

Le të jetë $x$ numri i porcioneve të ushqimit në kutinë e vogël. Atëherë $3x$ është numri i porcioneve të ushqimit në kutinë e madhe. Kutia e vogël siguron ushqim për $\frac{x-1}{2}$ ditë, ndërsa kutia e madhe për $\frac{3x-1}{2}$ ditë.
Kështu arrijmë në mosbarazimin linear $\frac{3x-1}{2} > 2 \cdot \frac{x-1}{2} + 5$ i cili është ekuivalente me mosbarazimin $x > 9$.
Zgjidhja e detyrës është numri natyror më i vogël që është më i madh se numri 9, pra numri 10.
Kutia e vogël përmban të paktën 10 porcione.
Kontrolli: $\frac{3 \cdot 10 - 1}{2} > 2 \cdot \frac{10-1}{2} + 5$

## DETYRA 1

Një troftë e kultivuar në pishinë çdo muaj fiton 35 gramë në masën e saj. Madhësia e një porcioni të troftës është 300 gramë.
Sa muaj të paktën nevojiten që një rtoftë të kultivohet në një madhësi të përshtatshme për një porcion?

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Paraqitni grafikisht bashkësinë e zgjidhjeve të mosbarazimit:
   a) $x \geq 3$ b) $x \leq -4$ c) $x + 7 > 0$ ç) $6x < 24$

2. Zgjidheni mosbarazimin:
   a) $3x - 4 \geq 2 - x$ b) $5 - 2y < y + 8$ c) $x - (2 - x) \leq 3x + 7$

3. Zgjidheni mosbarazimin:
   a) $(x-3)^2 \leq x(x+1)$ b) $\frac{x-5}{2} - 3 > \frac{3x-2}{6}$ c) $\frac{y}{2} - \frac{1-y}{4} > 5 - \frac{2+y}{3}$

4. Zgjidheni mosbarazimin:
   a) $2x - 1 < \frac{8-x}{2}$ b) $\frac{4x-3}{2} > \frac{2-x}{3}$ c) $\frac{2}{3}(2z-1) - \frac{2}{5}z \leq 4$

5. Zgjidheni mosbarazimin me parametër
   a) $x + 3m \geq 9$, $m$ është parametër real b) $a^2x < ax - a^2x$, $a$ është parametër real

7. Reaksioni i neutralizimit kryhet midis bazës dhe acidit. Heqja e acidit të rrezikshëm në bateritë e makinave kryhet me ndihmën e hidroksid natriumit. Një bateri e re e makinës përmban më pak se 600 gramë acid. Për neutralizimin e plotë të 5 gramëve acid baterie nevojiten 4 gramë hidroksid natriumi. Sa gramë hidroksid natriumi nevojiten për neutralizimin e plotë të acidit të baterisë në një bateri?

8. Maria heq fundërrinën nga xhezveja elektrike duke përdorur uthull. Shtresa e fundërrinës është 2 milimetra dhe mbulon një sipërfaqe prej 8000 milimetrash katrorë. Për heqjen e një centimetri kub fundërrinë nevojiten 10 mililitra uthull. Sa mililitra uthull më së shumti i nevojiten Marisë?

9. Filipi duhet të ngrejë 5 thasë me ngjitëse, secila prej 25 kilogramësh, në një lartësi prej 20 metrash. Sa xhaul është puna minimale që Filipi do të kryejë për të transportuar shportat? Barazimi për punën e kryer është $A = F \cdot s$, ku $A$ është puna e kryer, $F = m \cdot g$ është pesha e shportave ku $m$ është masa e shportës dhe g është nxitimi i rënies së lirë ($g = 10$ metra në sekondë në katrorë) dhe $s$ është rruga e përshkuar.

# DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM

1. Vizatoni në rrafshin koordinativ pikën:

   a) $A(-2, 4)$ b) $B(5, 4)$ c) $C(0,3)$ ç) $D(5, 0)$

   d) $E(-6, 0)$ dh) $F(-2, -3)$ e) G(1, −3) ë) $H(0, -1)$

   dhe përcaktoni në cilin kuadrant ose në cilin bosht ndodhet.

2. Vizatoni pikat T(0, −2), U(1, 3), V(6, 4), W(5, −1) në rrafshin koordinativ dhe kontrolloni nëse katërkëndëshi TUVW është romb.

3. Trekëndëshi ABC ka kulmet

   a) $A(1, 1)$, $B(5, 1)$ dhe $C(5, 7)$ b) $A(1, 2)$, $B(5, 2)$ dhe $C(5, 5)$.

   Tregoni nëse trekëndëshi ABC është kënddrejtë, dhe pastaj njehsoni perimetrin e tij.

4. Dy grimca me masa të barabarta ndodhen në pikat (1,3) dhe (7,9). Gjeni koordinatat e qendrës së masës?

5. Pikat A(1, 2), B(5, 2), C(5, 5) dhe D(1, 5) janë kulme të një paralelogrami. Njehsoni syprinën e paralelogramit $A_1B_1C_1D_1$, nëse $A_1$, $B_1$, $C_1$ dhe $D_1$ janë pikat e mesit të brinjëve AB, BC, CD dhe DA, përkatësisht.

6. Ana krijoi një aplikacion celular. Ditën e parë aplikacionin e shkarkuan 40 përdorues, dhe çdo ditë pasuese aplikacionin e shkarkojnë 25 përdorues të rinj.

   a) Shkruani funksionin që përshkruan numrin e shkarkimeve në varësi të kohës.

   b) Shqyrtoni ecurinë dhe skiconi grafikun e funksionit.

7. Dy makina lëvizin nga pika A në pikën B në një distancë prej 400 metrash. Makina e parë lëviz në mënyrë të njëtrajtshme me shpejtësi 20 metra në sekondë. Makina e dytë niset nga prehja nga pika A dhe lëviz me përshpjetim të njëtrajtshëm me nxitim 2 metra në sekondë në katror.

   a) Shkruani funksionin që përcakton rrugën e përshkuar të makinës së parë.

   b) Shkruani funksionin që përcakton rrugën e përshkuar të makinës së dytë.

   c) Vizatoni grafikët e të dy funksioneve në të njëjtin sistem koordinativ. Çfarë vëreni?

   d) Sa kohë do t'i duhet makinës së parë, dhe sa makinës së dytë për të përshkuar rrugën midis pikave A dhe B?

**8.** Një substancë radioaktive ka masë 100 gramë. Çdo vit masa e saj zvogëlohet për 75%.

a) Gjeni sasinë e substancës pas 5 vitesh.

b) Shkruani funksionin që modelon sasinë e substancës në lidhje me kohën në vite.

c) Vizatoni grafikun e sasisë së substancës në lidhje me kohën në vite..

Zgjidhni barazimet:

**9.** a) $7(x-3)=4(x+5)-47$

b) $16-9(3-u)+4u=15$

c) $(w-1)(w-2)=(w+3)(w-4)-3(w-1)$

**10.** a) $\frac{4y-3}{y+2}=\frac{7y-2}{y-5}-3$ b) $\frac{7}{x-1}=\frac{9}{x-2}-\frac{2}{x-3}$ c) $\frac{x}{2}+\frac{3}{4}=2\left(x+\frac{1}{4}\right)$

**11.** Zgjidheni barazimin me parametër:

a) $ax-bx=b-ax$ b) $(y-a)(y-b)=y^2-a^2$ c) $\frac{ax-b}{b}-\frac{bx-a}{a}=a-b$

**12.** Një laborator ka një rezervuar uji i cili fillimisht përmban 500 litra ujë të pastër. Çdo orë, laboratori shfrytëzon 35 litra ujë për eksperimente. Pas sa orësh në rezervuar do të mbeten vetëm 290 litra ujë?

**13.** Tri tuba, secili veçmas, mund të mbushin një pishinë për 10, 12 dhe 15 orë. Për sa orë ata do ta mbushin pishinën së bashku?

**14.** Gjeni vlerën e parametrit c të barazimit linear $2x-7y=c$, ashtu që grafiku i tij të kalojë nëpër pikën B(1,-1)?

**15.** Me ndihmën e transformimeve ekuivalente sillni në formën e përgjithshme barazimin $\frac{x+5}{3}-\frac{y+3}{5}-1=0$, dhe pastaj shkruani bashkësinë e zgjidhjeve të tij.

**16.** Në bashkësinë e zgjidhjeve të barazimit $5(x-y)+2=3x-2y+1$ përcaktoni atë zgjidhje për të cilën $x=2y$.

**17.** Zgjidheni grafikisht sistemin e dy barazimeve lineare me dy të panjohura:

a) $\begin{cases}x+3y=6\\2x+6y=8\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x-3y=1\\5x+12y=12\end{cases}$ c) $\begin{cases}3x+y=7\\2x-3y=1\end{cases}$

**18.** Me metodën e zëvendësimit zgjidheni sistemin e dy barazimeve lineare me dy të panjohura

a) $\begin{cases}(2x-3):(y+5)=3:4\\(5x-4):(3y+1)=5:2\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y=-3\\\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y=-6\end{cases}$ c) $\begin{cases}x+a=by\\x+b=ay\end{cases}$, $a$ dhe $b$ janë parametra realë

**19.** Me metodën e koeficientëve të kundërt zgjidheni sistemin e dy barazimeve lineare me dy të panjohura:

a) $\begin{cases}\frac{5x-4}{3}+\frac{3y+1}{4}x+y\\\frac{7x-2}{6}+\frac{8y+1}{9}=x-y\end{cases}$ b) $\begin{cases}a(x+y)-b(x-y)=2a^2\\(a^2-b^2)(x-y)=4a^2b\end{cases}$, $a$ dhe $b$ janë parametra realë.

**20.** Këndi në kulmin e një trekëndëshi barakrahës është 14 herë më i vogël se këndi në bazë. Njehsoni madhësinë e këndeve në trekëndësh.

**21.** Katër shokë duan të blejnë një top futbolli. I pari dha gjysmën e shumës, i dyti dha një të tretën e shumës së tre të tjerëve, i treti dha një të katërtën e shumës së tre të tjerëve dhe i katërti dha 50 denarë. Sa denarë kushton topi?

**22.** Nëse në 8 litra ujë të nxehtë shtohen 2 litra ujë më të ftohtë do të fitohet ujë në temperaturë prej 66 °C, ndërsa nëse në 7 litra ujë të nxehtë shtohen 3 litra ujë më të ftohtë do të fitohet ujë në temperaturë prej 59 °C. Sa është temperatura e ujit të nxehtë, dhe sa e ujit më të ftohtë?

**23.** Një aeroplan distancën nga Shkupi në Milano prej 1072 kilometrave me erë në kahje të volitshme e përshkon për 4 orë, ndërsa distancën nga Milano në Berlin prej 848 kilometrave me erë në kahje të kundërt (pavolitshme) e përshkon me të njëjtën shpejtësi e përshkon gjithashtu për 4 orë. Gjeni shpejtësinë e aeroplanit dhe shpejtësinë e erës.

**24.** Tijana bleu dy bileta për të rritur dhe tri bileta për fëmijë për transport me anije. Pagoi gjithsej 8800 denarë. Blerim bleu tri bileta për të rritur dhe dy bileta për fëmijë për transport me të njëjtën anije. Pagoi gjithsej 9700 denarë. Sa kushton një biletë për transport të të rriturve, dhe sa për transport të fëmijëve?

**25.** Zgjidhni mosbarazimet:

a) $3(x-3)+2<6x-1$ b) $\frac{4x-3}{6} \leq \frac{x-1}{2}$ c) $\frac{7x-8}{3} \geq \frac{1-x}{4}$

ç) $\frac{x+3}{3} - \frac{3x+1}{2} > 0$ d) $\frac{1-x}{2} + \frac{3-x}{4} < 2$ dh) $2m-3x<mx+4$, $m$ është parametër real.

**26.** Marko kishte 700 denarë. Gjeni numrin maksimal të ëmbëlsirave që mund t'i blejë nga ëmbëltorja, nëse çmimi i një ëmbëlsire është 55 denarë.

**27.** Mozaiku i fazanit nga lokaliteti antik Stobi ka përmasa 160 centimetra gjatësi dhe 75 centimetra gjerësi. Nëse copa më e madhe në mozaik ka sipërfaqe 3 centimetra katrorë, dhe copa më e vogël ka sipërfaqe 1.5 centimetra katrorë, sa është numri më i vogël dhe më i madh i copave që përmban mozaiku?

**28.** Një telefon inteligjent ka një aparat fotografik me të cilin bëhen foto me madhësi 48 megabajt. Telefoni ka kujtesë 6 gigabajt. Cili është numri më i madh i fotove që mund të ruhen në telefon?

## Tema 4:

# GJEOMETRIA

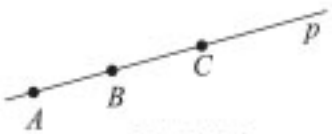
### Me shtjellimin e kësaj teme do të aftësoheni:

1. të përdorni njohuritë për të zgjidhur probleme STEM;
2. të aplikoni njohuritë për sinus, kosinus, tangjent dhe kotangjent në zgjidhjen e problemeve nga konteksti real;
3. të përdorni vetitë e formave 2D në zgjidhjen e problemeve;
4. të zgjidhni ushtrime të ngjashmërisë në situata reale.

# 4.1. Vektori. Drejtimi, kahja dhe madhësia e vektorit

Në vizatimin 1 jepet drejtëza $p$ në rrafsh dhe tri pika të ndryshme A, B dhe C që ndodhen në të. Mendoni dhe tregoni cilët nga pohimet më poshtë janë të saktë:

a) pika B e ndanë drejtëzën $p$ në dy gjysmëdrejtëza
b) gjysmëdrejtëzat BA dhe BC kanë kahje të kundërt
c) gjysmëdrejtëzat BA dhe AC kanë kahje të kundërt
ç) gjysmëdrejtëzat AC dhe BC kanë kahje të njëjtë
d) gjysmëdrejtëzat AB dhe BC kanë kahje të njëjtë



Vizatimi 1

Le të shqyrtojmë dy gjysmëdrejtëza që shtrihen në të njëjtën drejtëz (nënbashkësi të së njëjtës drejtëz), pra kanë **të njëjtin drejtim**. Nëse njëra gjysmëdrejtëz është nënbashkësi e tjetrës, themi se ato kanë kahje të njëjtë; përndryshe kanë kahje të kundërt.

## DETYRA 1

Duke përdorur pikat A, B dhe C të drejtëzës $p$ (vizatimi 1) si skaje, shkruani të gjitha segmentet që fitohen. Përcaktoni numrin e tyre.

## DETYRA 2

Duke përdorur pikat A, B dhe C të drejtëzës $p$ (vizatimi 1) si skaje, shkruani të gjitha segmentet e orientuara që fitohen. Përcaktoni numrin e tyre dhe krahasoni me numrin e fituar te detyra 1.

Me "**vektor**" nënkuptojmë segment të orientuar. Nëse skajet e segmentit të orientuar janë A dhe B dhe kahja është nga A te B, atëherë për vektorin përkatës shkruajmë $\overrightarrow{AB}$ ose $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ (vizatimi 2).



Vizatimi 2

## DETYRA 3

Jepen katër pika të ndryshme A, B, C dhe D. Shkruani të gjithë vektorët që mund të formohen me këto pika.

Çdo vektor $\overrightarrow{AB}$ përcaktohet nga:

- **madhësia** e barabartë me gjatësinë e segmentit AB
- **drejtimi** i përcaktuar nga drejtëza AB
- **kahja** nga pika A drejt pikës B (kahja e gjysmëdrejtëzës AB)

Madhësinë e vektorit do ta quajmë edhe **gjatësia e vektorit** (intensiteti ose moduli i vektorit). Shënimi: $|\overrightarrow{AB}|$ ose $|\vec{d}|$.

Vektori me gjatësi 1 quhet **vektor njësi.**
Vektori me gjatësi 0 quhet **vektori zero.**

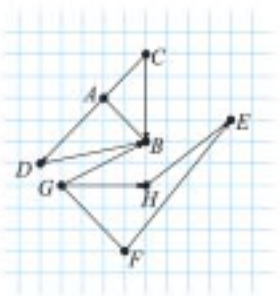
## DETYRA 4

Skiconi vektorin $\vec{a}$, ashtu që:
a) $|\vec{a}|=3$ cm, b) $|\vec{a}|=1$ cm, c) $|\vec{a}|=0$ cm.

## DETYRA PËR USHTRIME

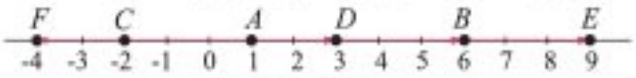
1. Shkruani të gjitha segmentet dhe vektorët që shihen në vizatimin 3.

2. Duke përdorur skemën katrore, duke marrë gjatësinë e brinës së katrorit të skemës 1 cm, përcaktoni gjatësinë e të gjithë segmenteve dhe vektorëve nga detyra 1.



Vizatimi 3

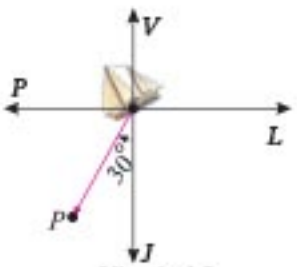
3. Në boshtin numerik janë dhënë pika si në vizatimin 4.
Përcaktoni gjatësinë e: a) $\overrightarrow{AD}$, b) $\overrightarrow{CF}$, c) $\overrightarrow{BE}$, ç) $\overrightarrow{DB}$, d) $\overrightarrow{AB}$ dhe dh) $\overrightarrow{FE}$.



Vizatimi 4

4. Për secilën nga madhësitë e dhëna përcaktoni nëse është madhësi vektoriale:
a) 10 km/h, b) 10 N, c) 50 m/s drejt jugut, ç) 15 g/cm³.

5. Nëse drejtimet e botës shënohen si në vizatimin 5, si paraqitet ndryshimi i trajektores së anijes për 30° drejt jugperëndimit?



Vizatimi 5

**HULUMTIM**

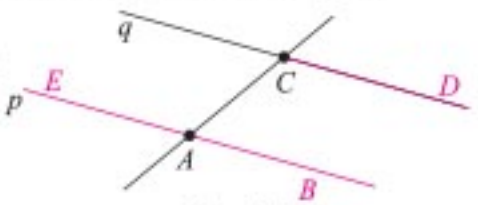
Së bashku me shokun e bankës merrni nga një pe me gjatësi të njëjtë, lidhni me të një objekt të lehtë dhe vendoseni mbi bankë. Së pari secili veçmas ta tërheqë objektin. Çfarë vëreni? Pastaj ta tërhiqni njëkohësisht. Çfarë vëreni? A ndryshon lëvizja e objektit? Pse?

Jepni shembuj të madhësive vektoriale dhe përpiquni t'i skiconi se si do të paraqiten me vektorë.

# 4.2. Vektorët e barabartë dhe të kundërt. Vektorët kolinearë

Në vizatimin 1 janë dhënë dy drejtëza paralele $p$ dhe $q$. Shikoni gjysmëdrejtëzat $AB$, $CD$ dhe $AE$ me origjinë në pikat A dhe C. Mendohuni dhe tregoni se cilat nga pohimet më poshtë janë të sakta:

a) Drejtëza $AC$ e ndan rrafshin në dy gjysmërrafshe
b) Gjysmëdrejtëzat $AB$ dhe $CD$ shtrihen në një gjysmërrafsh të njëjtë
c) Gjysmëdrejtëzat $AE$ dhe $CD$ shtrihen në gjysmërrafshe të ndryshme
ç) Gjysmëdrejtëzat $AB$ dhe $CD$ kanë të njëjtin drejtim
d) Gjysmëdrejtëzat $AE$ dhe $CD$ kanë të njëjtin drejtim



Vizatimi 1

Nëse jepen dy drejtëza paralele dhe mbi to dy gjysmëdrejtëza, atëherë:
- nëse gjysmëdrejtëzat janë nënbashkësi të të njëjtit gjysmërrafsh, themi se ato kanë **të njëjtin kah**;
- përndryshe themi se ato kanë **kah të kundërt**.

Kahu përcaktohet vetëm nëse gjysmëdrejtëzat kanë të **njëjtin drejtim**.

Vektorët që kanë të njëjtin drejtim quhen **kolinearë**.

Vektori zero ka të njëjtin drejtim dhe të njëjtin kah me çdo vektor.

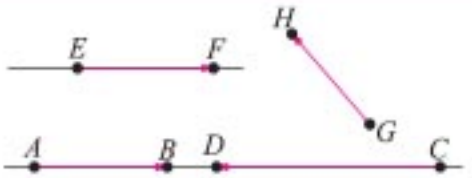
Dy vektorë $\vec{AB}$ dhe $\vec{DC}$ themi se kanë:
- të njëjtën madhësi, nëse $\overline{AB} = \overline{CD}$, dhe shkruajmë $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$,
- të njëjtin drejtim, nëse $AB$ dhe $CD$ janë drejtëza paralele ose puthiten, dhe shkruajmë $\vec{AB} \| \vec{CD}$,
- kahje të njëjtë, nëse gjysmëdrejtëzat $AB$ dhe $CD$ kanë kahje të njëjtë, dhe shkruajmë $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{CD}$,
- kahje të kundërt, nëse gjysmëdrejtëzat $AB$ dhe $CD$ kanë kahje të kundërt, dhe shkruajmë $\vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{CD}$.

Për dy vektorë $\vec{AB}$ dhe $\vec{CD}$ themi se **janë të barabartë** $(\vec{AB} = \vec{CD})$ nëse kanë të njëjtën madhësi, të njëjtin drejtim dhe kahje të njëjtë.

Për dy vektorë $\vec{AB}$ dhe $\vec{CD}$ themi se **janë të kundërt** $(\vec{AB} = -\vec{CD})$ nëse kanë të njëjtën madhësi, të njëjtin drejtim, por kahje të kundërt.

## SHEMBULLI 1

Në vizatimin 2 janë paraqitur dy drejtëza paralele. Vektorët $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ dhe $\overrightarrow{EF}$ janë kolinearë ndërmjet veti, ndërsa vektori $\overrightarrow{GH}$ nuk është kolinear me asnjërin prej tyre. Vektorët $\overrightarrow{EF}$ dhe $\overrightarrow{CD}$ kanë kahje të kundërt, por nuk janë vektorë të kundërt me njëri-tjetrin.



Vizatimi 2

## DETYRA 1

Në vizatimin 3 janë dhënë disa vektorë. Përcaktoni:

a) cili vektor ka gjatësinë më të madhe

b) cili vektor ka gjatësinë më të vogël

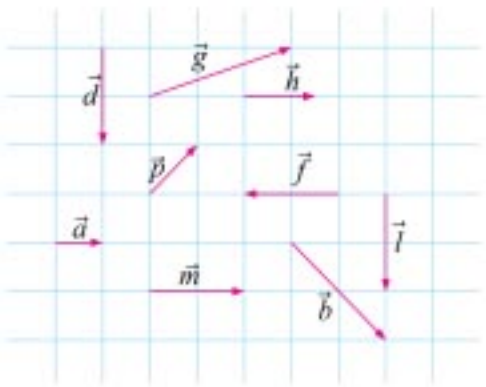
c) cilët vektorë janë vektorë njësi

ç) cilët vektorë kanë gjatësi 2

d) cilët vektorë janë kolinearë

dh) cilët vektorë janë të barabartë

e) cilët vektorë janë të kundërt



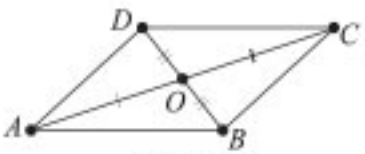
Vizatimi 3

## DETYRA 2

Le të jetë ABCD paralelogram dhe O pika e prerjes së diagonaleve të tij (vizatimi 4). Shënoni dhe përcaktoni marrëdhënien për çiftet:

a) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$

ç) $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}$ d) $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}$



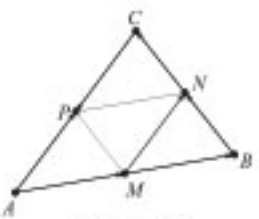
Vizatimi 4

## DETYRA PËR USHTRIME

**1.** Le të jetë ABC trekëndësh dhe M, N, P pikat e mesit të brinjëve AB, BC, CA, respektivisht (vizatimi 5). Cilat nga barazitë më poshtë janë të sakta?

a) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CP}$, b) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BN}$, c) $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM}$,

ç) $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{BN}$, d) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MN}$?

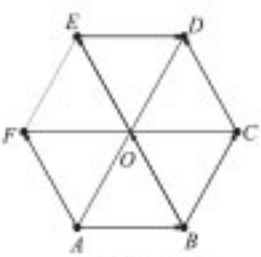


Vizatimi 5

**2.** Le të jetë ABCDEF gjashtëkëndësh i rregullt dhe O qendra e rrethit të jashtëshkruar (vizatimi 6). Cilat nga barazitë më poshtë janë të sakta?

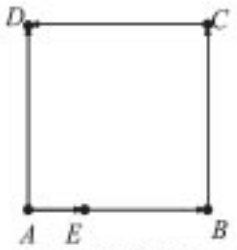
a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$, b) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC}$,

c) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{OE}$, ç) $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OE}$?



Vizatimi 6

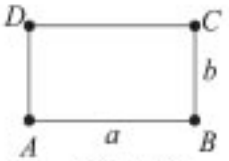
3. Në brinjët e katrorit ABCD janë dhënë disa vektorë (vizatimi 7). Tregoni cilët prej tyre janë:
   a) kolinearë, b) me kahje të njëjtë,
   c) të barabartë, ç) të kundërt.



Vizatimi 7

4. Cilët nga pohimet e mëposhtëm janë të saktë:
   a) Nëse dy vektorë janë kolinearë, atëherë janë të barabartë.
   b) Nëse dy vektorë janë të barabartë, atëherë janë kolinearë.
   c) Nëse dy vektorë janë kolinearë dhe kanë gjatësi të barabarta, atëherë janë të barabartë.
   ç) Nëse dy vektorë kanë kahje të njëjtë dhe gjatësi të barabarta, atëherë janë të barabartë.

5. Jepet një drejtkëndësh me brinjë $a = 2$ cm dhe $b = 1$ cm, si në vizatimin 8. Në brinjët e drejtkëndëshit shënoni vektorë që janë:
   a) të barabartë me $\vec{BC}$, b) të kundërt me $\vec{AD}$,
   c) të barabartë me $\vec{AB}$, ç) të kundërt me $\vec{CD}$, d) vektorë njësi.



Vizatimi 8

**HULUMTIM**

Vizatoni katrorin ABCD me brinjë 2 cm. Shëno të gjithë vektorët përgjatë brinjëve dhe diagonaleve të tij. Shkruaj çifte vektorësh që janë:

a) të barabartë, b) të kundërt, c) kolinearë.

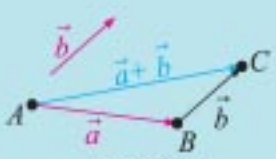
Pastaj kontrollo përgjigjet me një program gjeometrik.

# 4.3. Veprimet me vektorë

## Mbledhja e vektorëve

Le të jenë $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ vektorë jokolinearë në rrafsh dhe $\vec{a} = \vec{AB}$. Ndërto një drejtëz që kalon nëpër pikën $B$ dhe është paralele me drejtëzën e përcaktuar nga vektori $\vec{b}$. Shëno vektorin $\vec{BC} = \vec{b}$. Në këtë mënyrë mund të vendosim gjithmonë vektorët kokë-me-bisht.

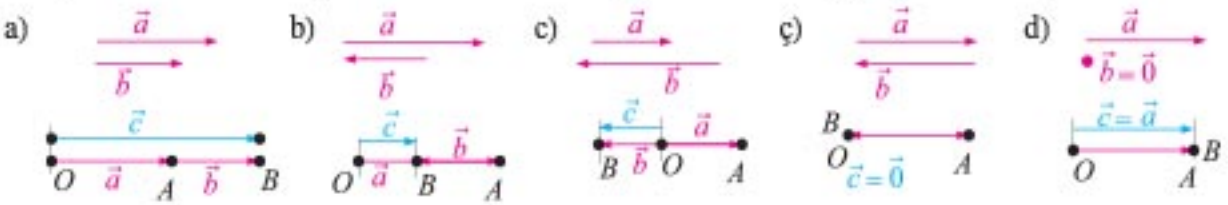
**Shuma e vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$** quhet vektori $\vec{AC}$, domethënë vektori që nis në fillimin e $\vec{a}$, dhe mbaron në fundin e $\vec{b}$. Shumën e $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ e shënojmë me $\vec{a} + \vec{b}$, pra $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$, vizatimi 1.
Kjo mënyrë e mbledhjes quhet rregulli i trekëndëshit.



Vizatimi 1

Le të jepen dy vektorë kolinearë $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$. Rastet e mundëshme janë (vizatimi 2):

1. ata kanë kahje të njëjtë; atëherë shuma e tyre është një vektor me gjatësi baras me shumën e gjatësive të të dy vektorëve dhe me kahje si e tyre, vizatimi 2 a).
2. ata kanë kahje të kundërt dhe gjatësitë janë të ndryshme; atëherë shuma është një vektor me gjatësi baras me diferencën "më i gjati – më i shkurtri", me kahje si e vektorit më të gjatë , vizatimi 2 b) dhe c).
3. ata janë vektorë të kundërt; atëherë shuma është vektori zero, vizatimi 2 ç).
4. njëri është vektor zero; atëherë shuma është e njëjtë me vektorin tjetër, vizatimi 2 d).



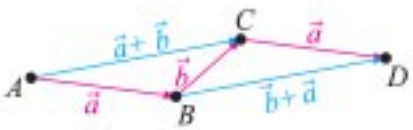

Vizatimi 2

## AKTIVITET

Zgjidh dy vektorë jokolinearë $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$. Bashkangjit vektorin $\vec{b}$ te vektori $\vec{a}$, dhe anasjelltas, bashkangjit vektorin $\vec{a}$ te vektori $\vec{b}$. Përshkruaj çfarë vëren.

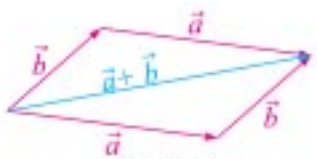
Për çdo dy vektorë $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ vlen $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, pra vlen ligji i komutativ për mbledhjen e vektorëve

Me të vërtetë. Le të jepen vektorët $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ dhe $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ (vizatimi 3). Shuma $\vec{b}+\vec{a}$ fitohet kur fundi i $\vec{b}$ përputhet me fillimin e $\vec{a}$ pra. $\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{BD}$. Atëherë $\overline{AB}=\overline{CD}$ dhe AB dhe CD janë paralele dhe ABCD është paralelogram; prandaj vektorët $\overrightarrow{AC}$ dhe $\overrightarrow{BD}$ kanë të njëjtën madhësi dhe të njëjtin drejtim, si dhe kahje të njëjtë.
Prej këteu kemi se $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}=\vec{b}+\vec{a}$.




Vizatimi 3

**Vërejtje:** Procedura e mësipërme lejon të përcaktohet shuma e $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ përmes ndërtimit të paralelogramit mbi këta vektorë; kjo quhet rregulli i paralelogramit (vizatimi 4).

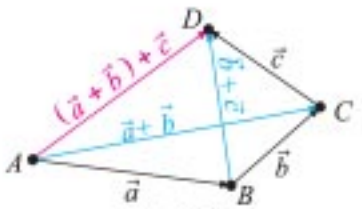



Vizatimi 4

Tani, le të jenë tre vektorë të vendosur njëri pas tjetrit (fundi i të parit perputhet me fillimin e të dytit dhe fundi i të dytit përputhet me fillimin e të tretit), pra $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ dhe $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$ (vizatimi 5). Atëherë $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$ dhe $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$, nga ku del vetia përkatëse e mbledhjes:

Për çdo vektorë $\vec{a}, \vec{b}$ dhe $\vec{c}$ vlen $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ pra vlen ligji i asociativ për mbledhjen e vektorëve.

Nëse $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ dhe $\vec{0}=\overrightarrow{BB}$, atëherë $\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, që do të thotë se vlen vetia:



Vizatimi 5

Për çdo vektor $\vec{a}$ vlen $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}, \vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

Nëse $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, atëherë $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$, d.m.th. $\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. prandaj vlen vetia:

Për çdo vektor $\vec{a}$ vlen $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

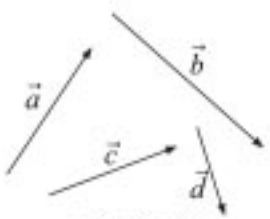
## SHEMBULLI 1

Le të jenë A, B dhe C tri pika në rrafsh.

Vektori $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ është vektor zero. Kjo është e vërtetë sepse sipas rregullit të trekëndëshit kemi: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ dhe $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

## DETYRA 1

Në fletoren tënde, lidh vektorët e dhënë në vizatimin 6, vendosi njëri pas tjetrit dhe gjej shumën e tyre duke përdorur rregullin e trekëndëshit.

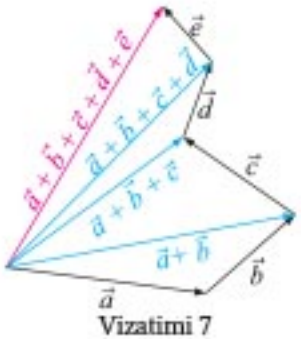


Vizatimi 6

## AKTIVITET

Zgjidh një program gjeometrik, vizato vektorë të ngjashëm si te detyra 1 dhe provo ta zbatosh rregullin e trekëndëshit duke ndryshuar rendin e mbledhësve.

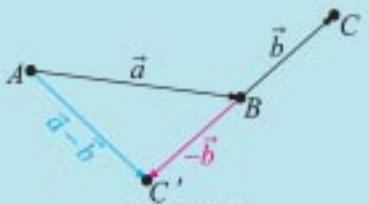
Në përgjithësi, për mbledhjen e $n$ vektorëve, ku $n$ është numër natyror, përdoret rregulli i shumëkëndëshit. Vektorët vendosen njëri pas tjetrit (fundi i të ardhëshmit në fillimin e të mëparshmit) dhe shuma e tyre është vektori që fillon në fillimin e të parit dhe mbaron në fundin e të fundit (vizatimi 7). Së pari merret shuma e dy vektorëve të parë, pastaj ai rezultat mblidhet me vektorin e tretë, e kështu me radhë.



Vizatimi 7

## Zbritja e vektorëve

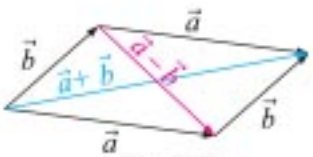
Nëse $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë çfarëdo dy vektorë, **atëherë ndryshimi** $\vec{a}-\vec{b}$ përcaktohet me $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ (vizatimi 8).



Vizatimi 8

Kjo do të thotë se zbritja e vektorëve është mbledhja e njërit vektor me të kundërtin e tjetrit. Sipas kësaj, vlen $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{BC'}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{AC'}$ për çfarëdo tre pika A, B dhe C në rrafsh.

Nëse ndërtojmë një paralelogram mbi dy vektorë, $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$, atëherë vektori $\vec{a}+\vec{b}$ shtrihet në diagonalen që kalon nëpër pikën e tyre të përbashkët të nisjes, ndërsa vektori $\vec{a}-\vec{b}$ shtrihet në diagonalen tjetër (vizatimi 9).



Vizatimi 9

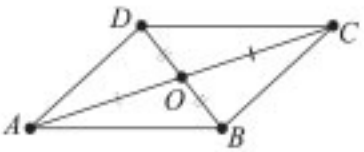
### DETYRA 2

Le të jetë $ABCD$ një paralelogram dhe $O$ pika e prerjes së diagonaleve të tij (vizatimi 10). Thjeshto shprehjet:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CO}$, b) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}$,

c) $\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OA}\right)+\overrightarrow{OC}$, ç) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DO}\right)+\overrightarrow{OA}$,

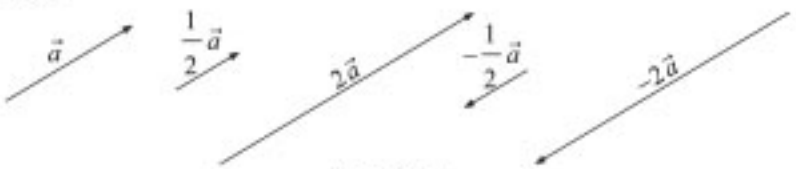
d) $\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$, dh) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BO}$



Vizatimi 10

## Shumëzimi i vektorit me numër (skalar)

Le të jetë $\vec{a}$ vektor dhe $k$ skalar (numër real). Vektori $k\vec{a}$ ka të njëjtin drejtim si $\vec{a}$ dhe gjatësi $|k\vec{a}|=|k|\cdot|\vec{a}|$ dhe nëse $k>0$, vektorët $k\vec{a}$ dhe $\vec{a}$ kanë kah të njëjtë, nëse $k<0$, vektorët $k\vec{a}$ dhe $\vec{a}$ kanë kahje të kundërta. vizatimi 11.



Vizatimi 11

Vektori $k\vec{a}$ quhet prodhimi i vektorit $\vec{a}$ me skalarin $k$.

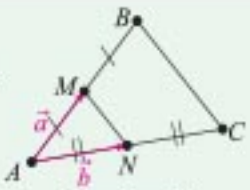
Për shumëzimin e vektorit me skalar vlejnë këto veti:

për çdo vektor $\vec{a}$ dhe skalar $k$ vlejnë $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}, k \cdot \vec{0} = \vec{0}, 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, (-1)\vec{a} = -\vec{a}$
për çdo skalar $k$ dhe $m$ dhe vektor $\vec{a}$ vlejnë $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$ dhe $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$.
për çdo skalar $k$ dhe vektorë $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ vlen $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.
vektorët jozero $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë kolinearë nëse dhe vetëm nëse ekziston skalar $k \neq 0$, i tillë që $\vec{a} = k\vec{b}$. Nëse $k \neq 0$ me $\frac{\vec{a}}{k}$ shënohet vektori $\frac{1}{k}\vec{a}$. Rrjedh se, $\frac{\vec{a}}{k} = \frac{1}{k}\vec{a}$.

## SHEMBULLI 2

Në vizatimin 12 jepen vektorët $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$ dhe $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$ të tillë që $\overline{AM} = \overline{MB}$ dhe $\overline{AN} = \overline{NC}$. Shprehi vektorët $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{NC}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BN}$ me ndihmën e vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$.

Për vektorin $\overrightarrow{BM}$ kemi: $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM} = -\vec{a}$, ngjashëm $\overrightarrow{NC} = \vec{b}$,
a për vektorin $\overrightarrow{MN}$ nga rregulli i trekëndëshit kemi: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\vec{a} + \vec{b}$,
ose $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a}$
po ashtu duke përdorur zbritjen e vektorëve kemi
$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = -\vec{a} - \vec{a} + \vec{b} = -2\vec{a} + \vec{b}$



Vizatimi 12

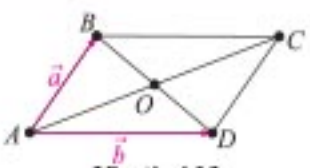
## SHEMBULLI 3

Thjeshto shprehjet:
a) $3\vec{a} + 2(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$, b) $2(\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}) + 4\vec{b} + 5(\vec{c} - \vec{a})$

Duke zbatuar vetitë e shumëzimit të vektorit me skalar fitohet:
a) $3\vec{a} + 2(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = 3\vec{a} + 2\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c} = 5\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}$,
b) $2(\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}) + 4\vec{b} + 5(\vec{c} - \vec{a}) = 2\vec{a} - 4\vec{b} + 6\vec{c} + 4\vec{b} + 5\vec{c} - 5\vec{a} = -3\vec{a} + 11\vec{c}$.

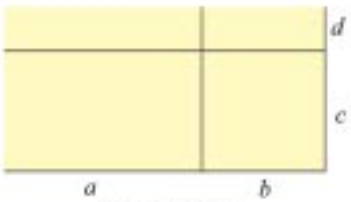
## DETYRA PËR USHTRIME

1. Shprehi vektorët $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC}$ dhe $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}$ me ndihmën e vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$, nëse ABCD është paralelogram si në vizatimin 13.



Vizatimi 13

2. Le të jetë $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ dhe $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$. Sipas vizatimit 14, shprehi me ndihmën e $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ vektorët: $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{CD}$ dhe $\overrightarrow{ED}$.



Vizatimi 14

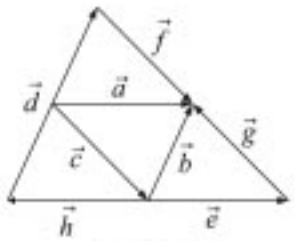
3. Është dhënë gjashtëkëndëshi i rregullt ABCDEF dhe O është qendra e rrethit të jashtashkruar. Le të jetë $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ dhe $\overrightarrow{AF} = \vec{a}$. Shprehi me $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ vektorët: $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CE}$ dhe $\overrightarrow{CF}$.

4. Diagonalet e paralelogramit ABCD priten në pikën S. Verifiko nëse vlejnë barazitë:
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{DS}$, b) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{SC}$, c) $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{DS} = \vec{0}$.

5. Thjeshto shprehjen $2\left(\vec{a} - \vec{b}\right) - 5\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + 2\vec{a} + 6\vec{b}$.

6. Në çfarë pozite të ndërsjellë ndodhen pikat A, B dhe C nëse vlen $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$?

7. Me rregullin e trekëndëshit gjej shumën e vektorëve $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f} + \vec{g} + \vec{h}$, vizatimi 15.



Vizatimi 15

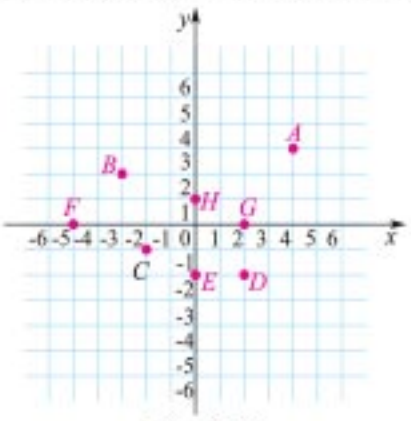
**HULUMTIM**

Në një program gjeometrik, vizato një katërkëndësh konveks të çfarëdoshëm ABCD. Shenjo meset M, N, P dhe Q të brinjëve AB, BC, CD dhe DA, përkatësisht. Kontrollo çfarë marrëdhënie kanë çiftet e vektorëve $\overrightarrow{MN}$ dhe $\overrightarrow{QP}$, si edhe $\overrightarrow{MQ}$ dhe $\overrightarrow{NP}$. Çfarë mund të thuash për katërkëndëshin MNPQ?

## 4.4. Koordinatat e vektorit

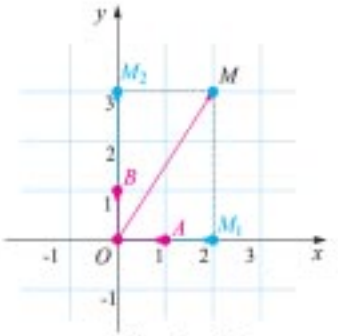
**AKTIVITET**

Gjej koordinatat e pikave A, B, C, D, E, F, G dhe H të dhëna në sistemin koordinativ në vizatimin 1.



Vizatimi 1

Është dhënë një sistem koordinativ dhe pikat A(1,0) dhe B(0,1). Vektorët $\overrightarrow{OA}$ dhe $\overrightarrow{OB}$ janë vektorë njësi përgjatë boshteve koordinative, ku O(0,0) është origjina (vizatimi 2). Le të jetë dhënë pika M(2,3). Duke përdorur mbledhjen e vektorëve dhe shumëzimin e vektorit me skalar, fitojmë
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$.



Vizatimi 2

Nëse M(x,y) është një pikë në sistemin koordinativ, atëherë $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, ku A(1,0), B(0,1) dhe O(0,0) është origjina.
Më tej, nëse $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ dhe $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$, atëherë $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ pra $\overrightarrow{OM} = (x, y)$. Vektorët $\vec{i}$ dhe $\vec{j}$ quhen vektorët njësi të sistemit koordinativ.

Çdo vektor që ka fillimin në origjinë quhet rreze vektor i pikës M (vektor pozicioni).

## DETYRA 1

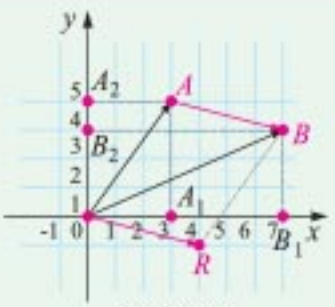
Shkruaj vektorët $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OG}$ dhe $\overrightarrow{OH}$, sipas koordinatave të pikave në vizatimin 1; pastaj gjej gjatësitë e tyre.

Nëse $M(x,y)$ është pikë në sistemin koordinativ, atëherë $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

## SHEMBULLI 1

Në sistemin koordinativ jepen pikat A(3,4) dhe B(7,3) (vizatimi 3).

Të gjenden koordinatat e vektorit $\overrightarrow{AB}$. Nga
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ del $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ pra
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 7\vec{i} + 3\vec{j} - (3\vec{i} + 4\vec{j}) = (7-3)\vec{i} + (3-4)\vec{j}$.
Rrjedhimisht, $\overrightarrow{AB} = (7-3, 3-4) = (4, -1)$, dhe gjatësia e tij është
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(7-3)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$.
Pika $R(4, -1)$ përcakton rreze vektorin $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{AB}$.



Vizatimi 3

Pra, vektori $\overrightarrow{OR}$ quhet rreze vektor për $\overrightarrow{AB}$.



Nëse $M(x_1, y_1)$ dhe $N(x_2, y_2)$ janë dy pika në sistemin koordinativ, atëherë $\overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, dhe gjatësia e tij është $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Në këtë mënyrë, çdo vektor $\overrightarrow{AB}$ me skaje A dhe B të dhëna me koordinata mund të shkruhet me koordinata dhe të përcaktohet rreze vektori $\overrightarrow{OR}$ i vektorit $\overrightarrow{AB}$.

### SHEMBULLI 2

Le të jenë pikat $P(-3, -5)$, $Q(7, -8)$. Gjej rreze vektorin e $\overrightarrow{PQ}$.

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{PQ} = (7-(-3), -8-(-5)) = (10, -3)$

### DETYRA 2

Gjej vektorin $\overrightarrow{OB}$, nëse $\overrightarrow{OA} = (3,5)$ dhe $\overrightarrow{AB} = (1,7)$.



Dy vektorë $\vec{a} = (a_1, a_2)$ dhe $\vec{b} = (b_1, b_2)$ janë të barabartë, pra $\vec{a} = \vec{b}$, vetëm dhe vetëm nëse $a_1 = b_1$ dhe $a_2 = b_2$.

### SHEMBULLI 3

Le të jetë $\vec{a} = (k + m, 11)$ dhe $\vec{b} = (3, k - m)$ dhe $\vec{a} = \vec{b}$.

Atëherë $\begin{cases} k + m = 3 \\ k - m = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 7 \\ m = -4 \end{cases}$.



Le të jetë $\vec{a} = (a_1, a_2)$ dhe $\vec{b} = (b_1, b_2)$ dhe $k$ skalar (numër real). Atëherë $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$ dhe $k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_1, k \cdot a_2)$.

**Shënim.** Për veprimet mbledhje/zbritje vektorësh dhe shumëzim të vektorit me skalar, kur vektorët jepen me koordinata, vlejnë të njëjtat veti si kur jepen gjeometrikisht.

### DETYRA 3

Jepen pikat $A(3,-5)$, $B(12,5)$ dhe $C(-1,7)$. Gjej $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$ dhe $3 \cdot \overrightarrow{BC} - 2 \cdot \overrightarrow{AC}$.

### SHEMBULLI 4

Le të jenë $P(k,-1)$, $Q(2,4)$ dhe $R(5,3k)$. Gjej vlerën e $k$, nëse $\left|\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PQ}\right|=5$.

Meqenëse $\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QR}=(3,3k-4)$, kemi $\sqrt{3^2+(3k-4)^2}=5$ pra $9+(3k-4)^2=25$ nga ku del $(3k-4)^2=16$, fitojmë $3k-4=4$ ose $3k-4=-4$, domethënë $k=\frac{8}{3}$ ose $k=0$.

### DETYRA PËR USHTRIME

1. Le të jenë $\overrightarrow{OA}=-5\vec{i}+3\vec{j}$ dhe $\overrightarrow{AB}=7\vec{i}-\vec{j}$. Gjej $\overrightarrow{OB}$.
2. Le të jenë $\overrightarrow{BA}=(2,-3)$ dhe $\overrightarrow{BC}=(-3,1)$. Gjej $\overrightarrow{AC}$.
3. Le të jenë $\overrightarrow{OP}=5\vec{i}-3\vec{j}$, $\overrightarrow{OQ}=\vec{i}-6\vec{j}$ dhe $\overrightarrow{OR}=\vec{i}-\vec{j}$. A shtrihen pikat P, Q dhe R në të njëjtën drejtëz?
4. Le të jenë $\vec{a}=2\vec{i}+k\vec{j}$ dhe $\vec{b}=(m,-5)$. Gjej vlerat e $k$ dhe $m$, nëse $2\vec{a}+\vec{b}=8\vec{i}-3\vec{j}$.

**HULUMTIM**

Përdor një program gjeometrik ku zgjedh dy pika A dhe B, pastaj vizato pikën C me koordinata të barabarta me koordinatat e vektorit $\overrightarrow{AB}$. Vëzhgo vektorët $\overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{OC}$. Shkruaj çfarë vure re. Përsërite për dy pika të reja dhe shëno vërejtjet.

## 4.5. Zbatimi i vektorëve

**HULUMTIM**

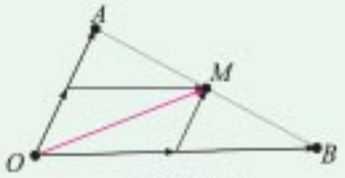
Vektorët kanë përdorim të gjerë në teknikë, fizikë, matematikë dhe në shkenca të tjera.
Bëj një hulumtim me të cilin e vërteton këtë pohim.

### SHEMBULLI 1

Le të jetë M pika e mesit e segmentit $AB$ dhe $O$ një pikë e çfarëdoshme në rrafsh. Vërteto se $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

Vektori $\overrightarrow{OM}$ mund të fitohet si shumë në dy mënyra: $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$ dhe $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}$, (vizatimi 1). Nëse i mbledhim këto barazi, fitojmë:

$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$, $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM})$,
$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \vec{0}$, sepse $\overrightarrow{AM}$ dhe $\overrightarrow{BM}$
janë vektorë të kundërt, domethënë
$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM} = \vec{0}$. Kemi se, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

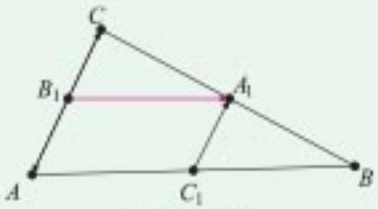


Vizatimi 1

## SHEMBULLI 2

Pikat $A_1$ dhe $B_1$ janë pikat e mesit të brinjëve AC dhe BC të trekëndëshit ABC (vizatimi 2). Vërteto se $\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Sipas rregullit të trekëndëshit kemi: $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{CA_1}$.
ndërsa nga ana tjetër: $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}$.
Duke i mbledhur barazitë, fitohet :
$2\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}$.
$2\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{B_1A}) + (\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{BA_1})$; $\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \vec{0} + \vec{0}$;
$\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



Vizatimi 2

Segmenti $A_1B_1$ quhet vija e mesit në trekëndëshin ABC; ajo është paralele me AB dhe nga $\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ del se $|\overrightarrow{B_1A_1}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$, që do të thotë se vektorët janë kolinearë, pra $\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ dhe $B_1A_1 \| AB$. Kjo do të thotë se vija e mesit ka gjatësi sa gjysma e brinjës me të cilën është paralele.

## SHEMBULLI 3

Le të jenë $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ vektorë jokolinearë dhe $x$ e $y$ numra realë. Nëse $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$, atëherë $x = y = 0$. Vërteto!

Meqenëse $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë jokolinearë, ata nuk janë vektorë zero. Supozo të kundërtën, pra $x \neq 0$. Atëherë nga $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ del se $\vec{a} = -\frac{y}{x}\vec{b}$ që do të thotë se vektorët janë kolinearë. Kjo bie ndesh me supozimin. Në mënyrë analoge fitohet edhe nëse merret supozimi tjetër $y \neq 0$. Prandaj doemos të vlejë $x = y = 0$.

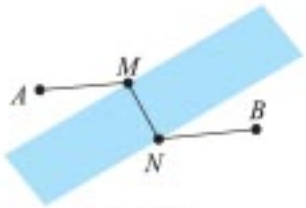
## SHEMBULLI 4

Diagonalet në çdo paralelogram përgjysmohen. Vërteto!

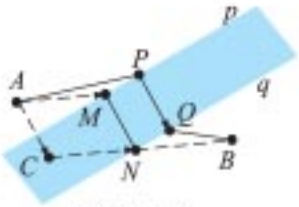
Le të jetë ABCD një paralelogram dhe O pika e prerjes së diagonalëve AC dhe BD. Meqë pikat A, O dhe C janë kolineare, kemi se ekziston një numër real $x$ i tillë që $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AC} = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$. Në mënyrë të ngjashme, ekziston numri real $y$ i tillë që $\overrightarrow{BO} = y\overrightarrow{BD} = y(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$.
Nga ana tjetër $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{AB} + x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = (x-1)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD}$, pra doemos të vlejë
$y(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = (x-1)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD}$ d.m.th. $(x - 1 + y)\overrightarrow{AB} + (x - y)\overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
Vektorët $\overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{AD}$ nuk janë kolinearë, prandaj nga shembulli 3 del se $x - 1 + y = 0$ dhe $x - y = 0$, d.m.th. $x = y = \frac{1}{2}$.

## SHEMBULLI 5

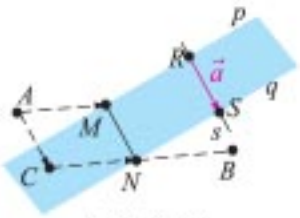
Ndërmjet qyteteve A dhe B ka një lumë me brigje paralele p dhe q. Ku duhet të ndërtohet ura në mënyrë që rruga nga qyteti A në qytetin B të jetë më e shkurtër (vizatimi 3)?



Vizatimi 3



Vizatimi 4



Vizatimi 5

Le të jetë PQ ura e kërkuar (vizatimi 4). Nëse $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ dhe zgjidhet pika C në mënyrë që $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC}$, atëherë katërkëndëshi APQC është paralelogram. Nga kjo del se $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AP}$. Për të qenë rruga nga A në B më e shkurtër, vija e thyer CQB duhet të jetë më e shkurtër, gjë që ndodh kur pikat C, Q dhe B janë kolineare. Pra $\{Q\} = CB \cap q$.

Prandaj ura e kërkuar me pikën M gjendet kështu:

- Konstruktojmë drejtëz $s$ normale mbi drejtëzat p dhe q. Le të jetë $\{R\} = s \cap p$ dhe $\{S\} = s \cap q$ (vizatimi 5).
- Konstruktojmë vektorin $\overrightarrow{AC}$, ku $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{RS}$ dhe le të jetë $\{N\} = BC \cap q$, d.m.th. për pikën M vlen $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{RS}$.

Rruga AMNB është më e shkurtër. Meqë $\overline{MN}$ është konstante, rruga varet vetëm nga gjatësitë e segmenteve AM dhe NB, dhe shuma e tyre është minimale kur pikat C, N dhe B janë kolineare.

## SHEMBULLI 6

Dy vende të banuara A dhe B gjenden në të njëjtën anë të një rruge të drejtë. Ku duhet të vendoset stacioni i autobusit C që shuma $\overline{AC} + \overline{BC}$ të jetë minimale?

Le të jetë M pika e mesit të segmentit $AA_1$, i cili është normal me rrugën dhe $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA_1}$ (vizitimi 6). Atëherë $\Delta AMC$ dhe $\Delta A_1MC$ puthiten prandaj $\overline{AC} = \overline{A_1C}$. Sipas kësaj $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{A_1C} + \overline{BC}$.



Vizatimi 6

Nëse C nuk shtihet në $A_1B$, atëherë nga pabarazia e trekëndëshit del se $\overline{A_1C} + \overline{BC} > \overline{A_1B}$. Nëse C shtrihet në $A_1B$, atëherë $\overline{A_1C} + \overline{BC} = \overline{A_1B}$. Pra $\overrightarrow{A_1C}$ dhe $\overrightarrow{CB}$ janë kolineare. Sipas kësaj, shuma $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{A_1C} + \overline{BC}$ ka vlerë minimale kur pika C është pika e prerjes së rrugës me drejtëzën $A_1B$. Rrjedh se vlera minimale e kërkuar është pika e prerjes së rrugës me drejtëzën $A_1B$, ku $A_1$ është pika simetrike e pikës A në lidhje me rrugën. Pra vlen $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA_1}$.

## AKTIVITET

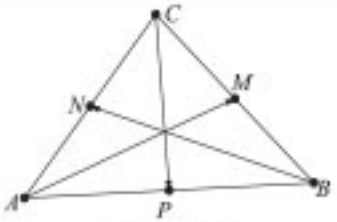
Në vizatimin 3 me $\vec{v}$ është shënuar shpejtësia momentale, kurse me $\vec{a}$ është shënuar përshpejtimi i makinës, d.m.th. forca e rezistencës së ajrit. Shpjego pse këto janë dy madhësi vektoriale dhe shkruaj relacionin që i lidh ato dy vektorë.



Figura 3

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Le të jenë M, N dhe P pikat e mesit të brinjëve të trekëndëshit $ABC$ (vizatimi 7). Vërteto se $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.



Vizatimi 7

2. Le të jetë T pika e rëndesës në $\Delta ABC$. Vërteto se $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$, ku O është një pike e çfarëdoshme në rrafsh.

3. Jepet katrori ABCD dhe S është pika ku priten diagonalet e tij. Le të jenë M dhe N pikat e mesit për brinjët BS dhe DS, përkatësisht. Shprehi vektorët $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{BC}$, me ndihmën e vektorëve $\overrightarrow{AM} = \vec{m}$ dhe $\overrightarrow{AN} = \vec{n}$.

4. Jepet gjashtëkëndëshi i rregullt ABCDEF dhe S është qendra e rrethit të jashtashkruar. Thjeshto vektorët: a) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$, b) $\overrightarrow{SF} + \overrightarrow{AB}$, c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{ES}$, ç) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CS}$.

5. Le të jenë D, E dhe F pikat e mesit të brinjëve BC, AC dhe AB përkatësisht, në $\Delta ABC$. Nëse $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$ dhe $\overrightarrow{AC} = \vec{n}$, atëherë shprehi vektorët $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ dhe $\overrightarrow{CF}$ me ndihmën e vektorëve $\vec{m}$ dhe $\vec{n}$.

6. Me vektorin $\overrightarrow{v_1}$ paraqitet shpejtësia e ujit, me vektorin $\overrightarrow{v_2}$ paraqitet shpejtësia e lëvizjes së kajakut pa veprimin e ujit, ndërsa me $\vec{v}$ paraqitet shpejtësia e kajakut me veprimin e ujit (vizatimi 4). Gjej madhësinë e shpejtësisë $\vec{v}$, nëse $|\overrightarrow{v_1}| = 4$ m/s dhe $|\overrightarrow{v_2}| = 6$ m/s.



Figura 4

### HULUMTIM

1. Fatmiri është kajakist dhe dëshiron të dijë pse lëviz më shpejt me rrjedhën e lumit sesa kundër rrjedhës. Gjithashtu, dëshiron të dijë pse, kur kalon lumin, nuk arrin pikërisht në vendin ku synoi të shkonte me rrema. Çfarë mund t'i përgjigjesh Fatmirit?

2. Hana tërheq një sajë mbi një sipërfaqe të rrafshët. Litarin me të cilin e tërheq formon një kënd 30 shkallë me tokën. Forca me të cilën e tërheq sajën është 20N. Përcakto të gjitha forcat që veprojnë mbi sajën. Vizato një skemë/diagram ku t'i paraqesësh forcat. Përcakto cilat forca kanë kahje të kundërta. Zbërtheje forcën me të cilën Hana e tërheq sajën në komponentën horizontale dhe vertikale. Shpjego si ndikojnë këto forca në lëvizjen e sajës.

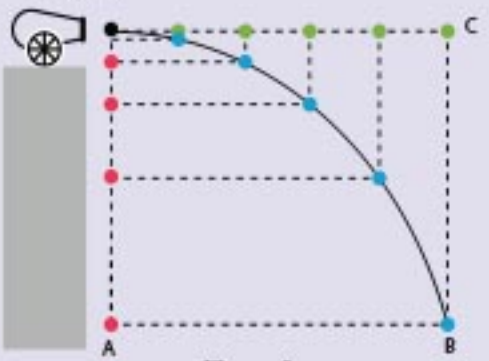


Figura 3

3. Në momentin kur topi lëshon një predhë horizontalisht, një predhë identike lirohet të bjerë vertikalisht poshtë (vizatimi 3). Cila predhë do të arrijë e para në tokë? Shpjego.

# 4.6. Raportet trigonometrike të këndit të ngushtë në trekëndëshin kënddrejtë

Trekëndëshi ABC ka kënd të drejtë (90°) në kulmin C. Dy këndet te kulmet A dhe B janë kënde të ngushta (vizatimi 1). Brinja $AB$ përballë këndit të drejtë quhet **hipotenuzë**. Nëse e shënojmë me α njërin nga këndet e ngushta të trekëndëshit, atëherë brinja BC quhet kateta përballë këndit α, kurse brinja $AC$ quhet kateta e shtrirë për këndin α.



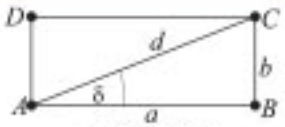
Vizatimi 1

- **Sinusi** i këndit α quhet raporti i gjatësisë së katetës përballë të këndit α, $\overline{BC}$ me gjatësinë e hipotenuzës $\overline{AB}$, d.m.th. $\sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$.
- **Kosinusi** i këndit α quhet raporti i gjatësisë së katetës ku shtrihet këndi α, $\overline{AC}$ me gjatësinë e hipotenuzës $\overline{AB}$, d.m.th. $\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.
- **Tangjenta** e këndit α quhet raporti i gjatësisë së katetës përballë $\overline{BC}$ me gjatësinë e katetës ku shtrihet këndi α, $\overline{AC}$, d.m.th. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$.
- Kotangjenta e këndit α quhet raporti i gjatësisë së katetës ku shtrihet këndi $\overline{AC}$ me gjatësinë e katetës përballë për këndin α, $\overline{BC}$, d.m.th. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

Raportet e përkufizuara më sipër, që japin varësinë ndërmjet gjatësive të brinjëve të një trekëndëshi kënddrejtë dhe këndeve të tij të ngushta, quhen **raporte trigonometrike**.

## SHEMBULLI 1

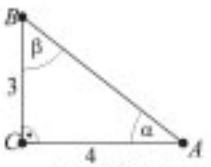
Për raportet trigonometrike të këndit të ngushtë δ në drejtkëndëshin $ABCD$ të vizatimit 2 kemi: $\sin\delta = \frac{b}{d}$, $\cos\delta = \frac{a}{d}$, $\operatorname{tg}\delta = \frac{b}{a}$ dhe $\operatorname{ctg}\delta = \frac{a}{b}$.



Vizatimi 2

## DETYRA 1

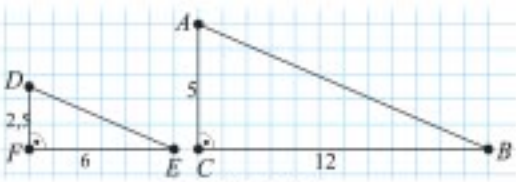
Jepet një trekëndësh kënddrejtë me katete 3 cm dhe 4 cm.
Gjej sin α, cos α, tg α, ctg α, sin β, cos β, tg β dhe ctg β (vizatimi 3).



Vizatimi 3

## DETYRA 2

Jepen dy trekëndësha kënddrejtë ABC dhe DEF (vizatimi 4). Gjej raportet trigonometrike për këndin e ngushtë α në të dy trekëndëshat. Vërteto se ato janë të barabarta.



Vizatimi 4

Nëse dy trekëndësha kënddrejtë kanë të njëjtin raport të brinjëve përkatëse, atëherë ata kanë të njëjtat raporte trigonometrike për këndet e ngushta përkatëse.

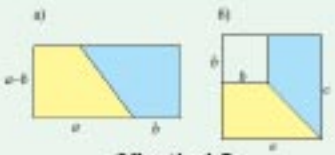
## SHEMBULLI 2

Dihet që në një trekëndësh kënddrejtë vlen $\sin\alpha = \frac{7}{25}$. Gjej raportet e tjera trigonometrike të këndit $\alpha$ (vizatimi 5).

Le t'i shënojmë brinjët e atij trekëndëshi me $a = 7k$, $c = 25k$.

Atëherë, sipas teoremës së Pitagorës $b = \sqrt{(25k)^2 - (7k)^2} = 24k$,

fitojmë $\cos\alpha = \frac{24k}{25k} = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7k}{24k} = \frac{7}{24}$ dhe $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{24k}{7k} = \frac{24}{7}$.



Vizatimi 5

## SHEMBULLI 3

Me kalkulator, krahasoni raportet trigonometrike:

a) $\sin 35°$ dhe $\sin 67°$, b) $\cos 40°$ dhe $\cos 23°$,

c) $\operatorname{tg} 36°$ dhe $\operatorname{tg} 58°$, ç) $\operatorname{ctg} 73°$ dhe $\operatorname{ctg} 39°$.

Me siguri ke vënë re se $\sin 35° < \sin 67°$, $\cos 40° < \cos 23°$, $\operatorname{tg} 36° < \operatorname{tg} 58°$ dhe $\operatorname{ctg} 73° < \operatorname{ctg} 39°$.

Le të jenë trekëndëshat në vizatimin 6 me hipotenuza të barabarta $\overline{OB_1} = \overline{OB_2} = \ldots = \overline{OB_n} = r$. Këndet e ngushta pranë hipotenuzës dhe katetave $OA_1$, $OA_2$, ..., $OA_n$ do i shënojmë me $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_n$.

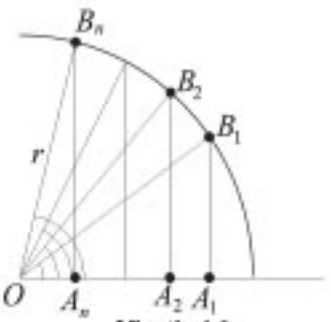
Nga konstruktimi vërehet se $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$, $\overline{A_1B_1} < \overline{A_2B_2} < \ldots < \overline{A_nB_n}$ dhe $\overline{OA_1} > \overline{OA_2} > \ldots > \overline{OA_n}$.

Nga barazitë $\sin\alpha_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{r}$, $\sin\alpha_2 = \frac{\overline{A_2B_2}}{r}$ ..., $\sin\alpha_n = \frac{\overline{A_nB_n}}{r}$ është e qartë se vlera e sinusit të një këndi të ngushtë rritet kur këndi rritet.

Me fjalë të tjera, kur këndi $\alpha$ rritet nga 0° në 90°, vlera e $\sin\alpha$ rritet.

Nga barazitë $\cos\alpha_1 = \frac{\overline{OA_1}}{r}$, $\cos\alpha_2 = \frac{\overline{OA_2}}{r}$, ..., $\cos\alpha_n = \frac{\overline{OA_n}}{r}$ përfundohet se vlera e kosinusit të një këndi të ngushtë bie kur këndi rritet.

Me fjalë të tjera, kur këndi $\alpha$ rritet nga 0° në 90°, vlera e $\cos\alpha$ bie.




Vizatimi 6

Në mënyrë të ngjashme, nga barazitë :

$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}}$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}}$, ..., $\operatorname{tg}\alpha_n = \frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{OA_n}}$

përfundojmë se vlera e tangjentës së një këndi të ngushtë rritet kur këndi rritet, sepse atëherë rriten numëruesit dhe zvogëlohen emëruesit e raporteve. Pra, vlera e $\operatorname{tg}\alpha$ rritet, duke filluar nga 0, dhe është numër real jo negativ, kur vlera e $\alpha$ rritet duke filluar nga 0° dhe është më e vogël se 90°.

Në mënyrë të ngjashme, përfundojmë se vlera e $\operatorname{ctg}\alpha$ bie deri në 0 dhe është numër real jo negativ, kur vlera e $\alpha$ është më e madhe se 0° dhe rritet deri në 90°.

**Shënim.** Për $0° < \alpha < 90°$ kemi se $0 < \sin\alpha < 1$ dhe $0 < \cos\alpha < 1$
Për $0° < \alpha < 90°$ kemi se $\operatorname{tg}\alpha > 0$ dhe për $0° < \alpha < 90°$ kemi se $\operatorname{ctg}\alpha > 0$.

### DETYRA 3

Cila pabarazi vlen për këndet nëse:

a) $\sin\alpha_1 > \sin\alpha_2 > \sin\alpha_3$, b) $\cos\beta_1 < \cos\beta_2 < \cos\beta_3$,

c) $\operatorname{tg}\gamma_2 > \operatorname{tg}\gamma_3 > \operatorname{tg}\gamma_1$, ç) $\operatorname{ctg}\delta_3 < \operatorname{ctg}\delta_1 < \operatorname{ctg}\delta_2$ ?

### DETYRA PËR USHTRIME

1. Përcakto raportet trigonometrike të këndit $\beta$ në një trekëndësh kënddrejtë kur janë dhënë të dy katetat $a$ dhe $b$: a) $a = 5, b = 12$, b) $a = 3, b = 5{,}2$.

2. Përcakto raportet trigonometrike të këndit $\alpha$ në një trekëndësh kënddrejtë kur janë dhënë kateta $a$ dhe hipotenuza $c$: a) $a = 8, c = 10$, b) $a = 9{,}8, c = 12{,}6$.

3. Përcakto funksionet e tjera trigonometrike të këndit $\alpha$ nëse:
   a) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, b) $\cos\alpha = \frac{21}{29}$, c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{52}{173}$, ç) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{69}{269}$.

4. Verifiko nëse pabarazitë janë të sakta:
   a) $\sin 13° > \sin 53° > \sin 88°$, b) $\cos 46° < \cos 22° < \cos 15°$.

**HULUMTIM**

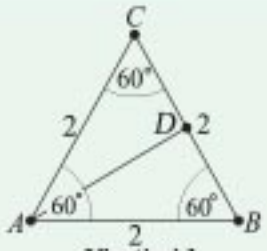
Zgjidh një program gjeometrik dhe vizato një trekëndësh kënddrejtë ABC me kënd të drejtë në kulmin C. Shëno këndet në kulmet A dhe B me $\alpha$ dhe $\beta$, përkatësisht, kurse katetat BC dhe AC me a dhe b, përkatësisht. Zgjidh kateta për të cilat vlen $a > b$. Tërhiq lartësinë CD drejt hipotenuzës. Vështro raportet $\frac{a}{b}$ dhe $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. Përshkruaj çfarë vure re. Përsërite procedurën për kateta për të cilat vlen $a < b$.

## 4.7. Raportet trigonometrike të këndeve 30°, 45° dhe 60°

### SHEMBULLI 1

Le të shqyrtojmë trekëndëshin barabrinjës ABC me brinjë 2 cm (vizatimi 1). Lartësia AD e lëshuar nga kulmi A është njëkohësisht simetralja e këndit në kulmin A dhe simetralja e brinjës BC. Kemi se, $\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$ dhe $\angle DAB = \frac{1}{2}\angle CAB = \frac{1}{2}\cdot 60° = 30°$.

Me zbatimin e teoremës së Pitagorës për trekëndëshin kënddrejtë ABD në vizatimin 2, fitojmë se $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$ prej këtu rrjedh se $\overline{AD}^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, dmth $\overline{AD} = \sqrt{3}$.



Vizatimi 1

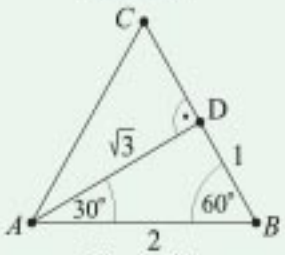
Tani raportet trigonometrike për këndet në trekëndëshin ABD janë:

$\sin 30^\circ = \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$, $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$,

$\cos 30^\circ = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\overline{DB}}{\overline{AD}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$.

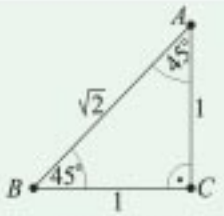


Vizatimi 2

## SHEMBULLI 2

Për të llogaritur raportet trigonometrike për këndin 45°, konstruktojmë një trekëndësh kënddrejtë barakrahës me brinjë 1 cm (vizatimi 3). Këndet e ngushta të tij janë nga 45°. Sipas teoremës së Pitagorës hipotenuza është $\overline{AB} = \sqrt{2}$.

Nga përkufizimi i raporteve trigonometrike del se $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$ dhe $\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1 = \operatorname{ctg} 45^\circ$.



Vizatimi 3

Raportet trigonometrike të fituara mund të paraqiten në tabelë.

| $\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| 30° | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| 45° | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | 1 |
| 60° | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

## DETYRA 1

Llogarit vlerën e shprehjes $\cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$

## SHEMBULLI 3

Verifiko nëse barazia është e saktë: $4\sin^2 60^\circ + 4\cos^2 60^\circ = \operatorname{tg}^2 60^\circ + \operatorname{ctg}^2 30^\circ$.

Nga fakti se $\operatorname{ctg} 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ$, fitojmë se $\operatorname{tg}^2 60^\circ + \operatorname{ctg}^2 30^\circ = 2 \cdot \operatorname{tg}^2 60^\circ = 2(\sqrt{3})^2 = 6$.

Nga ana tjetër kemi

$$4\sin^2 60^\circ + 4\cos^2 60^\circ = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{3}{4} = 3 + 1 = 4.$$

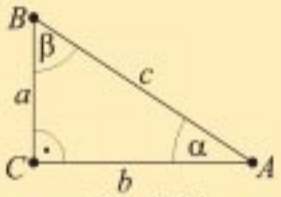
Pasiqë vlera e anës së majtë është e ndryshme nga vlera e anës së djathtë, respektivisht $4 \neq 6$, përfundojmë se $4\sin^2 60^\circ + 4\cos^2 60^\circ \neq \operatorname{tg}^2 60^\circ + \operatorname{ctg}^2 30^\circ$.

## DETYRA 2

Llogarit vlerën e shprehjes $\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin \alpha}$ për $\alpha = 30^\circ$.



Këndet në trekëndëshin kënddrejtë janë komplementarë. Nëse $\alpha$ është njëri nga këndet e ngushta në trekëndëhin kënddrejtë ABC (vizatimi 4), atëherë këndi $\beta = 90^\circ - \alpha$ është këndi komplementar ndaj tij.



Vizatimi 4

Brinja $a$ është kateta përballë këndit $\alpha$, ndërsa brinja $b$ është katetë e shtrirë për këndin $\beta$. Sipas kësaj, për raportet trigonomike nga këndet $\alpha$, dhe $\beta$, kemi se:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta, \cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta, \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg}\beta, \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\beta$$

prej nga del se : $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos(90^\circ - \alpha)$, $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin(90^\circ - \alpha)$,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = ctg(90^\circ - \alpha), \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = tg(90^\circ - \alpha).$$

## SHEMBULLI 4

Thjeshto shprehjen:

a) $\sin 40^\circ + 4\cos 50^\circ$, b) $\frac{3\operatorname{tg} 20^\circ + 4\operatorname{ctg} 70^\circ}{5\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{ctg} 70^\circ}$.

Me aplikim e formulave për raportet trigonometrike të këndeve komplementare fitojmë:

a) $\sin 40^\circ + 4\cos 50^\circ = \cos(90^\circ - 40^\circ) + 4\cos 50^\circ = \cos 50^\circ + 4\cos 50^\circ = 5\cos 50^\circ$

b) $\frac{3\operatorname{tg} 20^\circ + 4\operatorname{ctg} 70^\circ}{5\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{ctg} 70^\circ} = \frac{3\operatorname{tg} 20^\circ + 4\operatorname{tg}(90 - 70^\circ)}{5\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{ctg}(90 - 70^\circ)} = \frac{3\operatorname{tg} 20^\circ + 4\operatorname{tg} 20^\circ}{5\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg} 20^\circ} = \frac{7\operatorname{tg} 20^\circ}{4\operatorname{tg} 20^\circ} = \frac{7}{4}$.

## SHEMBULLI 5

Llogarit vlerën e këndit $\alpha$, nëse $\cos(\alpha + 10^\circ) = \sin 20^\circ$.

Me aplikimin e formulave për raportet trigonometrike fitojmë se, $\cos(\alpha + 10^\circ) = \sin[90^\circ - (\alpha + 10^\circ)]$ $= \sin 20^\circ$, prej nga rrjedh se $90^\circ - (\alpha + 10^\circ) = 20^\circ$. Duke llogaritur fitojmë $\alpha = 60^\circ$.

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Llogarit vlerën e shprehjes:
   a) $\sin^2 30° + \cos^2 30°$, b) $\sin^2 45° + \cos^2 45°$, c) $\frac{\sin 30° + 1}{1 + \cos 60°}$, ç) $\frac{\operatorname{tg} 30° + \operatorname{ctg} 45°}{\operatorname{ctg} 60° + \operatorname{tg} 45°}$.

2. Llogarit:
   a) $2 \cdot \cos 30° \cdot \cos 45° \cdot \sin 30° \cdot \cos 60°$, b) $\sin^2 30° + \operatorname{tg}^2 60° \cdot \sin 30° \cdot \cos 60°$

3. Llogarit vlerën e shprehjes:
   a) $\frac{1 + \sin 30°}{1 - \sin 30°}$, b) $\frac{\operatorname{ctg} 60° + \operatorname{tg} 45°}{1 - \operatorname{tg} 60° \cdot \operatorname{tg} 45°}$, c) $\frac{4 \sin^2 45° + 1}{\operatorname{ctg}^2 30°}$.

4. Gjej këndin $\alpha$, nëse dihet se:
   a) $\cos(\alpha + 10°) = \sin 30°$, b) $\operatorname{tg} 35° = \operatorname{ctg}(\alpha + 15°)$,
   c) $\sin(\alpha + 30°) = \cos(\alpha + 30°)$, ç) $\operatorname{tg}(\alpha + 20°) = \operatorname{ctg}(\alpha - 10°)$.

5. Thjeshto shprehjet:
   a) $\frac{3 \sin 35° + 5 \cos 55°}{2 \sin 35°}$, b) $\frac{\sin 40° \cdot \cos 50°}{\sin^2 40° + \cos^2 50°}$, c) $\frac{\sin 15°}{\cos 75°} + \frac{ctg62°}{tg28°}$

6. Nëse $\alpha + \beta = 90°$, thjeshto shprehjet:
   a) $\sin\alpha + \cos\beta$, b) $\sin\alpha - \cos\beta$, c) $\sin^2\alpha + \cos^2\beta$, ç) $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$,
   d) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta}$, dh) $\frac{k - \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{k + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta}$, e) $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\beta + \cos\beta}$

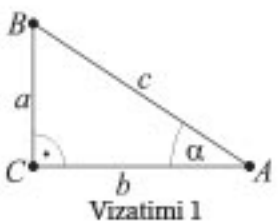
**HULUMTIM**

Në një program gjeometrik, vizato një trekëndësh barabrinjësh. Zgjidh një pikë të çfarëdoshme brenda trekëndëshit. Mat distancat nga ajo pikë deri te brinjët e trekëndëshit dhe krahaso shumën e tyre me lartësinë e trekëndëshit. Përpiqu të nxjerrësh një vërtetim.

# 4.8. Raportet trigonometrike nga i njëjti kënd $\alpha$

Dihet se në trekëndëshin këndrejtë ABC (vizatimi 1) vlen teorema e Pitagorës $a^2 + b^2 = c^2$. Nëse këtë barazi e pjesëtojmë me $c^2$ fitojmë $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$, pra $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$.

Prandaj kemi se $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$. Duke qenë se $\frac{a}{c} = \sin\alpha$ dhe $\frac{b}{c} = \cos\alpha$, duke zëvendësuar në barazinë e mësipërme, përfitojmë $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.



Vizatimi 1

### SHEMBULLI 1

Le të jetë $\alpha = 30°$, atëherë kemi se $\sin^2 30° + \cos^2 30° = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$.



Duke përdorur $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, mund të fitojmë shprehjet:
$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ dhe $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

### DETYRA 1

Llogarit $\cos \alpha$, nëse $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

### SHEMBULLI2

Thjeshto shprehjen $(1 + \cos \alpha) \cdot (1 - \cos \alpha)$

$(1 + \cos \alpha) \cdot (1 - \cos \alpha) = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$.

Për trekëndëshin kënddrejtë ABC (vizatimi 1) kemi $\text{tg}\, \alpha = \frac{a}{b}$ dhe $\text{ctg}\, \alpha = \frac{b}{a}$.
Nëse pjesëtojmë numëruesin dhe emëruesin në anën e djathtë të barazimeve të mësipërme me $c$ $(c \neq 0)$ fitojmë

$$\text{tg}\, \alpha = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ dhe } \text{ctg}\, \alpha = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Nëse shumëzohen $\text{tg}\, \alpha$ dhe $\text{ctg}\, \alpha$, fitojmë edhe një barazi $\text{tg}\, \alpha \cdot \text{ctg}\, \alpha = 1$

### DETYRA 2

Llogarit $\text{tg}\, \alpha$ nëse $\text{ctg}\, \alpha = 2$.

### SHEMBULLI 3

Nëse $\text{tg}\, \alpha = 2$, atëherë $\text{ctg}\, \alpha = \frac{1}{\text{tg}\, \alpha} = \frac{1}{2}$.

Për raportet e tjera trigonometrike të këndit $\alpha$ kemi: $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg}\, \alpha$
Prej nga fitojmë se $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2$, domethënë $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$. Nga ana tjetër, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, prandaj $(2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 4 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 5 \cos^2 \alpha = 1$. Sipas kësaj, $\cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$, domethënë $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Prandaj rrjedh se, $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Llogarit raportet e tjera trigonometrike, nëse është dhënë
   a) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, b) $\cos\alpha = 0{,}25$, c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5}$, ç) $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}41$.
2. Thjeshto shprehjet:
   a) $1-\cos^2\alpha$, b) $\sin^2\alpha - 1$, c) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$, ç) $\frac{1}{1-\sin\alpha} + \frac{1}{1+\sin\alpha}$.
3. Vërteto se:
   a) $\sin^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha + \cos^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha = 1$, b) $\sin^2\alpha \cdot (1+\operatorname{ctg}^2\alpha) + \cos^2\alpha \cdot (1+\operatorname{tg}^2\alpha) = 2$.
4. Vërteto se për çdo kënd të ngushtë vlen:
   a) $\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha$, b) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = 2\sin^2\alpha - 1$,
   c) $\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$.
5. Vërteto se për çdo kënd të ngushtë vlen:
   a) $\frac{1}{1-\cos\alpha} + \frac{1}{1+\cos\alpha} = \frac{2}{\sin^2\alpha}$, b) $\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} + \frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha} = 2$
6. Vërteto se për çdo kënd të ngushtë vlen: $\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - 1} = \cos\alpha + \sin\alpha$.
7. Shprehi: a) $\cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$ me ndihmën e $\sin\alpha$, b) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ me ndihmën e $\operatorname{ctg}\alpha$.
8. Nëse $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, llogarit vlerën e shprehjes $\frac{5\sin\alpha + \cos\alpha}{3\sin\alpha + 2\cos\alpha}$.
9. Llogarit vlerën e shprehjes $4\operatorname{tg}\alpha - 3\sin\alpha$, nëse $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

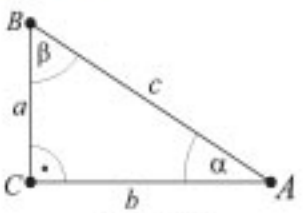
**HULUMTIM**

Në një program gjeometrik, vizato një trekëndësh kënddrejtë barakrahës $ABC$ me kënd të drejtë në kulmin $C$. Në brinjën $AC$ zgjidh pikën $D$ në mënyrë që $\measuredangle DBA = 30°$ dhe $DE$ është lartësi në $\Delta ABD$. Nëse shënojmë $\measuredangle CBD = \alpha$, atëherë llogarit $\sin\alpha$ dhe $\cos\alpha$, kur $\overline{AE} = 1$.

# 4.9. Zgjidhja e trekëndëshit kënddrejtë

Le të jenë a, b dhe c brinjët e trekëndëshit kënddrejtë ABC (vizatimi 1) dhe $\alpha$ e $\beta$ këndet e tij të ngushta. Atëherë $\alpha + \beta = 90°$ dhe $a^2 + b^2 = c^2$. Përveç kësaj, nga përkufizimet e raporteve trigonometrike kemi se

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha, \frac{b}{c} = \cos\alpha, \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \frac{a}{c} = \cos\beta, \frac{b}{c} = \sin\beta, \frac{a}{b} = \operatorname{ctg}\beta$$



Vizatimi 1

Këto do t'i përdorim për të llogaritur elementet bazë të trekëndëshit kënddrejtë, brinjët dhe këndet e tij, në rastet kur jepen:

- një brinjë dhe një kënd
- dy brinjë

Të zgjidhësh një trekëndësh kënddrejtë do të thotë të llogaritësh të gjithë elementet e tij bazë në bazë të elementeve të dhëna, nga të cilat të paktën njëra është një brinjë.

## SHEMBULLI 1

Me kalkulator gjej vlerën e:
a) $\sin 37°30'$, b) $\cos 70°40'$, c) $\operatorname{tg} 56°$, ç) $\operatorname{ctg} 25°$.

a) Meqenëse $37°30' = 37° + \left(\frac{30}{60}\right)^{\circ} = 37° + 0{,}5° = 37{,}5°$, me kalkulator shtypim butonin SIN dhe fitojmë $\sin 37{,}5° \approx 0{,}60876$,

b) Me butonin COS fitojmë $\cos 70°40' \approx \cos 70{,}67° \approx 0{,}331$,

c) Me butonin TAN fitojmë $\operatorname{tg} 56° \approx 1{,}48256$,

ç) Meqenëse $\operatorname{ctg} 25° = \frac{1}{\operatorname{tg} 25°}$, fillimisht $\operatorname{tg} 25° \approx 0{,}46631$ prej nga $\operatorname{ctg} 25° \approx \frac{1}{0{,}46631} \approx 2{,}14$.

## SHEMBULLI 2

Me kalkulator gjej madhësinë e këndit kur njihet një raport i tij trigonometrik, d.m.th. gjej këndin $\alpha$ nëse:
a) $\sin \alpha = 0{,}26049$, b) $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}04129$

a) Së pari futet vlera 0,26049, pastaj zgjidhet $\text{SIN}^{-1}$ dhe fitohet $\sin^{-1}(0{,}26049) \approx 15{,}099 \approx 15°59'$,

b) Në mënyrë analoge $\operatorname{tg}^{-1}(0{,}04129) \approx 2{,}36° \approx 2°22'$

## SHEMBULLI 3

Zgjidh trekëndëshin kënddrejtë me hipotenuzë $c = 93$ cm dhe kënd $\alpha = 42°23'$.

Trekëndëshi quhet i zgjidhur kur përcaktohen gjatësitë e dy katetave *a dhe b* dhe madhësia e këndit të ngushtë $\beta$. Këndet e ngushta në trekëndëshin kënddrejtë janë komplementarë, prandaj $\beta = 90° - \alpha = 90° - 42°23' = 47°37'$.

Për të gjetur katetën $a$, me kalkulator llogarisim $42{,}383° \approx 0{,}67408$ dhe përfundimisht $a = c \cdot \sin \alpha = 93 \cdot 0{,}67408 \approx 62{,}7$.

Kateta b mund të llogaritet me hipotenuzën dhe kosinusin e këndit $a$ ose me teoremën e Pitagorës.

Mënyra e parë: $b = c \cdot \cos \alpha = 93 \cdot \cos 42{,}383° = 93 \cdot 0{,}73866 \approx 68{,}7$.

Mënyra e dytë: $b = \sqrt{93^2 - 63^2} \approx 69$ cm.

### SHEMBULLI 4

Zgjidh trekëndëshin kënddrejtë me kateta $a = 21$ cm dhe $b = 15$ cm.

Trekëndëshi do të jetë i zgjidhur nëse përcaktohen gjatësia e hipotenuzës dhe dy këndet e ngushta.

Hipotenuza llogaritet me teoremën e Pitagorës:
$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{21^2 + 15^2} = \sqrt{610} \approx 25$ cm.

Këndi $\alpha$ përcaktohet me funksionin tangjent. Nga kushti $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{21}{15} = 1{,}4$ përfitojmë $\alpha \approx 54^\circ 28'$.

Për këndin $\beta$ llogarisim $\beta = 90^\circ - \alpha \approx 90^\circ - 54^\circ 28'$, rrjedimisht $\beta \approx 35^\circ 32'$.

### DETYRA 1

Zgjidh trekëndëshin kënddrejtë me katetë $b = 53$ cm dhe këndin $\beta = 64^\circ$.

### DETYRA 2

Zgjidh trekëndëshin kënddrejtë me katetë $a = 37$ cm dhe hipotenuë $c = 48$ cm.

## DETYRA PËR USHTRIME

Në detyrat 1–4, zgjidh trekëndëshin kënddrejtë ABC nëse

1. a) $\alpha = 36{,}2^\circ, c = 68$ cm, b) $\beta = 15{,}8^\circ, c = 12{,}2$ cm.
2. a) $\beta = 65{,}4^\circ, a = 2{,}35$ cm, b) $\alpha = 82^\circ, b = 246$ cm, c) $\beta = 48^\circ 30', b = 74{,}7$ cm.
3. a) $\alpha = 24^\circ, a = 5{,}25$ cm, b) $\alpha = 30^\circ 50', b = 53{,}5$ cm.
4. a) $b = 3{,}9$ cm, $c = 4{,}5$ cm, b) $a = 230$ cm, $c = 320$ cm, c) $a = 52{,}5$ cm, $b = 28$ cm.
5. Jepet një drejtkëndësh me brinjë $a = 5$ cm dhe $b = 20$ cm.. Gjej këndin e ngushtë me të cilin priten diagonalet e drejtkëndëshit.

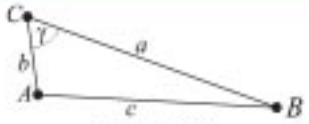
**HULUMTIM**

Harto një kërkim për nocionet "kënd ngritjeje" dhe "kënd depresioni". Me cilin instrument mund të maten këto kënde në natyrë?

# 4.10. Syprina e trekëndëshit

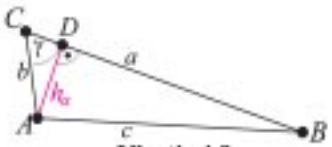
## AKTIVITET

Jepet trekëndëshi $ABC$ me $\gamma = 60^\circ$, $a = 12$ cm dhe $b = 4$ cm (vizatimi 1). Llogarit syprinën e tij.



Vizatimi 1

Formula me të cilën llogaritet syprina e një trekëndëshi është gjysma e prodhimit të një brinje dhe gjatësisë së lartësisë së lëshuar mbi atë brinjë. Le të jetë $h_a$ lartësia ndaj brinjës a (vizatimi 2).
Nëse pika e prerjes së lartësisë me brinjën $a$ shënohet me D, atëherë trekëndëshi CAD është kënddrejtë me kënd të ngushtë $\gamma$ dhe $\sin\gamma = \frac{h_a}{b}$ që domethënë $h_a = b \cdot \sin\gamma = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm,

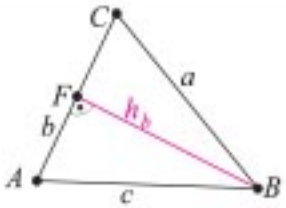


Vizatimi 2

prandaj $P_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{12 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

## AKTIVITET

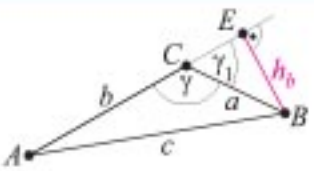
Llogarit ngushtë e trekëndëshit ABC kur dihen një kënd i ngushtë $\gamma$ dhe brinjët a dhe b. Vështro trekëndëshin kënddrejtë BCF (vizatimi 3), me kënd të drejtë në kulmin F, ku lartësia $h_b$ pret brinjën b, dhe vërteto se $P_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$.



Vizatimi 3

## AKTIVITET

Llogarit syprinën e trekëndëshit ABC kur dihen një kënd i gjerë $\gamma$ dhe brinjët $a$ dhe $b$. Do ta lëshojmë lartësinë $h_b$ mbi vazhdimin e brinjës $b$ (vizatimi 4). Nga trekëndëshi kënddrejtë $\gamma_1 = 180^0 - \gamma$ del se $CBE$, kështu që $\sin\gamma_1 = \frac{h_b}{a}$.



Vizatimi 4

Prandaj $h_b = a \cdot \sin\gamma_1$, prej nga rrjedh se $P_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma_1}{2}$.

## DETYRA 1

Llogarit syprinën e trekëndëshit $ABC$ duke lëshuar lartësinë $h_a$ mbi vazhdimin e brinjës $a$.

**Shënim.** Nga fakti se $\gamma_1$ është kënd i jashtëm për trekëndëshin ABC, $\gamma 1 = \alpha + \beta$, kemi se $P_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2}$.

Syprina e trekëndëshit me një kënd të ngushtë $\gamma$ dhe dy brinjët që e formojnë atë kënd, a dhe b, llogaritet me formulën $P_\Delta = \frac{ab\sin\gamma}{2}$.

Nëse këndi i dhënë $\gamma$ është i gjerë, atëherë syprina e trekëndëshit llogaritet me formulën $P_\Delta = \frac{ab\sin\gamma_1}{2}$, ku $\gamma_1 = 180° - \gamma$.

## DETYRA 2

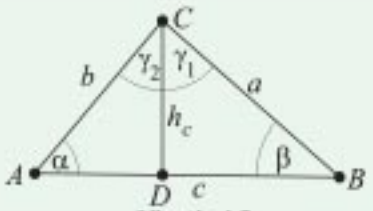
Llogarit syprinën e trekëndëshit ABC me $\gamma = 120°$, $a = 7$ cm dhe $b = 15$ cm.

### SHEMBULLI 1

Syprina e trekëndëshit ABC është $P_{\Delta ABC} = 9\left(\sqrt{3}+1\right)$ cm², brinja $a = 6$ cm dhe lartësia $h_c = 3\sqrt{2}$ cm. Zgjidh trekëndëshin $ABC$.

Nga formula për syprinën e trekëndëshit fitohet

$P_{\Delta ABC} = \frac{c \cdot h_c}{2}$, pra $c = \frac{2 \cdot 9\left(\sqrt{3}+1\right)}{3\sqrt{2}} = \frac{6\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{2}}$ cm.



Vizatimi 5

Ngaqë trekëndëshi $BCD$ (vizatimi 5) është

kënddrejtë $\sin\beta = \frac{h_c}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, prandaj $\beta = 45°$.

Atëherë $\gamma_1 = 45°$, prandaj $\overline{BD} = h_c = 3\sqrt{2}$ cm.

Pra $\overline{AD} = c - \overline{BD} = \frac{6\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ cm.

është kënddrejtë, prandaj $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h_c}{\overline{AD}} = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
prej nga del se $\alpha = 30°$.

Më në fund $\gamma = 180° - 30° - 45° = 105°$ dhe $\sin 30^0 = \frac{3\sqrt{2}}{b}$, prandaj $b = 6\sqrt{2}$ cm.

## DETYRA 3

Syprina e trekëndëshit ABC është $P_{\Delta ABC} = \left(\frac{15\sqrt{3}+27}{2}\right)$ cm², brinja $b = 3\sqrt{6}$ cm dhe lartësia $h_c = 3\sqrt{3}$ cm. Zgjidh trekëndëshin ABC.

## DETYRA PËR USHTRIME

**1.** Llogarit syprinën e trekëndëshit ABC të dhënë me:

a) $a = 6$ cm, $b = 0{,}7$ dm dhe $\gamma = 45°$,

b) $b = 9$ cm, $c = 0{,}5$ dm dhe $\alpha = 60°$.

2. Llogarit sipërfaqen e trekëndëshit $ABC$ nëse
   a) $b = 11$ cm, $\beta = 63°$ dhe $\gamma = 72°30'$, b) $a = 10$ cm, $\alpha = 38°$ dhe $\beta = 67°$.
3. Përcakto syprinën e trekëndëshit barakrahës ABC kur këndi te baza është $30°20'$ dhe gjatësia e bazës është 6 cm.
4. Në trapezin ABCD, janë dhënë baza më e vogël $b = 10$ cm, lartësia $h = 8$ cm dhe këndet te baza $\alpha = 30°20'$ dhe $\beta = 46°30'$. Llogarit syprinën e trapezit.

**HULUMTIM**

Ligji i Snell-it jep varësinë ndërmjet indeksit të thyerjes dhe koeficientit të refraksionit, $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$. Koeficientët për ujin dhe xhamin janë 1,33 dhe 1,52, respektivisht. Si llogaritet këndi maksimal me të cilin rrezja e dritës do ta kalojë kufirin xham–ujë? Llogarit këndet te kufijtë ndërmjet materialeve të tjerë.

## 4.11. Zbatimi i raporteve trigonometrike në situata problematike

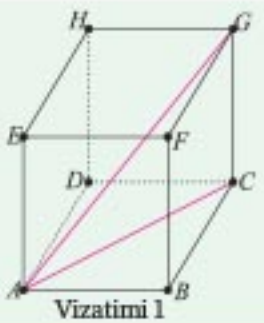
Jepet rrafshi dhe pika M jashtë tij. Nëse nëpër M tërhiqet një drejtëz normale me rrafshin, dhe pikën e prerjes së saj me rrafshin e shënojmë me N, atëherë MN formon kënd të drejtë me çdo drejtëz që shtrihet në rrafsh.

### SHEMBULLI 1

Jepet një kub $ABCDEFGH$ (vizatimi 1), me brinjë $a = 5$ cm. Gjej këndin $CAG$.

Tehu GC është normal ndaj çdo drejtëze që shtrihet në rrafshin bazë ABCD. Pikërisht për këtë arsye trekëndëshi ACG është kënddrejtë, dhe nëse $\measuredangle CAG = \alpha$, atëherë

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{CG}}{\overline{AC}} = \frac{5}{\sqrt{5^2+5^2}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$ kjo do të thotë se $\alpha = 45°$.



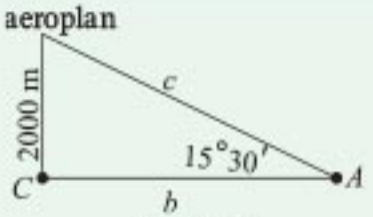
Vizatimi 1

### SHEMBULLI 2

Aeroplani fluturon në lartësi 2000 m dhe duhet të fillojë uljen në aeroport, nën një kënd zbritjeje $15°30'$ (vizatimi 2). Në çfarë distance nga pista duhet të fillojë zbritjen? Gjej distancën më të shkurtër nga e cila ndodhet aeroplani deri te pika ku duhet të prekë pistën.

Nga trekëndëshi kënddrejtë në vizatim del se distanca nga pista prej së cilës duhet të fillojë zbritja e aeroplanit është gjatësia e katetës b, d.m.th. $b = 2000 \cdot \text{ctg } 15°30' \approx 7211{,}8$. Distanca më e shkurtër deri te pika ku aeroplani duhet të prekë pistën i korrespondon gjatësisë së hipotenuzës c, d.m.th.

$$c = \frac{2000}{\sin 15°30'} \approx \frac{2000}{0{,}267238} = 7483{,}96 \text{ m}.$$



Vizatimi 2

## DETYRA 1

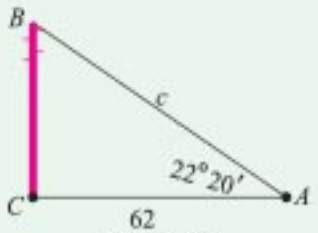
Mbi vendin A ndodhet një aeroplan në lartësi 4000 m. Në atë moment vendi B shihet prej tij nën një kënd 17°. Në çfarë distance ndodhet aeroplani nga vendi B dhe sa është distanca ndërmjet vendeve A dhe B? Bëj një skicë të situatës.

## SHEMBULLI 3

Llogarit lartësinë e një shtylle elektrike, nëse nga një pikë e larguar 62 m nga baza e saj, ajo shihet nën një kënd 22°20′

Nga vizatimi 3 kemi

$\overline{BC} = 62 \cdot tg22°20' \approx 62 \cdot 0{,}41081 = 25{,}4702$ m.



Vizatimi 3

## DETYRA 2

Llogarit distancën nga pika A deri te maja e shtyllës B (vizatimi 3).

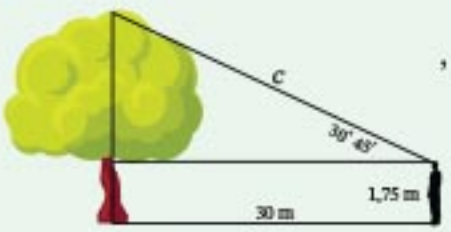
## SHEMBULLI 4

Një njeri i gjatë 1 m 75 cm sheh majën e kurorës së një peme nën këndin 30°45'. Nëse ai është i larguar 30 m nga pema, llogarit lartësinë e pemës. Kurora e pemës nis në të njëjtën lartësi me njeriun.

Nga vizatimi 4 fitohet se lartësia e kurorës është

$30 \cdot \text{ tg } 30°45' \approx 30 \cdot 0{,}594937 = 50{,}4255$

prandaj lartësia e drurit është $50{,}4255 + 1{,}75 = 52{,}1755$ m.



Vizatimi 4

## DETYRA 3

Llogarit largësinë nga koka e njeriut deri te maja e pemës (vizatimi 4).

## SHEMBULLI 5

Në bregun e një lumi gjendet një pemë e lartë 7 m (vizatimi 5). Ajo shihet nën këndin 23°20′ nga bregu tjetër i lumit. Llogarit gjerësinë e lumit.

Gjerësia e lumit është

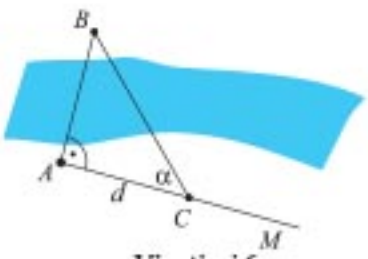
$$\frac{7}{tg23°20'} \approx \frac{7}{0{,}431358} = 16{,}2278\ \text{m}.$$




Vizatimi 5

## DETYRA 4

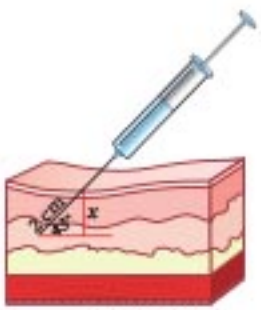
Pikat A dhe B ndodhen në anët e ndryshme të një lumi. Shprehe distancën ndërmjet tyre me ndihmën e $d = \overline{AC}$ dhe këndit α (vizatimi 6).




Vizatimi 6

## DETYRA 5

Në vizatimin 7 paraqitet aplikimi i injeksionit në ind. Nëse pjesa e gjilpërës që ka depërtuar në ind është 2 cm dhe aplikimi bëhet nën këndin 45º, atëherë në çfarë thellësie duhet të jetë gjilpëra?




Vizatimi 7

## SHEMBULLI 6

Një pemë ka hije 4,8 m kur një rreze e diellit formon këndin 38°20' me sipërfaqen e tokës. Përcakto lartësinë e pemës.

Do të konstruktojmë një trekëndësh kënddrejtë me kënd të drejtë ndërmjet trungut të pemës dhe tokës, nga këtu lehtë fitohet lartësia e pemës:

$h = 4{,}8 \cdot \text{tg}\ 38°20' \approx 4{,}8 \cdot 0{,}7906 \approx 3{,}79\ \text{m}$

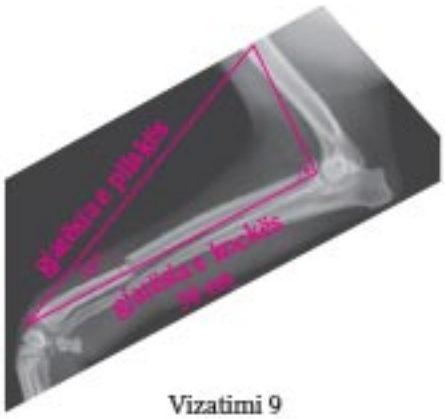
(Vizatimi 8).




Vizatimi 8

## DETYRA 6

Në radiografinë e vizatimit 9 vërehet një frakturë në një kockë të qenit. Gjatësia e kockës së qenit është 30 cm. Sipas të dhënave në imazh, sa duhet të jetë gjatësia e pllakës që duhet të vendoset??



Vizatimi 9

### SHEMBULLI 7

Shkallët e zjarrfikësve ndodhen në një distancë 2,8 m nga muri. Gjej gjatësinë e shkallëve nëse këndi ndërmjet shkallëve dhe dyshemesë është 65°40'.

Do të ndërtojmë një trekëndësh kënddrejtë me kënd të drejtë ndërmjet murit dhe dyshemesë. Atëherë gjatësia e shkallëve është $l = \frac{2,8}{\cos 65^0 40'} \approx \frac{2,8}{0,69879} \approx 4$ m (vizatimi 10).



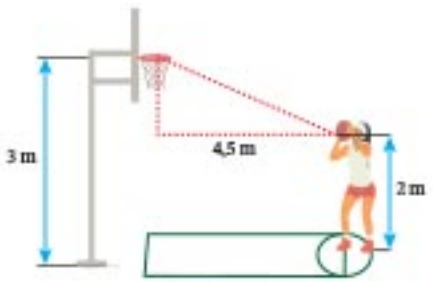

Vizatimi 10

## DETYRA 7

Sytë e basketbollistes janë 2 m mbi dysheme dhe koshi është 3 m mbi dysheme (vizatimi 11).

Basketbollistja ndodhet në vijën e gjuajtjeve të lira, e cila është 4,5 m nga qendra e koshit.

Sa është këndi i ngritjes me të cilin basketbollistja e sheh qendrën e koshit?




Vizatimi 11

### SHEMBULLI 8

Këndi nën të cilin shihet një far nga një anije është 25,6°. Pas afrimit të anijes drejt bregut me 1050 m, këndi bëhet 31,2°. Në çfarë lartësie është vendosur fari, i matur nga niveli i ujit?

Le të shënojmë me $x$ largësinë nga anija (vizatimi 12) deri te bregu pas afrimit për 1050 m dhe me y lartësinë e kërkuar të farit nga niveli i ujit. Atëherë kemi ctg $31,2° = \frac{x}{y}$ dhe ctg $25,6° = \frac{1050 + x}{y}$,

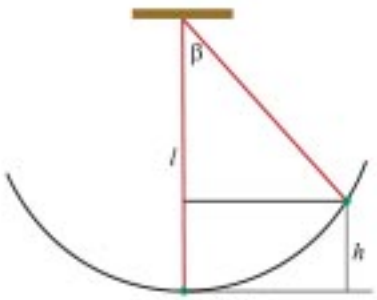
nga del se $x = y \operatorname{ctg} 31{,}2^\circ = 1{,}651y$
dhe $y \operatorname{ctg} 25{,}6^\circ = 1050 + x$. Duke e zëvendësuar $x = 1{,}651y$ në barazimin e dytë, fitojmë $2{,}087y = 1050 + 1{,}651y$.
Sipas saj, kemi $0{,}436y = 1050$. $y = \dfrac{1050}{0{,}436} = 2410\,\text{m}$.
Prandaj, fari është vendosur në lartësi 2410 metra.



Vizatimi 12

## DETYRA 8

Një lavjerrës me gjatësi 30 cm (vizatimi 13) lëkundet me kënd maksimal 30°.
Cila është lartësia që arrin lavjerrësi?



Vizatimi 13

## SHEMBULLI 9

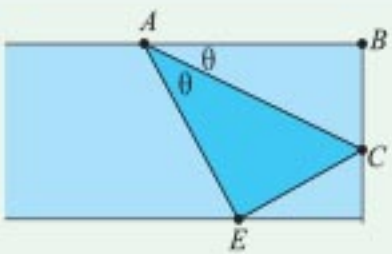
Në vizatimin 10 paraqitet një shirit letre drejtkëndor i gjatë, maja e të cilit paloset sipër AC për të arritur te brinja e kundërt, duke formuar këndin $\theta$. Nëse gjerësia e shiritit është $w$, shprehe gjatësinë e palosjes AC me $w$ dhe $\theta$.

Vërejmë se madhësia e këndit $\theta$. është ndërmjet 0° dhe 45. Le të jetë F këmba e normales së lëshuar nga A te brinja e kundërt (vizatimi 11).
Në trekëndëshin kënddrejtë AEF,
kemi $\sphericalangle AEF = 2\theta$ dhe $\overline{AF} = w$.

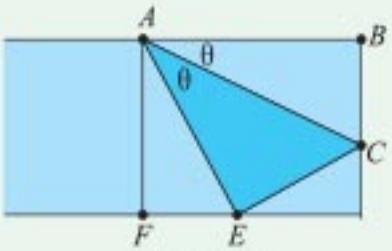
Atëherë $\overline{AF} = \overline{AE} \sin 2\theta$, nga rrjedh se
$\overline{AE} = \dfrac{\overline{AF}}{\sin 2\theta} = \dfrac{w}{\sin 2\theta}$.

Në trekëndëshin kënddrejtë AEC
kemi $\sphericalangle CAE = \sphericalangle CAB = \theta$.

Prandaj nga $\overline{AE} = \overline{AC} \cos\theta$ fitojmë
$\overline{AC} = \dfrac{\overline{AE}}{\cos\theta} = \dfrac{w}{\cos\theta \sin 2\theta}$.



Vizatimi 10



Vizatimi 11

## DETYRA 9

Piramida e Keopsit është piramidë e rregullt me lartësi 147 metra dhe me bazë katrore me brinjë 230 metra.

a) Llogarit këndin që formon një teh anësor me rrafshin e bazës.

b) Llogarit këndin që formon një teh anësor me një teh të bazës që priten në të njëjtin kulm.

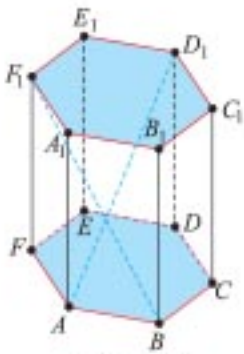
c) Llogarit këndin ndërmjet dy teheve anësore.

## DETYRA 10

Në një ditë me diell, energjia mesatare e prodhuar nga një metër katror panele diellore është 0,8 kWh. Çatia e shtëpisë së Alitit ka formën e një trekëndëshi barakrahës me krahë 12 metra dhe kënd 72 shkallësh ndërmjet tyre. Përcakto sa energji mesatarisht mund të prodhojë Aliti, nëse e mbulon të gjithë çatinë me panele diellore.

## DETYRA 11

Një rezervuar ka formën e një prizmi të rregullt gjashtëkëndor me brinjë baze 2 m (vizatimi 16). Mbi të janë vendosur trarët mbështetës $AD_1$ dhe $BF_1$. Trari $AD_1$ formon kënd 32° me gjashtëkëndëshin e bazës. Gjej gjatësitë e trarëve $AD_1$ dhe $BF_1$.



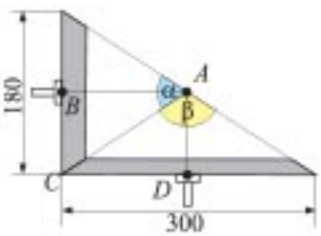
Vizatimi 16

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Në majë të një fabrike me lartësi $H = 140$ m ndodhet një oxhak. Nga pika A, e cila është në largësi 100 m nga fabrika, oxhaku shihet nën këndin $\alpha = 56$. Llogarit lartësinë e oxhakut.

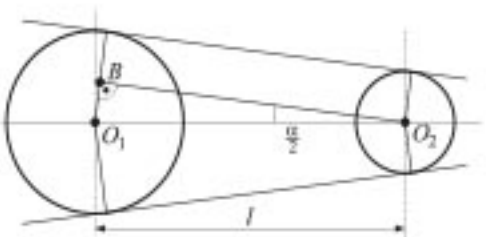
2. Dy shtylla me lartësi 20 m dhe 17 m janë të vendosura njëra nga tjetra në distancë 50 m.
   a) Llogarit gjatësinë e kabllos elektrike të vendosur në majat e të dy shtyllave.
   b) Llogarit këndet që formon kablloja me shtyllat.

3. Diametrat e jashtëm të një pale ingranazhesh konike janë 180 mm dhe 300 mm. Llogarit këndet në majë të secilit ingranazh konik, pra këndet $\alpha$ dhe $\beta$ (vizatimi 17).



Vizatimi 17

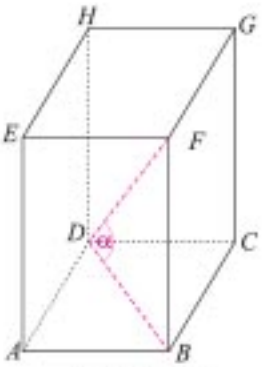
4. Llogarit këndin e rripit të dy rrotullave, diametrat e të cilave janë 2 m dhe 1,2 m, nëse largësia e tyre qendrore është l = 3 m (vizatimi 18).



Vizatimi 18

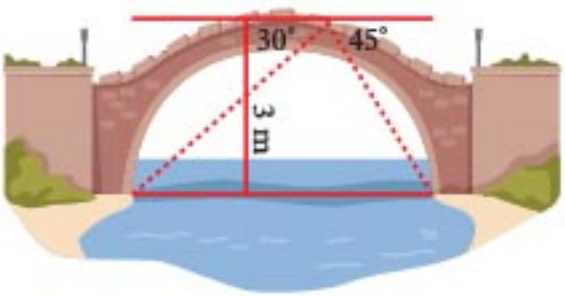
5. Nga shpatet e një mali deri në majën e tij, nën këndin $\alpha = 46°30'$ me sipërfaqen e tokës, është vendosur një teleferik i drejtë me gjatësi 1500 m. Llogarit lartësinë e malit.

6. Përcakto madhësinë e këndit $\alpha$, nëse *ABCDEFGH* është prizëm i rregullt katërkëndor (vizatimi 19) me tehun e bazës $a = 7$ cm dhe lartësi $h = 12$ cm.



Vizatimi 19

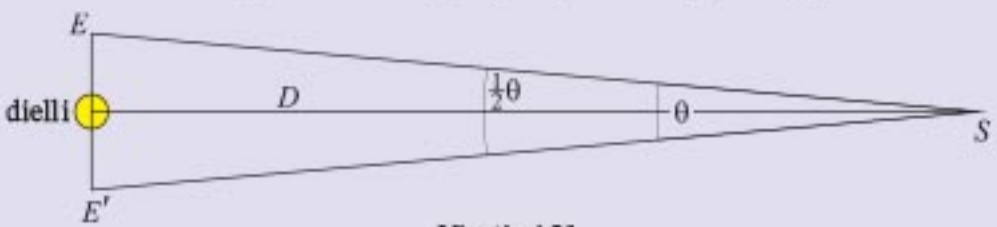
7. Nga një pikë mbi urë, njëri breg shihet nën këndin 30°dhe tjetri nën këndin 45°. Nëse ura është 3 m mbi nivelin e ujit, gjej gjerësinë e lumit (vizatimi 20).



Vizatimi 20

**HULUMTIM**

Përcaktimi i largësisë ndërmjet Tokës dhe një ylli jepet me formulën $D = \frac{b}{\operatorname{tg}\theta}$. Ku D është largësia, b është baza matëse zakonisht dyfish i largësisë Tokë–Diell, përafërsisht 300 000 000 km, kurse $\theta$ është dallimi i këndeve me të cilët shihet ylli nga pikat skajore të kësaj baze. Ylli më i afërt me Tokën, ndryshe nga Dielli, është Proksima Kentauri, për të cilin $\theta$ është 0,768. Përcakto largësinë nga Toka te Proksima Kentauri në kilometra dhe në vite dritë (një vit dritë është $9.46 \cdot 10^{12}$ km). Kërko këta parametra edhe për yje të tjerë, të ndryshëm nga Proksima Kentauri.

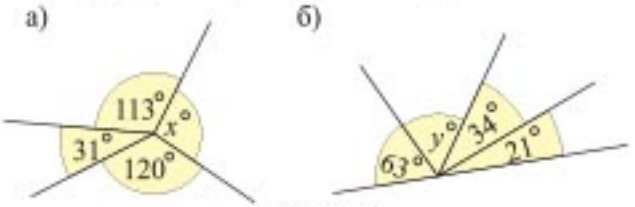


Vizatimi 21

# 4.12. Këndet në transversalen e dy drejtëzave

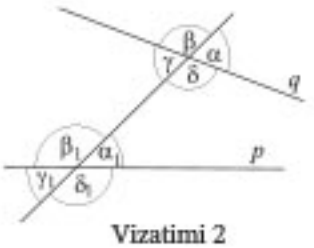
## DETYRA 1

Përcakto madhësinë e këndit të panjohur, sipas të dhënave nga vizatimi 1:




Vizatimi 1

Nëse dy drejtëza të ndryshme p dhe q (vizatimi 2), që shtrihen në të njëjtin rrafsh, priten nga një e tretë $a$, e cila quhet transversale, atëherë formohen këndet $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ dhe $\delta_1$, që quhen edhe kënde të transversales.




Vizatimi 2

Cilat nga pohimet më poshtë për çiftet e këndeve të transversales janë të sakta?

a) $\alpha$ dhe $\beta$ janë kënde të jashtme. b) $\alpha_1$ dhe $\gamma$ janë kënde alternative.

c) $\alpha_1$ dhe $\beta$ janë kënde përgjegjëse. ç) $\alpha$ dhe $\gamma_1$ janë kënde të kundërta.

d) $\alpha_1$ dhe $\beta_1$ janë kënde të brendshme.

Këndet $\alpha$, $\beta$, $\gamma_1$ dhe $\delta_1$ janë të jashtme, ndërsa këndet $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma$ dhe $\delta$ janë të brendshme.

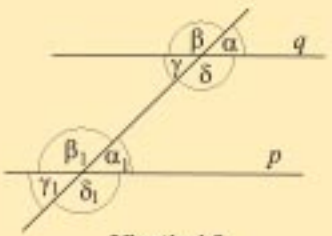
| Emri i këndeve | Përkufizim | Çiftet në vizatimin 2 |
|---|---|---|
| **Kënde përgjegjëse** | një kënd i brendshëm dhe një i jashtëm në të njëjtën anë të transversales, pa kulm të përbashkët. | $\alpha$ dhe $\alpha_1$, $\beta$ dhe $\beta_1$, $\gamma$ dhe $\gamma_1$, $\delta$ dhe $\delta_1$ |
| **Kënde alternative** | dy kënde të jashtme ose dy kënde të brendshme në anë të kundërta të transversales, pa kulm të përbashkët. | $\alpha$ dhe $\gamma_1$, $\beta$ dhe $\delta_1$, $\delta$ dhe $\beta_1$, $\gamma$ dhe $\alpha_1$ |
| **Kënde të kundërta** | dy kënde të brendshme ose dy kënde të jashtme në të njëjtën anë të transversales, pa kulm të përbashkët. | $\alpha$ dhe $\delta_1$, $\beta$ dhe $\gamma_1$, $\gamma$ dhe $\beta_1$, $\delta$ dhe $\alpha_1$ |

Nëse dy drejtëza paralele priten nga një e tretë, atëherë:

a) Këndet përgjegjëse janë të barabarta;

b) Këndet alternative janë të barabarta;

c) Këndet e kundërta janë suplementare (vizatimi 3).

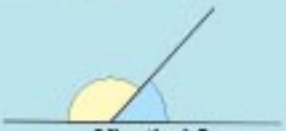



Vizatimi 3

Këndet që kanë një krah dhe kulm të përbashkët, ndërsa fushat e tyre të brendshme ndodhen në anë të ndryshme të atij krahu, quhen kënde fqinje (vizatimi 4). Dy kënde fqinje që formojnë një kënd të shtrirë quhen kënde të shtrira (vizatimi 5).



Vizatimi 4



Vizatimi 5

Shuma e dy këndeve të shtrira është 180°. Këndet e shtrira janë suplementare, por dy kënde suplementare nuk është e domosdoshme të jenë të shtrira.

Dy kënde që kanë kulm të përbashkët dhe krahët e tyre formojnë dy drejtëza quhen kënde të kryqëzuara.

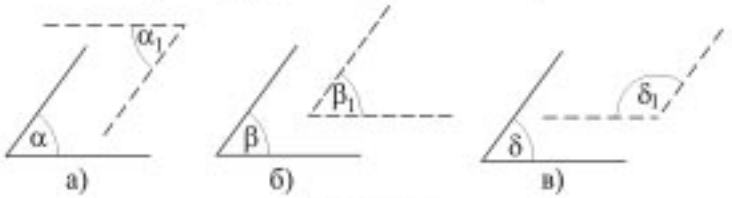
Këndet e kryqëuara janë të barabarta.

Në vizatimin 6 janë paraqitur kënde me krahë paralelë:

a) $\alpha$ dhe $\alpha_1$ në kahje të kundërta,

b) $\beta$ dhe $\beta_1$ në kahje të njëjtë,

c) $\delta$ dhe $\delta_1$ kanë një krah në kahje të njëjtë, kurse tjetrin në kahje të kundërt.

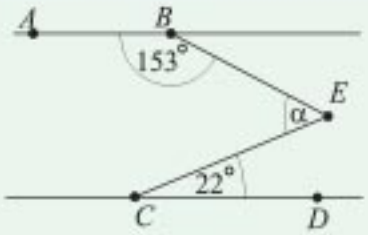



Vizatimi 6

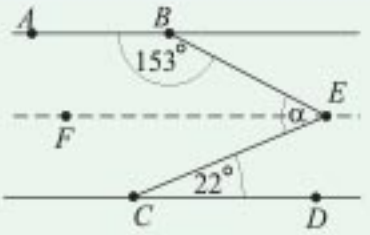
Këndet me krahë paralelë, qofshin të dy në kahje të kundërta apo të dy në kahje të njëjtë, janë të barabarta; kur një krah është në kahje të njëjtë dhe tjetri në kahje të kundërt, këndet janë suplementare.

## SHEMBULLI 1

Drejtëzat AB dhe CD në vizatimin 7 janë paralele. Sipas të dhënave në vizatim, gjej madhësinë e këndit $\alpha = \measuredangle BEC$



Vizatimi 7

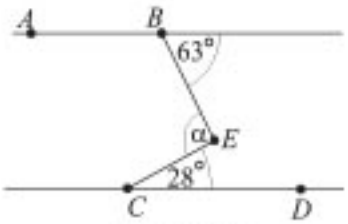


Vizatimi 8

Nga pika E tërhiq një drejtëz paralele me AB dhe CD dhe zgjidh në atë drejtëz një pikë F të ndryshme nga E. Atëherë $\measuredangle FEC = \measuredangle DCE = 22°$ si kënde alternative dhe $\measuredangle BEF + \measuredangle ABE = 180°$ dmth $\measuredangle BEF = 27°$, pra $\alpha = 27° + 22° = 49°$ si kënde të kundërta.

## DETYRA 1

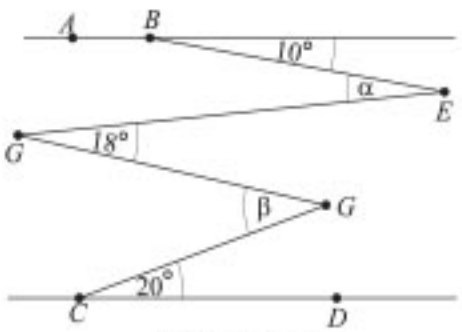
Drejtëzat AB dhe CD në vizatimin 9 janë paralele. Gjej madhësinë e këndit α, sipas të dhënave të vizatimit.



Vizatimi 9

## DETYRA 2

Drejtëzat AB dhe CD në vizatimin 10 janë paralele. Gjej madhësitë e këndeve $\alpha$ dhe $\beta$, sipas të dhënave të vizatimit.



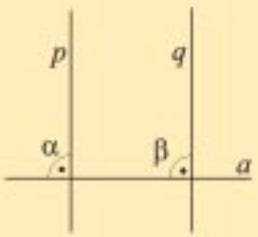
Vizatimi 10

## AKTIVITET

Me ndihmën e një programi gjeometrik dinamik, konstrukto dy drejtëza paralele dhe mat këndet në situata të ngjashme me detyrat 1 dhe 2. Përpiqu të nxjerrësh rregullin.

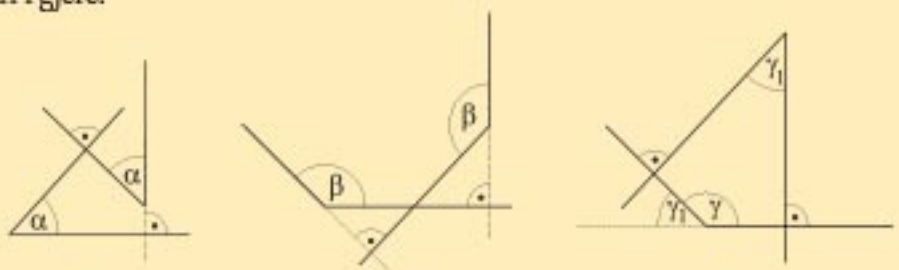
A vlen i njëjti rregull edhe kur situata është më e ndërlikuar, për shembull kur ndërmjet dy drejtëzave paralele ka tri ose më shumë pika të lidhura me segmente që formojnë kënde të panjohura?

Nëse p dhe q janë dy drejtëza paralele dhe p është pingule me drejtëzën a, atëherë $p \perp a$, pastaj $q \perp a$ (vizatimi 11).



Vizatimi 11

Dy kënde me krahë reciprokisht pingul janë të barabartë nëse të dy janë të ngushtë (vizatimi 12 a) ose të dy janë të gjerë (vizatimi 12 b), janë suplementarë nëse njëri është i ngushtë e tjetri i gjerë.



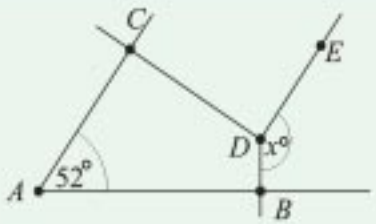
a) б) в)

Vizatimi 12

## SHEMBULLI 2

Le të jenë $AC \parallel DE$, $AC \perp CD$ dhe $AB \perp BD$ (vizatimi 13). Nëse $\measuredangle BAC = 52°$, sa është $\measuredangle BDE$?

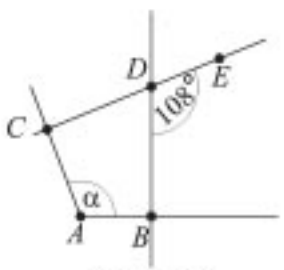
Meqë $\measuredangle BAC$ dhe $\measuredangle CDB$ janë kënde me krahë reciprokisht pingul dhe njëri është i ngushtë e tjetri i gjerë, atëherë janë suplementarë, pra $\measuredangle CDB = 180° - 52° = 128°$.
Më tej, nga $AC \parallel DE$ dhe $AC \perp CD$ rrjedh $\measuredangle EDC = 90°$.
Përfundimisht nga $90° + x° + 128° = 360°$ del $x°=142°$.



Vizatimi 13

## DETYRA 3

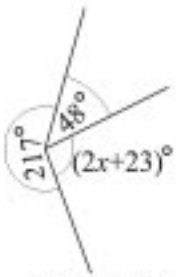
Le të jenë $\measuredangle BAC$ dhe $\measuredangle CDB$ kënde me krahë reciprokisht pingul (vizatimi 14).
Gjej madhësinë e këndit α, nëse $\measuredangle BDE = 108°$.



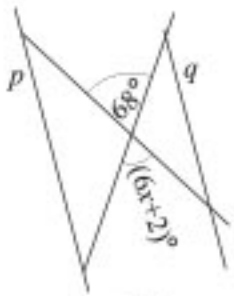
Vizatimi 14

## DETYRA PËR USHTRIME

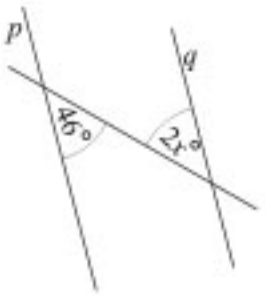
**1.** Përcakto madhësinë e këndit x sipas vlerave të dhëna në vizatimit 15, 16 dhe 17.



Vizatimi 15

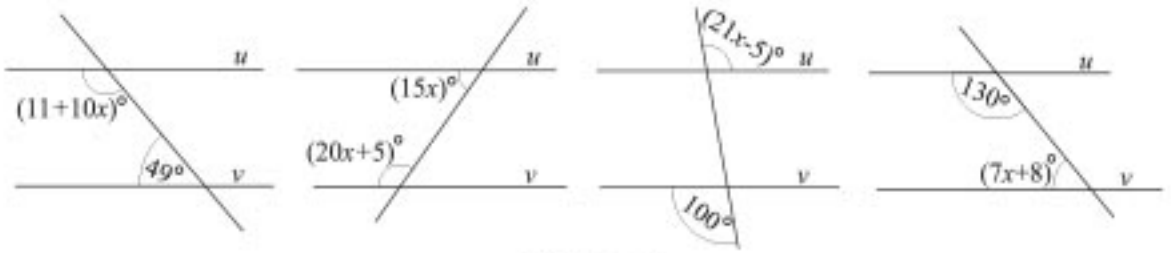


$p \parallel q$
Vizatimi 16



$p \parallel q$
Vizatimi 17

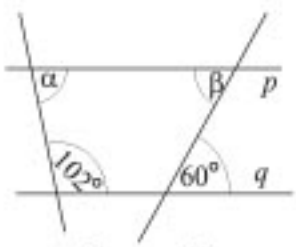
**2.** Nëse drejtëzat u dhe v janë paralele, përcakto madhësinë e këndit të shënuar me x në secilën nga skicat e vizatimit 18.



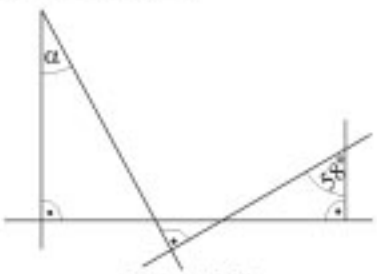
Vizatimi 18

**3.** Përcakto këndet α dhe β sipas vizatimit 19.

**4.** Përcakto këndin α sipas të dhënave në vizatimin 20.



Vizatimi 19

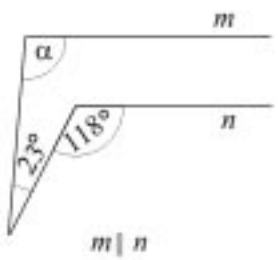


Vizatimi 20

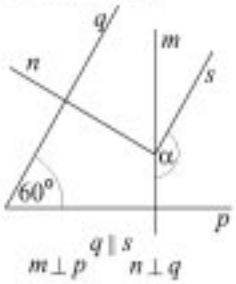
**5.** Përcakto këndin α sipas të dhënave në

a) vizatimin 21

b) vizatimin 22.



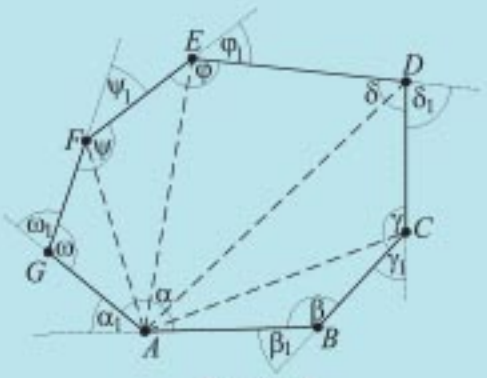
$m \parallel n$
Vizatimi 21



$q \parallel s$
$m \perp p$ $n \perp q$
Vizatimi 22

# 4.13. Shumëkëndëshi

Nëse të gjitha pikat e segmenteve, skajet e të cilave shtrihen në shumëkëndësh, janë pika të atij shumëkëndëshi, atëherë ai shumëkëndësh quhet shumëkëndësh konveks, përndryshe quhet shumëkëndësh konkav. Segmenti, skajet e të cilit janë çdo dy kulme jo fqinje të shumëkëndëshit, është diagonale e shumëkëndëshit, (vizatimi 1).



Vizatimi 1

## DETYRA 1

Vizato një pesëkëndësh dhe njehso sa diagonale mund të tërhiqen nga një kulm i atij pesëkëndëshi? Shkruaj një rregull me të cilin do të njehsosh për çdo shumëkëndësh.

Numri i të gjitha diagonaleve në një shumëkëndësh llogaritet me formulën $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$ ku $n$ tregon numrin e brinjëve të shumëkëndëshit.

## DETYRA 2

Njehso numrin e të gjitha diagonaleve te: a) shtatëkëndëshi, b) tetëkëndëshi, c) njëqindkëndëshi.

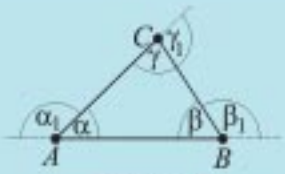
Çdo dy brinjë fqinje të shumëkëndëshit formojnë një kënd që është **kënd i brendshëm** i shumëkëndëshit. Në vizatimin 1 këto janë këndet: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi, \psi, \omega$. Numri i këndeve të shumëkëndëshit është i barabartë me numrin e brinjëve të tij, pra kulmeve. Diagonalet e tërhequra nga një kulm i shumëkëndëshit e ndajnë shumëkëndëshin në $(n-2)$ trekëndësha, pra sipas kësaj, shuma e të gjithë këndeve të brendshme në shumëkëndësh është $C_n = (n-2) \cdot 180°$. Çdo kënd i shtrirë me këndin e brendshëm te shumëkëndëshi është **kënd i jashtëm** i shumëkëndëshit. Në vizatimin 1 këto janë këndet: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi, \psi, \omega$. Shuma e këndeve të jashtëm te shumëkëndëshi është: $n \cdot 180° - C_n = n \cdot 180° - (n-2) \cdot 180° = 360°$.

## DETYRA 3

Njehso shumën e këndeve të brendshme te:
a) katërkëndëshi; b) gjashtëkëndëshi; c) dhjetëkëndëshi.

## Trekëndëshi

Këndet që janë të shtrirë me këndet e brendshëm të trekëndëshit janë kënde të jashtme të trekëndëshit (vizatimi 2, këndet $\alpha_1$, $\beta_1$ dhe $\gamma_1$ janë kënde të jashtme në $\Delta ABC$).

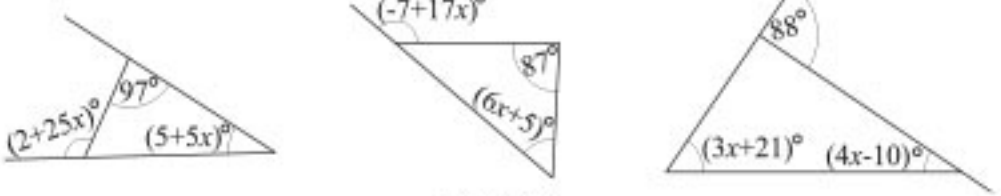


Vizatimi 2

Çdo kënd i jashtëm në trekëndësh është i barabartë me shumën e dy këndeve të brendshme jo fqinjë. Shuma e këndeve të jashtme të trekëndëshit është 360°.

### DETYRA 4

Përcakto madhësinë e këndit të panjohur $x°$. sipas të dhënave në secilin nga vizatimet në vizatimin 3.



Vizatimi 3

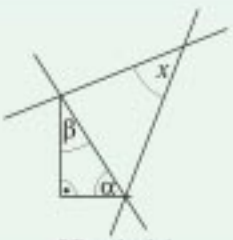
### SHEMBULLI 1

Simetralet e këndeve të jashtme të këndeve nga hipotenuza e një trekëndëshi kënddrejtë priten nën një kënd prej 45°. Vërteto!

Nëse shënojmë dy këndet e hipotenuzës me $\alpha$ dhe $\beta$ (vizatimi 4), atëherë simetralet e këndeve të jashtme formojnë trekëndësh me kënde të brendshme

$90° - \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\beta}{2} + x° = 180°$.

Nga kjo rrjedh se $x° = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{90°}{2} = 45°$.



Vizatimi 4

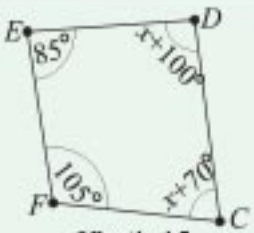
## Katërkëndëshi

Shuma e këndeve të brendshme te katërkëndëshi është 360°. Shuma e këndeve të jashtme te katërkëndëshi është 360°.

## SHEMBULLI 2

Përcakto madhësinë e këndit në kulmin D të katërkëndëshit në vizatimin 5.

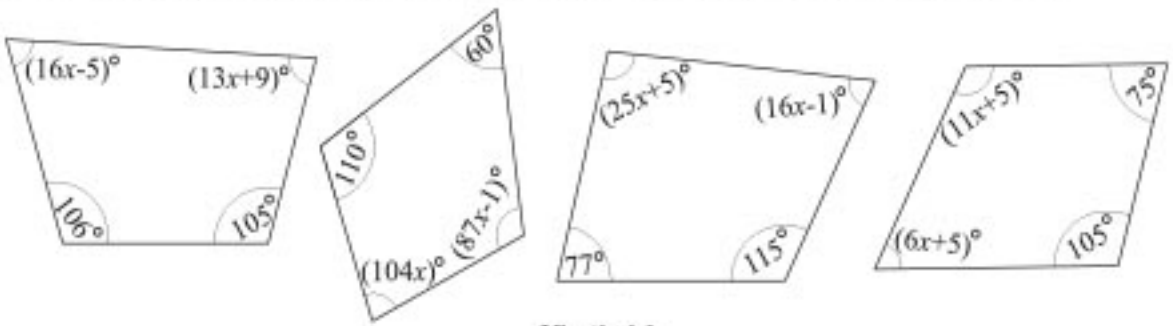
Shuma e këndeve të brendshme është 360°, pra $105° + x + 70° + x + 100° + 85° = 360°$ nga ku fitohet se $x = 0°$, që do të thotë se këndi në kulmin D është 100°.



Vizatimi 5

## DETYRA 5

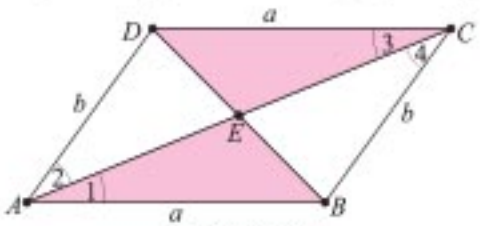
Përcakto madhësinë e këndeve të panjohura në secilin nga katërkëndëshat në vizatimin 6.



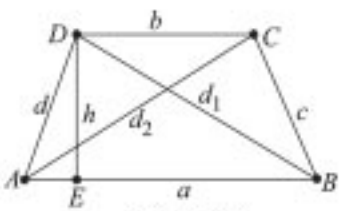
Vizatimi 6

Sipas pozitës së brinjëve të kundërta, katërkëndëshat i ndajmë në:

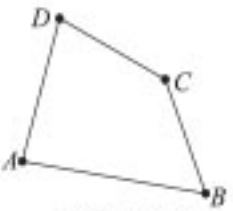
- paralelograme, që kanë dy palë brinjë paralele dhe për to vlen se: brinjët e kundërta janë të barabarta, këndet e kundërta janë të barabarta, këndet fqinjë janë suplementarë dhe diagonalet përgjysmohen nga pika e prerjes - vizatimi 7
- trapezë, që kanë një palë brinjë paralele dhe për to vlen se: këndet fqinjë, që shtrihen mbi krahët, janë suplementarë - vizatimi 8
- trapezoide, që nuk kanë asnjë palë brinjë paralele - vizatimi 9



Vizatimi 7



Vizatimi 8



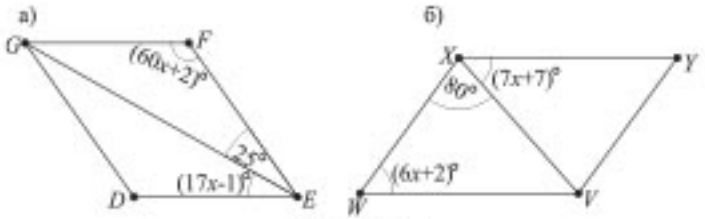
Vizatimi 9

## DETYRA 6

Përcakto madhësinë e këndit të panjohur në paralelogramin.

a) Këndi GFE në vizatimin 10 a)

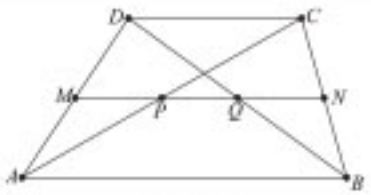
b) këndi WVY në vizatimin 10 b)




Vizatimi 10

### SHEMBULLI 3

Vija e mesme MN në trapezin ABCD ($\overline{AB} > \overline{CD}$)
e pret diagonalen AC në pikën P, dhe diagonalen BD në pikën Q.
Vërteto se $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} - \overline{CD}\right)$.




Vizatimi 11

Meqë MP është vijë e mesme në ΔCDA, rrjedh se $\overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{CD}$. Nga fakti që MQ është vijë e mesme në ΔABD rrjedh se $\overline{MQ} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Pra, $\overline{PQ} = \overline{MQ} - \overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{CD} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} - \overline{CD}\right)$.

## Shumëkëndëshi i rregullt

Një shumëkëndësh quhet i rregullt nëse të gjitha brinjët e tij janë të barabarta dhe të gjitha këndet e brendshme janë të barabarta.

**Vërejtje.** Trekëndëshi i rregullt është trekëndëshi barabrinjës, ndërsa katërkëndëshi i rregullt është katrori. Rombi, i cili nuk është katror, nuk është katërkëndësh i rregullt, sepse këndet e brendshme nuk janë të barabarta.

### SHEMBULLI 4

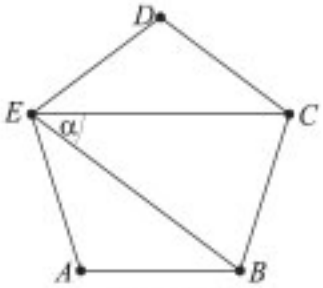
Dihet se raporti i një këndi të jashtëm dhe një këndi të brendshëm në të njëjtin kulm te një n-këndësh i rregullt është 1:14. Përcakto numrin e përgjithshëm të diagonaleve në atë shumëkëndësh.

Dimë se një kënd i brendshëm dhe një kënd i jashtëm në të njëjtin kulm te shumëkëndëshi i rregullt janë suplementarë, që do të thotë se nëse i shënojmë me $\alpha$ dhe $\beta$, përkatësisht, fitohet se
$\alpha + \beta = 180°$ dhe nga $\beta : \alpha = 1 : 14$, rrjedh se $\alpha = 14\beta$, nga ku $\beta = 12°$. Pra $n = \frac{360°}{12°} = 30$,
pra numri i përgjithshëm i diagonaleve te trekëndëshi i rregullt tridhjetëkëndësh është $\frac{30 \cdot (30-3)}{2} = 405$.

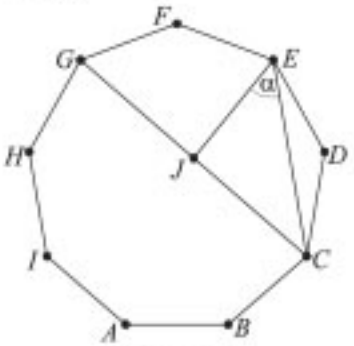
Madhësia e një këndi të jashtëm në një n-këndësh të rregullt është $\frac{360°}{n}$, ndërsa madhësia e një këndi të brendshëm është $\frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$.

## DETYRA PËR USHTRIME

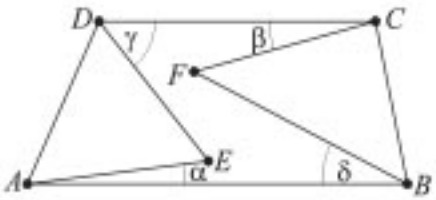
1. Në cilin shumëkëndësh shuma e këndeve të brendshme është: a) 2700°, b) 4320°, c) 5040°?
2. Në një shumëkëndësh mund të tërhiqen gjithsej 14 diagonale. Cili është ai shumëkëndësh?
3. Përcakto madhësinë e këndit të panjohur α, nëse ABCDE është pesëkëndësh i rregullt (vizatimi 11)



Vizatimi 12

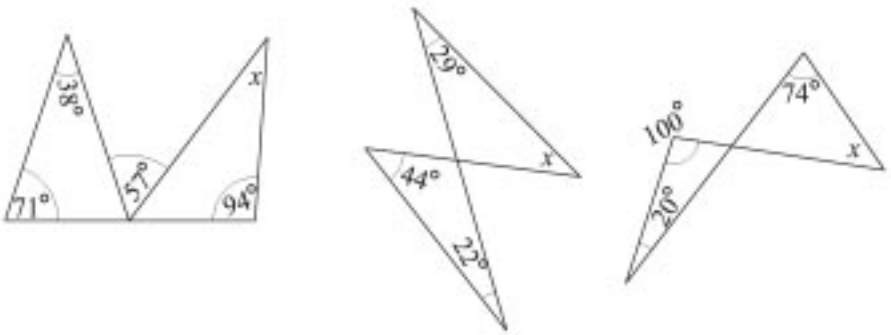


Vizatimi 13



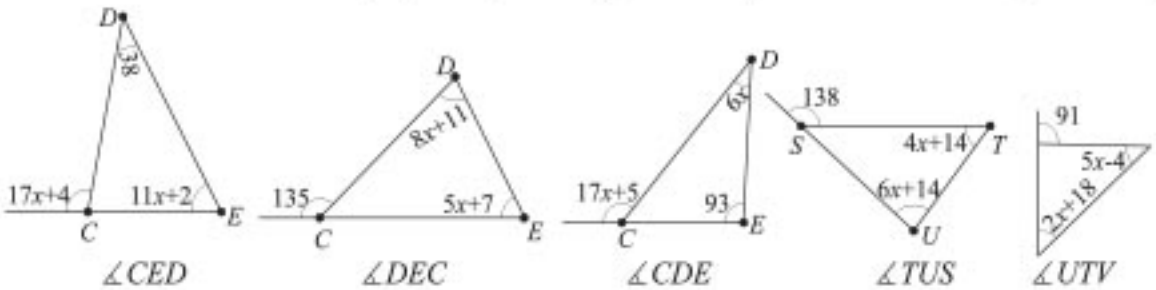
Vizatimi 14

4. Përcakto madhësinë e këndit të panjohur α, nëse ABCDEFGHI është nëntëkëndësh i rregullt dhe $EJ \perp CG$ (vizatimi 12).
5. Në trapezin ABCD dihet se $\alpha = 7°$, $\beta = 15°$, $\gamma = 51°$ dhe $\delta = 27°$. Përcakto madhësinë e këndeve BFC dhe DEA (vizatimi 13).
6. Përcakto madhësinë e këndit të panjohur, në shkallë, në secilin nga vizatimet në vizatimi 14:



Vizatimi 15

7. Përcakto madhësinë e këndit të panjohur x, nëse të gjithë këndet janë dhënë në shkallë (vizatimi 15):



Vizatimi 16

8. Këndi në kulmin e një trekëndëshi barakrahës është 30° më i madh se këndi në bazë. Përcakto këndet e brendshme dhe të jashtme të trekëndëshit.

9. Simetralja e këndit të jashtëm në kulmin C, te trekëndëshi ABC, e pret drejtëzën AB nën një kënd prej 45°. Këndi ABC është 35°. Përcakto këndet e trekëndëshit.

10. Simetralja e këndit ndërmjet brinjës dhe diagonales te rombi e pret brinjën tjetër të rombit nën një kënd prej 72°. Përcakto këndet e rombit.

**HULUMTIM**

Kryej një hulumtim për këndet që përdoren më së shpeshti në ndërtim, arkitekturë dhe industrinë automobilistike.

## 4.14. Vija rrethore dhe rrethi

**AKTIVITET**

"Syri i Londrës" është një monument në Londër, i cili në fakt është një rrotë rrotulluese me diametër 120 metra (Vizatimi 1). Në të janë ngjitur 32 kabina që ngrihen në një lartësi maksimale prej 135 metra mbi Londër. Përcakto nën çfarë këndi ndodhen dy kabina fqinje nga qendra e rrotës? Përpiqu të zbulosh se nga cila kabinë harku rrethor i shënuar $\overset{\frown}{AB}$, në vizatimin 2, do të shihet nën këndin më të madh. Përdor softuer gjeometrik për të kontrolluar supozimet tuaja.



Figura 1

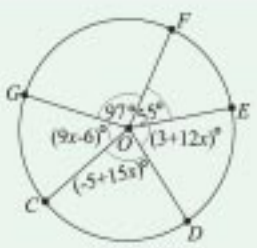



Figura 2

**SHEMBULLI 1**

Përcakto madhësinë e ∠COG sipas të dhënave nga vizatimi 1.

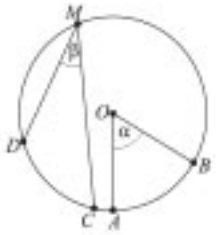
Nga fakti që $9x - 6° - 5° + 15x + 3° + 12x + 55° + 97° = 360°$,
pra $x = 6°$ nga ku fitohet se $\angle COG = 9 \cdot 6° = 48°$.




Vizatimi 1

## DETYRA 1

Në vizatimin 2 janë paraqitur këndet α dhe β. Rikujtohu se si quhet këndi α, dhe si quhet këndi β? Si qëndrojnë dy kënde qendrore në një rreth të cilët i korrespondojnë harqeve të barabarta rrethore? A vlen e kundërta?



Vizatimi 2

Të gjitha këndet periferike në një rreth mbi të njëjtin hark rrethor janë të barabartë ndërmjet tyre (vizatimi 3).
Çdo kënd periferik mbi gjysmërrethin është kënd i drejtë (Teorema e Talesit) (vizatimi 4).


Vizatimi 3



Vizatimi 4

## DETYRA 2

Nëse këndi periferik dyfishohet, si do të ndryshojë këndi qendror mbi të njëjtin hark rrethor?

Çdo kënd periferik në një rreth është i barabartë me gjysmën e këndit qendror, mbi të njëjtin hark rrethor.

### SHEMBULLI 2

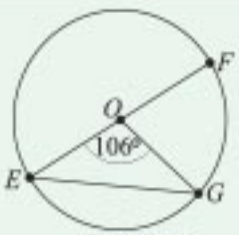
Shuma e një këndi qendror dhe këndit periferik mbi të njëjtin hark është 210°. Sa është këndi qendror?

Nëse e shënojmë këndin qendror me α, atëherë $\alpha + \frac{\alpha}{2} = 210°$, pra $\alpha = 140°$.

### SHEMBULLI 3

Përcakto madhësinë e $\measuredangle GEF$, nëse $\measuredangle EOG = 106°$ (vizatimi 5).

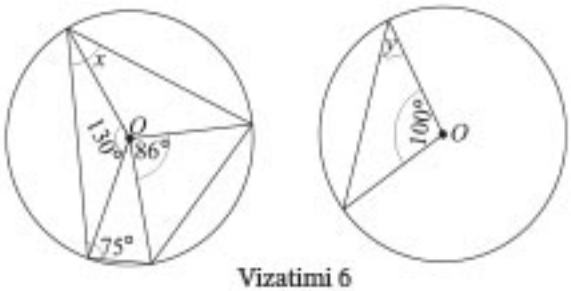
Meqë $\measuredangle EOF = 180°$, rrjedh se
$\measuredangle GOF = 74°$, pra $\measuredangle GEF = \left(\frac{74}{2}\right)^{\circ} = 37°$.



Vizatimi 5

## DETYRA 3

Përcakto këndet periferikë x dhe y, në shkallë, sipas të dhënave nga vizatimi 6.




Vizatimi 6

## SHEMBULLI 4

Përcakto këndin e panjohur x, në shkallë, sipas të dhënave të vizatimit 7.

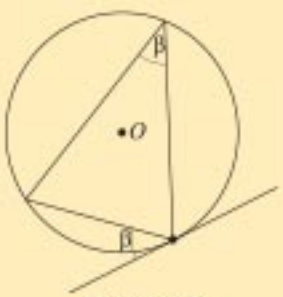
$\measuredangle CFB = \measuredangle CAB$ si kënde periferikë mbi të njëjtin hark rrethor. Nga teorema e Talesit rrjedh se $\measuredangle BCA = 90° - 56° = 34°$.




Vizatimi 7



Këndi ndërmjet kordës së rrethit dhe tangjentës, të tërhequr në një nga pikat skajore të kordës, është i barabartë me këndin periferik që i përgjigjet asaj korde (vizatimi 8).



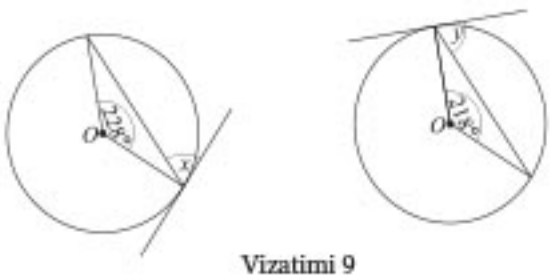

Vizatimi 8

## AKTIVITET

Përpiqu ta vërtetosh vetinë e mëparshme duke vërtetuar se këndi ndërmjet kordës dhe tangjentës në një nga pikat skajore të kordës është i barabartë me gjysmën e këndit qendror që i përgjigjet asaj korde.

## DETYRA 4

Përcakto këndet e panjohura x dhe y, sipas të dhënave të vizatimit 9.

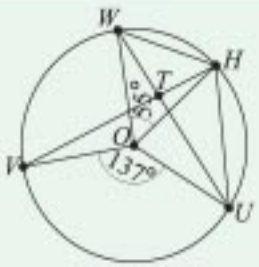



Vizatimi 9

## SHEMBULLI 5

Përcakto madhësinë e $\measuredangle VTU$ nëse dihet se $\measuredangle VOU = 137°$ dhe $\measuredangle HOË = 55°$ (Vizatimi 10).

Kemi se, $\measuredangle WUH = \frac{\measuredangle WOH}{2} = \left(\frac{55}{2}\right)^\circ$ dhe $\measuredangle VHU = \frac{\measuredangle VOU}{2} = \left(\frac{137}{2}\right)^\circ$. Pra $\measuredangle VTU$ është kënd i jashtëm për $\Delta TUH$, nga ku rrjedh se $\measuredangle VTU = \left(\frac{55}{2}\right)^\circ + \left(\frac{137}{2}\right)^\circ$.



Vizatimi 10

Këndi ndërmjet dy kordave, të cilat priten në brendësi të rrethit (vizatimi 11), është i barabartë me gjysmëshumën e këndeve qendrore përkatëse, d.m.th. nëse kordat AB dhe CD priten në pikën T, atëherë $\measuredangle CTB = \frac{\measuredangle COB}{2} + \frac{\measuredangle AOD}{2}$ dhe $\measuredangle ATC = \frac{\measuredangle AOC}{2} + \frac{\measuredangle DOB}{2}$.



Vizatimi 11

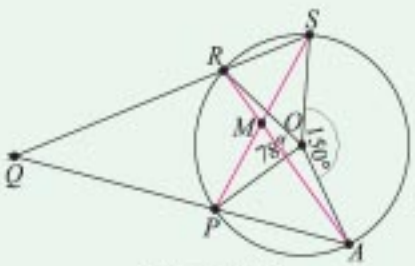
## SHEMBULLI 7

Përcakto madhësinë e $\measuredangle POR$, nëse dihet se $\measuredangle POR = 78°$ dhe $\measuredangle AOS = 150°$ (vizatimi 12).

Kemi që $\measuredangle ARS = \left(\frac{150}{2}\right)^\circ = \measuredangle APS$ dhe $\measuredangle PSR = \left(\frac{78}{2}\right)^\circ = \measuredangle PAR$, pra $\measuredangle PMR = \left(\frac{78}{2}\right)^\circ + \left(\frac{150}{2}\right)^\circ$ (vizatimi 13).



Vizatimi 12



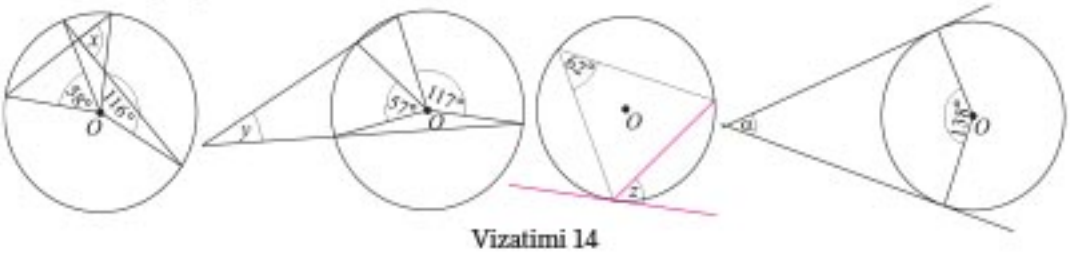
Vizatimi 13

Atëherë $\measuredangle PQR = 360° - \left(\frac{78}{2}\right)^\circ - \left(\frac{150}{2}\right)^\circ - 2\left(180° - \left(\frac{150}{2}\right)^\circ\right) = \left(\frac{150}{2}\right)^\circ - \left(\frac{78}{2}\right)^\circ$.

Këndi ndërmjet dy sekanteve të tërhequra nga një pikë që është e jashtme për rrethin (vizatimi 12) është i barabartë me gjysmëdallimin e madhësisë së këndeve qendrore përkatëse, d.m.th. $\measuredangle AQS = \frac{\measuredangle AOS}{2} - \frac{\measuredangle POR}{2}$.

## DETYRA 5

Përcakto këndin e panjohur, në shkallë, sipas vizatimit 14:



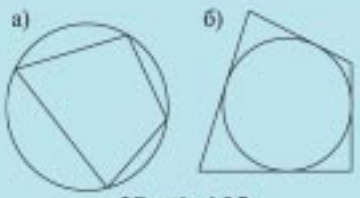

Vizatimi 14

## DETYRA 6

Vërteto se për rrezen e rrethit të brendashkruar në një trekëndësh kënddrejtë me kateta a dhe b dhe hipotenuzë c, vlen $r = \frac{a+b-c}{2}$.

## Katërkëndëshat koordiakë dhe tangjentë

Katërkëndëshi, brinjët e të cilit janë korda të të njëjtit rreth, është katërkëndësh koordiak (vizatimi 15 a)), ndërsa katërkëndëshi, brinjët e të cilit janë tangjenta të një rrethi, është katërkëndësh tangjent (vizatimi 15 b)).




Vizatimi 15

Këndet e kundërta në katërkëndëshin koordiak janë suplementarë. Shuma e gjatësive të brinjëve të kundërta në katërkëndëshin tangjent janë të barabarta.

**Vërejtje.** Drejtkëndëshi, katrori dhe trapezi barakrahës janë shembuj të katërkëndëshave koordiakë. Rombi, katrori dhe deltoidi janë shembuj të katërkëndëshave tangjentë.

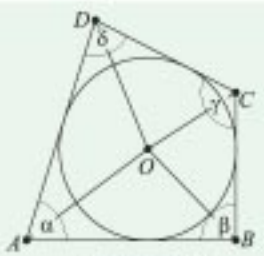
### SHEMBULLI 8

Është dhënë katërkëndëshi tangjent ABCD. Le të jetë $O$ qendra e rrethit të brendashkruar. Vërteto se $\measuredangle AOB + \measuredangle COD = 180^\circ$ (Vizatimi 16).

Meqë ABCD është katërkëndësh tangjent drejtëzat $AO$, $BO$, $CO$ dhe $DO$ janë simetrale të këndeve të brendshme, pra

$$\measuredangle AOB + \measuredangle COD = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + 180^\circ - \frac{\gamma}{2} - \frac{\delta}{2}$$

$$= 360 - \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$$




Vizatimi 16

Në çdo shumëkëndësh të rregullt mund të brendashkruhet një rreth. Rreth çdo shumëkëndëshi të rregullt mund të jashtashkruhet një rreth. Qendrat e rrethit të brendashkruar dhe të jashtashkruar puthiten, dhe me çdo dy kulme fqinje të shumëkëndëshit formojnë një trekëndësh karakteristik.

## SHEMBULLI 9

Përcakto rrezen e rrethit të brendashkruar n dhe rrezen e rrethit të jashtashkruar R në një gjashtëkëndësh të rregullt me brinjë a = 10 cm.

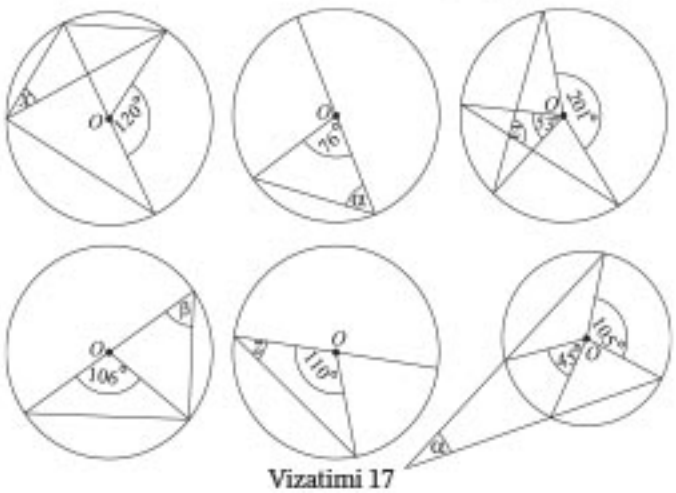
Trekëndëshi karakteristik te gjashtëkëndëshi i rregullt është trekëndësh barakrahës me kënd në kulmin $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, d.m.th. ai është trekëndësh barabrinjës. Rrezja e rrethit të brendashkruar puthitet me lartësinë e trekëndëshit barabrinjës, pra $r = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ cm. Rrezja e rrethit të jashtashkruar puthitet me brinjën, pra $R = a = 10$ cm.

Rrezja e rrethit të brendashkruar $r$ te një $n$-këndësh i rregullt me brinjë $a$ llogaritet me $r = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$, ndërsa rrezja e rrethit të jashtashkruar $R$ llogaritet me

$$R = \frac{a}{2 \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}.$$

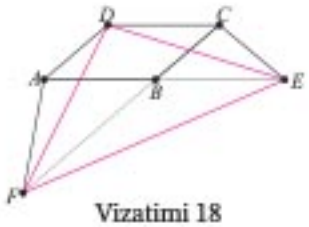
## DETYRA PËR USHTRIME

1. Këndi periferik mbi një hark është 36°. Cilës pjesë të rrethit i përgjigjet ai hark?
2. Cilit kënd periferik i përgjigjet harku rrethor që është i barabartë me $\frac{1}{20}$ pjesë të rrethit?
3. Një kordë e ndan rrethin në dy harqe që kanë raport 3:5. Cfarë kënde qendrore u përgjigjen harqeve?
4. Një nga këndet e ngushta në një trekëndësh kënddrejtë është 32°. Nën çfarë këndi shihet secila nga katetat e atij trekëndëshi, nga qendra e rrethit të jashtashkruar?
5. Përcakto madhësinë e këndit të panjohur, sipas të dhënave të secilit nga vizatimet në vizatimi 17!



Vizatimi 17

6. Le të jetë ABCD një paralelogram (vizatimi 18). Pikat E dhe F shtrihen në drejtëzat AB dhe BC, përkatësisht, ashtu që trekëndëshat AFC dhe CBE janë barakrahës ($\overline{AF} = \overline{AB}$ dhe $\overline{BC} = \overline{CE}$). Vërteto se trekëndëshi DFE është gjithashtu barakrahës.



Vizatimi 18

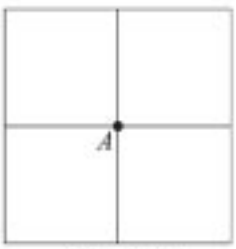
**HULUMTIM**

Në një softuer gjeometrik, vizato një rreth me rreze arbitrare. Pastaj brendashkruaj në të një trekëndësh kënddrejtë ABC. Nga kulmi i këndit të drejtë C, lësho lartësinë CD mbi hipotenuzën AB. Shqyrto syprinat e drejtkëndëshit me brinjë AD dhe BD dhe katrorit me brinjë CD. Çfarë vëren?

## 4.15. Mbulimi i një sipërfaqeje të dhënë në rrafsh

**SHEMBULLI 1**

Në një pikë arbitrare A të rrafshit mund të vendosësh saktësisht 4 katrorë, si në vizatimin 1, sepse çdo kënd i brendshëm i katrorit është $90^0$, pra $360^\circ = 4 \cdot 90^0$.



Vizatimi 1

**DETYRA 1**

Sa trekëndësha kënddrejtë barakrahës duhet të vendosësh njëri pranë tjetrit, me kulm të përbashkët, që asnjëri prej tyre të mos mbivendoset me tjetrin, dhe mes tyre të mos ketë hapësira boshe? Zgjidhe detyrën me ndihmën e softuerit gjeometrik, ku lehtë do të krijosh kopje nga një trekëndësh dhe do të kryesh translacion dhe rotacion.

**DETYRA 2**

Përpiqu të përcaktosh sa trekëndësha barabrinjës me kulm të përbashkët duhet të vendosësh në një pikë arbitrare, që trekëndëshat të preken pa lënë hapësira boshe, d.m.th. të fitosh shumën e këndeve të brendshme që preken në atë pikë, e cila është e barabartë me $360^\circ$. Trekëndëshat e përshkruar më pas nuk do të mbivendosen njëri me tjetrin dhe kulmi i asnjërit prej trekëndëshave nuk do të shtrihet në ndonjërën nga brinjët e trekëndëshave të tjerë.

## DETYRA 3

Sa gjashtëkëndësha të rregullt mund të vendosësh në një pikë arbitrare të rrafshit, që gjashtëkëndëshat të preken pa lënë hapësira boshe dhe të mos mbivendosen? Arsyeto përgjigjen! Përdor softuer gjeometrik për të kontrolluar supozimin tënd.

Nën mbushjen e një sipërfaqeje të dhënë me forma-2D nënkuptohet kur kopje identike të formës 2D e mbulojnë të gjithë sipërfaqen pa hapësira boshe dhe mbivendosje.
Në natyrë, mbushja vërehet te qelizat e huallit të bletët. Ky është një shembull i mbushjes me ndihmën e gjashtëkëndëshave të rregullt (figura 1).



Figura 1

Mbushja mund të jetë:
- e rregullt
- gjysmë e rregullt
- e parregullt

Te mbushja e rregullt, në një pikë të rrafshit vendosen $k$ shumëkëndësha të rregullt $n$-këndësh. Shuma e këndeve të brendshme të $k$ $n$-këndëshave duhet të jetë kënd i plotë, d.m.th. $k \cdot \frac{(n-2)\cdot 180^0}{n} = 360^0$ nga ku, duke rregulluar shprehjen, fitohet ekuacioni $\frac{2}{k} + \frac{2}{n} = 1$. Zgjidhjet e këtij ekuacioni duhet të jenë numra natyrorë. Gjithashtu $k > 2$ dhe $n > 2$.

### SHEMBULLI 2

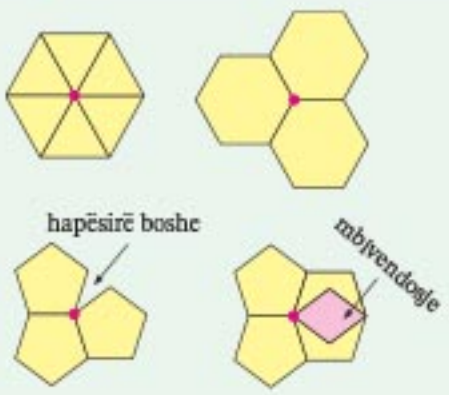
Në tabelën vijuese janë dhënë disa shumëkëndësha të rregullt n-këndësh, këndi i brendshëm i të cilëve në një kulm është numër natyror. Me ndihmën e kësaj tabele përpiqu të përcaktosh se si do të bëhet mbushja e një sipërfaqeje të caktuar.

| $n$ | $\alpha$ | $n$ | $\alpha$ | $n$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | $60^0$ | 8 | $135^0$ | 15 | $156^0$ |
| 4 | $90^0$ | 9 | $140^0$ | 18 | $160^0$ |
| 5 | $108^0$ | 10 | $144^0$ | 20 | $162^0$ |
| 6 | $120^0$ | 12 | $150^0$ | | |

Nëse n = 3, atëherë $\frac{2}{k} = 1 - \frac{2}{3}$; d.m.th. k = 6, pra nevojiten 6 trekëndësha barabrinjës në çdo pikë për të mbushur një sipërfaqe të dhënë. Nëse n = 5, atëherë $k = \frac{3}{5}$; që do të thotë se mbushja nuk mund të bëhet vetëm me pesëkëndësha të rregullt.

Nëse n = 6, atëherë k = 3, që do të thotë se mbushja mund të bëhet me gjashtëkëndësha të rregullt, ashtu që do të lidhen 3 gjashtëkëndësha të rregullt në çdo pikë të sipërfaqes.

Kontrollo vetë vlerat e tjera të n nga tabela, si në vizatimin 2.

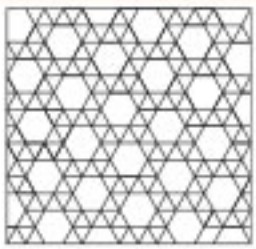
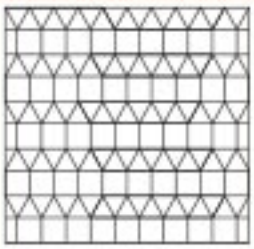
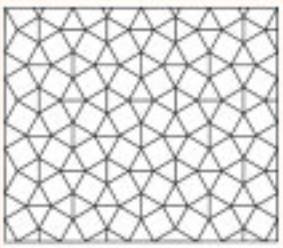
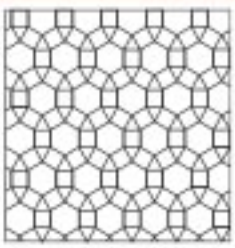


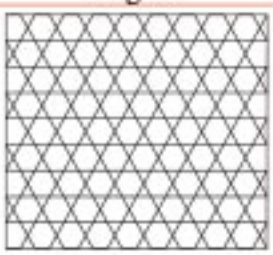
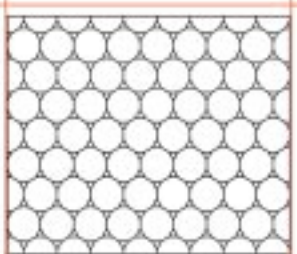
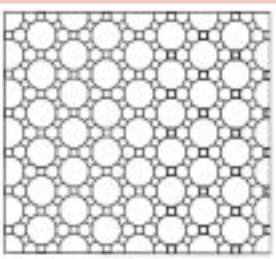
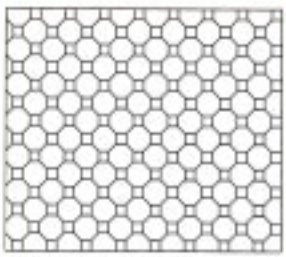

Vizatimi 2

## AKTIVITET

Përpiqu të bësh mbulim duke kombinuar dy ose më shumë shumëkëndësha të rregullt.
Përdor ndonjë softuer gjeometrik.

Ekzistojnë 8 mbushje gjysmë të rregullta të njohura edhe si mbushje Arkimediane. Në këto mbushje përdoren dy ose më shumë shumëkëndësha të rregullt në çdo pikë të sipërfaqes:

| **3.3.3.3.6** | **3.3.3.4.4** | **3.3.4.3.4** | **3.4.6.4** |
|---|---|---|---|
| i referohet mbushjes së formuar nga 4 trekëndësha barabrinjës dhe një gjashtëkëndësh i rregullt | i referohet mbushjes së formuar nga 3 trekëndësha barabrinjës dhe 2 katrorë | i referohet mbushjes së formuar nga 3 trekëndësha barabrinjës dhe 2 katrorë | i referohet mbushjes së formuar nga një trekëndësh barabrinjës, 2 katrorë dhe një gjashtëkëndësh i rregullt |
|  3.3.3.3.6 |  3.3.3.4.4 |  3.3.4.3.4 |  3.4.6.4 |

| **3.6.3.6** | **3.12.12** | **4.6.12** | **4.8.8** |
|---|---|---|---|
| i referohet mbushjes së formuar nga 2 trekëndësha barabrinjës dhe 2 gjashtëkëndësha të rregullt | i referohet mbushjes së formuar nga një trekëndësh barabrinjës dhe 2 dymbëdhjetëkëndësha të rregullt | i referohet mbushjes së formuar nga një katror, një gjashtëkëndësh i rregullt dhe një dymbëdhjetëkëndësh i rregullt | i referohet mbushjes së formuar nga një katror dhe dy tetëkëndësha të rregullt |
|  3.6.3.6 |  3.12.12 |  4.6.12 |  4.8.8 |

## SHEMBULLI 3

Mbushja nuk mund të arrihet me kombinim të trekëndëshave barabrinjës dhe katrorëve, sepse ekuacioni $k \cdot 60° + n \cdot 90° = 360°$, d.m.th. $2k + 3n = 12$ nuk ka zgjidhje në bashkësinë e numrave natyrorë për $n, k > 2$.

## DETYRA 1

Pëefito një rregull sipas të cilit do të përcaktosh cilët shumëkëndësha të rregullt mund të përdoren për mbushje gjysmë të rregullta.

## AKTIVITET

Hulumto në mjedisin tënd dhe përpiqu të gjesh shembuj të mbushjeve, si në figura 2.

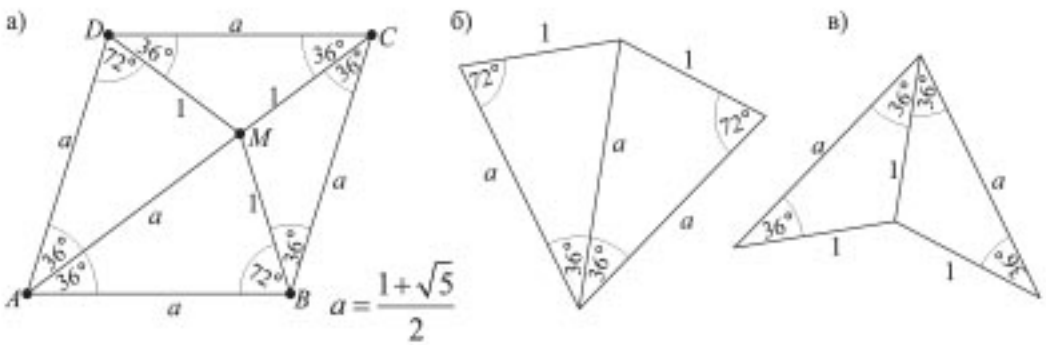


Figura 2

Mbushja është e parregullt, nëse nuk ka asnjë kufizim për llojin e shumëkëndëshave. Një mbushje e parregullt e njohur është mbushja Penrose (vizatimi 3). Ajo formohet kur rombi $ABCD$ me gjatësi brinjësh $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dhe kënd të ngushtë $\alpha = 72°$ ndahet në dy pjesë me pikën M e cila shtrihet në diagonalen $AC$ dhe $\overline{MC} = 1$ (vizatimi 4 a)). Në këtë rast, pjesa e parë është një deltoid i quajtur "dragoj" (vizatimi 4 b)) me tre kënde të brendshme prej 72°, ndërsa pjesa e dytë është e quajtur "shigjetë" (vizatimi 4 c)).



Vizatimi 3

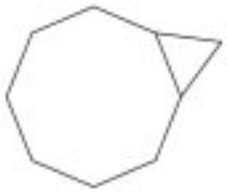



Vizatimi 4

## DETYRA PËR USHTRIME

1. A ekzistojnë pesëkëndësha me të cilët mund të bëhet mbushje?
2. Bëj një mbushje me ndihmën e një trapezi dykëndësh me kënd të ngushtë 75°.

3. A mund të gjesh se cilët shumëkëndësha të rregullt mund të shtohen në vizatimin 5 për të fituar mbushje?



Vizatimi 5

4. Vizato mbushjen e parregullt që përbëhet nga trekëndësha barabrinjës me brinjë a dhe gjashtëkëndësha të rregullt me brinjë a, të tillë që në çdo kulm të përbashkët takohen dy trekëndësha dhe dy gjashtëkëndësha.

5. Vizato mbushjen e parregullt që përbëhet nga trekëndësha barabrinjës me brinjë a dhe katrorë me brinjë a, të tillë që në çdo kulm të përbashkët takohen tre trekëndësha dhe dy katrorë.

**HULUMTIM**

Hulumto mbushjet e Escher (vizatimi 3) dhe bëj mbushjen tënde.



Figura 3

## 4.16. Trekëndëshat e ngjashëm

**AKTIVITET**

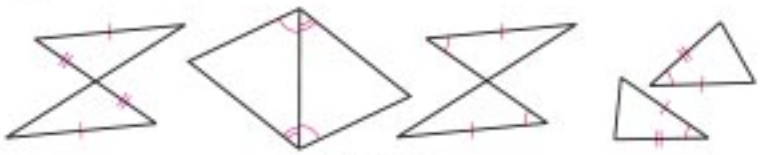
Sipas të dhënave në secilin nga vizatimet në vizatimi 1, shkruaj cilët trekëndësha janë kongruentë dhe sipas cilëve shenja.



Vizatimi 1

## AKTIVITET

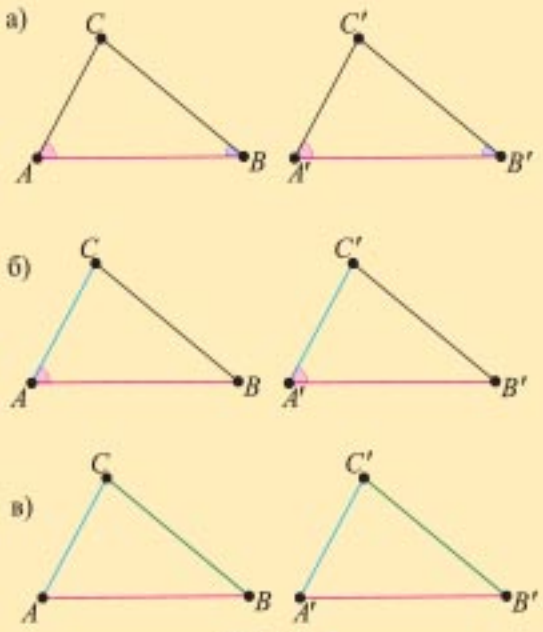
Përcakto nëse trekëndëshat në secilin nga vizatimit në vizatimin 2 janë kongruentë. Nëse përgjigja është po, atëherë trego sipas cilës shenjë..



Vizatimi 2

Shenjat për kongruencën e dy trekëndëshave:

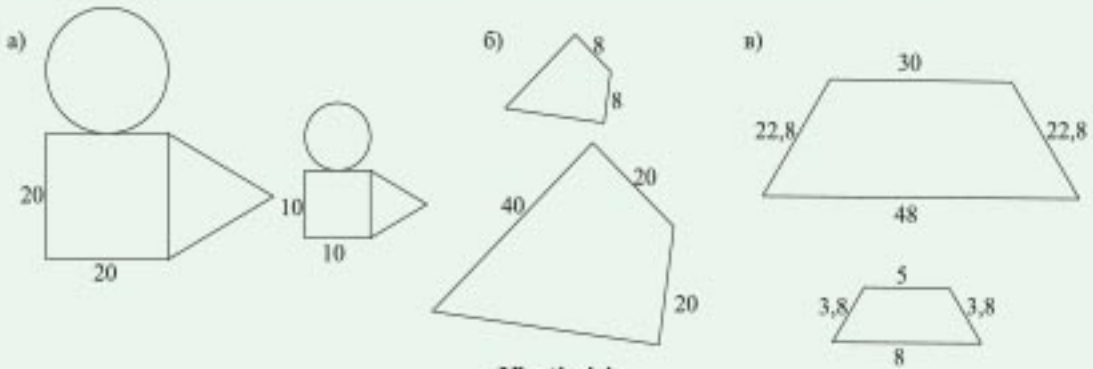
- (KBK) do të thotë se te njëri trekëndësh njëra brinjë dhe të dy këndet që shtrihen mbi të janë të barabarta me brinjën përkatëse dhe këndet që shtrihen mbi të nga trekëndëshi tjetër (vizatimi 3 a))
- (BKB) do të thotë se dy brinjë dhe këndi ndërmjet tyre te njëri trekëndësh janë të barabarta me brinjët dhe këndin përkatës te trekëndëshi tjetër (vizatimi 3 b)).
- (BBB) do të thotë se të tri brinjët e njërit trekëndësh janë të barabarta me brinjët përkatëse të trekëndëshit tjetër (vizatimi 3 c)).




Vizatimi 3

## SHEMBULLI 1

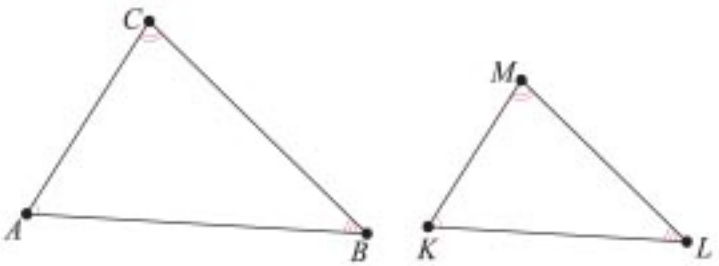
Vizatimit në vizatimin 4 a), b) dhe c) janë të ngjashme. Ato ndryshojnë vetëm në madhësi. Përpiqu të vlerësosh se si ka ndryshuar madhësia e njërës vizatim në krahasim me tjetrën.




Vizatimi 4

Dy trekëndësha që kanë kënde përkatëse të barabarta dhe brinjë përkatëse proporcionale quhen trekëndësha të ngjashëm.

Në vizatimin 5, trekëndëshat ABC dhe KLM janë të ngjashëm. Shkruajmë $\Delta\ ABC \sim \Delta\ KLM$. Kjo do të thotë se këndet përkatëse janë të barabarta dhe brinjët përkatëse janë proporcionale, d.m.th. $\frac{\overline{AB}}{\overline{KL}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{LM}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{KM}} = k$. Numri $k$ quhet koeficient i ngjashmërisë.



Vizatimi 5

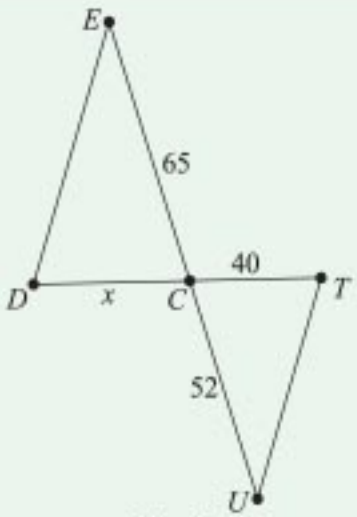
## SHEMBULLI 2

Trekëndëshat në vizatimin 6 janë të ngjashëm. Përcakto gjatësinë e brinjës së panjohur.

Nga fakti që $\Delta CUT \sim \Delta CED$ del se

$\frac{\overline{CT}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CU}}{\overline{CE}} = k$, pra

$\frac{40}{x} = \frac{52}{65} \Rightarrow x = 50.$



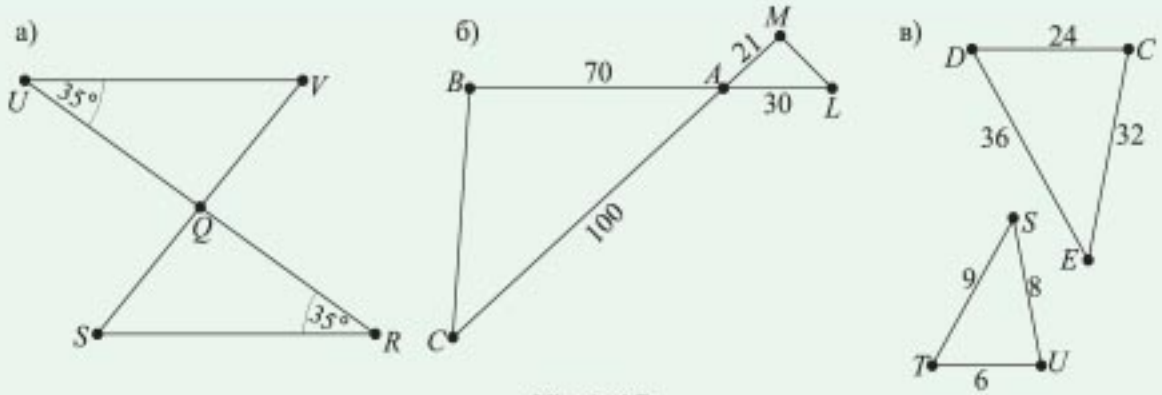
Vizatimi 6

**Kriteret për ngjashmëri**

- (KK) Nëse dy kënde të një trekëndëshi janë të barabartë me dy kënde të një trekëndëshi tjetër, atëherë trekëndëshat janë të ngjashëm.
- (BKB) Nëse një kënd i një trekëndëshi është i barabartë me një kënd të një trekëndëshi tjetër, dhe brinjët që formojnë ata kënde te të dy trekëndëshat janë proporcionale, atëherë trekëndëshat janë të ngjashëm.
- (BBB) Nëse brinjët e dy trekëndëshave janë proporcionale, atëherë trekëndëshat janë të ngjashëm.

## SHEMBULLI 3

Shpjego pse trekëndëshat në vizatimin 7, a), b) dhe c) janë të ngjashëm!




Vizatimi 7

a) Meqenëse $\measuredangle QRS = \measuredangle QUV = 35°$ dhe $\measuredangle SQR = \measuredangle VQU$ si kënde të kundërta, atëherë sipas shenjës (KK) fitohet se $\Delta VQU \sim \Delta SQR$.

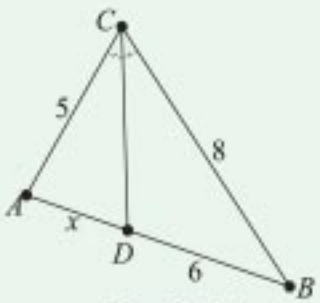
b) Meqenëse $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{21}{70} = \frac{30}{100} = \frac{\overline{AL}}{\overline{AC}}$ dhe $\measuredangle BAC = \measuredangle LAM$ si kënde të kundërta, atëherë sipas shenjës (BKB) fitohet se $\Delta BAC \sim \Delta MAL$.

c) Meqenëse $\frac{6}{24} = \frac{8}{32} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ d.m.th. $\frac{\overline{TU}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{US}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{ST}}{\overline{DE}} = \frac{1}{4}$, atëherë sipas shenjës (BBB) del se trekëndëshi $\Delta\ TUS \sim \Delta\ DCE$.

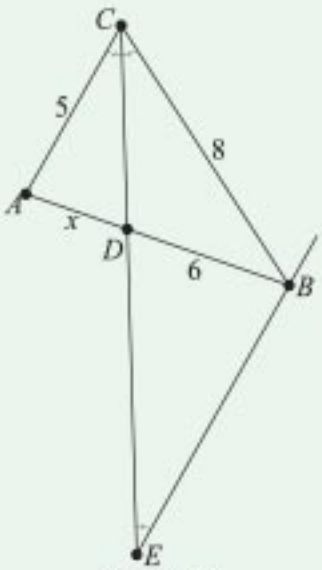
## SHEMBULLI 4

Gjej gjatësinë e brinjës së panjohur AD, sipas të dhënave nga vizatimi 8, ku CD është simetrale e këndit në C.

Së pari do të tërheqim një drejtëz nga pika B paralele me AC (vizatimi 9) dhe le të jetë E pikëprerja e drejtëzës me CD. Nga fakti se $AC \parallel BE$ rrjedh se $\measuredangle BEC = \measuredangle DCA$, si kënde të alternuara të brendshme, dhe gjithashtu $\measuredangle BEC = \measuredangle DCB$, meqë CD është simetrale e trekëndëshit $\measuredangle ACB$. Kjo do të thotë se $\Delta CEB$ është trekëndësh barakrahës, pra $\overline{BE} = \overline{BC} = 8$ Nga ana tjetër kemi, $\measuredangle ADC = \measuredangle BDE$ si kënde të kundërta. Trekëndëshat $ADC$ dhe $BDE$ janë të ngjashëm sipas (KK), pra $\frac{5}{8} = \frac{x}{6}$ d.m.th. $x = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$.

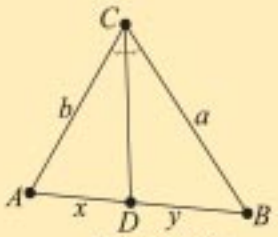



Vizatimi 8




Vizatimi 9

Simetralja e çdo këndi të brendshëm e ndan brinjën e tretë të trekëndëshit në dy segmente me të njëjtin koeficient të ngjashmërisë si edhe brinjët që e formojnë atë kënd, pra $\frac{b}{a} = \frac{x}{y}$. (vizatimi 10).



Vizatimi 10

## DETYRA 1

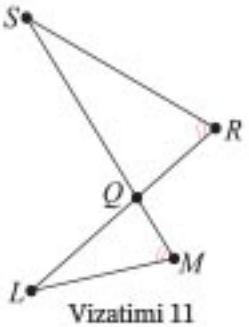
Shkruaj shenjën e ngjashmërisë për dy trekëndësha këndrejtë

## DETYRA 2

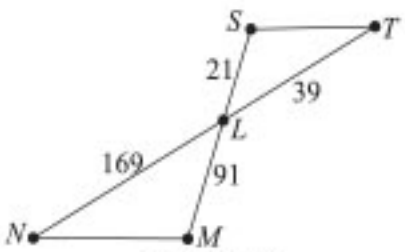
Shkruaj shenjën e ngjashmërisë për dy trekëndësha barakrahës.

## DETYRA PËR USHTRIME

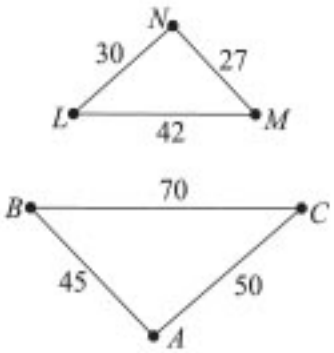
**1.** Kopjoje në fletore dhe plotëso fjalitë sipas të dhënave në vizatimit 11, 12 dhe 13!!

a)


Vizatimi 11

b)


Vizatimi 12

c)


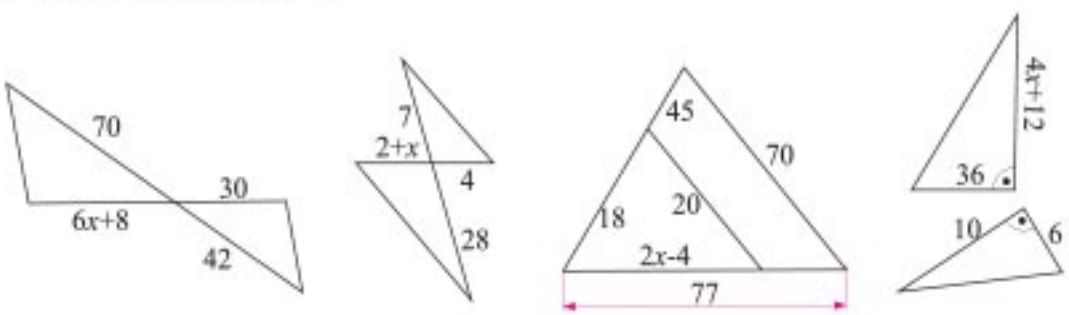
Vizatimi 13

$\Delta QRS \sim \Delta$____, sipas shenjës ____.

$\Delta LMN \sim \Delta$____, sipas shenjës ____.

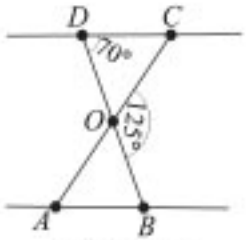
$\Delta ABC \sim \Delta$____, sipas shenjës ____.

**2.** Gjej gjatësinë e madhësisë së panjohur, sipas të dhënave të vizatimit 14, nëse dihet se trekëndëshat në vizatim janë të ngjashëm.



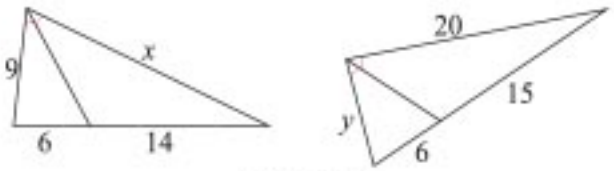
Vizatimi 14

3. Sipas vizatimit 15, përcakto $\measuredangle COD$, $\measuredangle OCD$ dhe $\measuredangle BAO$, nëse drejtëzat AB dhe CD janë paralele.



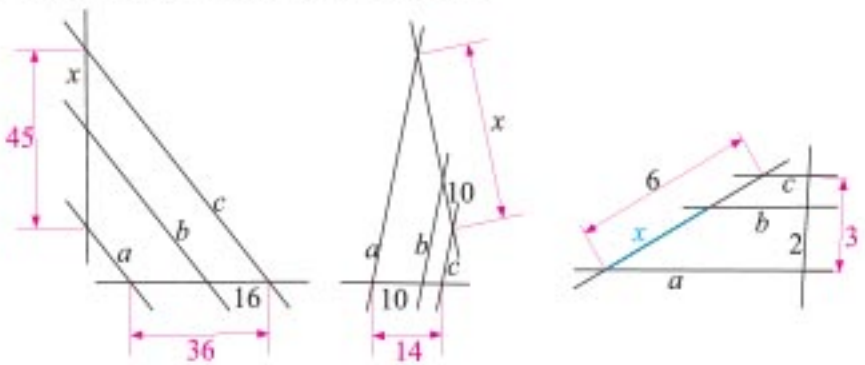
Vizatimi 15

4. Përcakto gjatësinë e brinjëve të panjohura, sipas të dhënave nga vizatimi 16.



Vizatimi 16

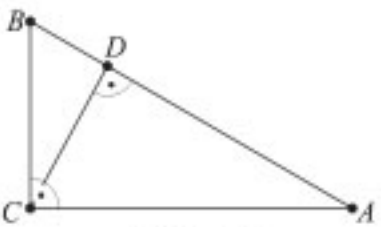
5. Përcakto gjatësinë e brinjës së panjohur x, sipas të dhënave nga secili nga vizatimet në vizatimin 17 a), b) dhe c), nëse drejtëzat a, b, c janë paralele.



а) б) в)

Vizatimi 17

6. Trego cilët nga trekëndëshat në vizatimin 18 janë të ngjashëm, nëse $\Delta ABC$ është kënddrejtë me kënd të drejtë në kulmin C dhe CD është lartësia e lëshuar mbi hipotenuzën AB.



Vizatimi 18

7. Janë dhënë dy trekëndësha barakrahës ABC dhe EFG me brinjë $\overline{AC} = \overline{BC} = 8$ dhe $\overline{EG} = \overline{FG} = 3$, $\measuredangle BAC = \measuredangle FEG = 40°$. A vlen $\Delta ABC \sim \Delta EFG$? Arsyeto përgjigjen!

# 4.17. Zbatimi i ngjashmërisë

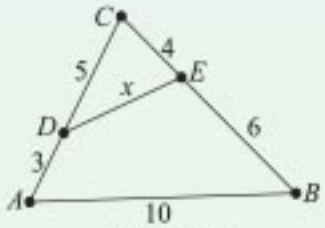
## SHEMBULLI 1

Përcakto gjatësinë e brinjës $x$ sipas të dhënave nga vizatimi 1.

Vërejmë se $x$ është brinjë e $\Delta CDE$, prandaj duhet të kontrollojmë nëse brinjët e atij trekëndëshi dhe $\Delta CBA$ kanë të njëjtin koeficient ngjashmërie.

Meqenëse $\frac{4}{5+3} = \frac{5}{4+6} = \frac{1}{2}$ dhe këndi në kulmin $C$ është i përbashkët, atëherë $\Delta CDE \sim \Delta CBA$ sipas kriterit (BKB).

Pra kemi se $\frac{x}{10} = \frac{1}{2}$ prej fitohet se $x = 5$.

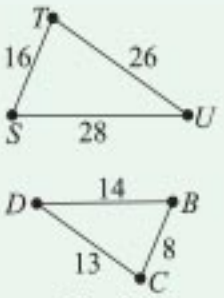


Vizatimi 1

## SHEMBULLI 2

Llogarit perimetrat e trekëndëshave SUT dhe BDC nga vizatimi 2. Përcakto koeficientin e ngjashmërisë dhe krahasoje atë me koeficientin e perimetrave të tyre.

Për koeficientin e ngjashmërisë kemi $\frac{\overline{SU}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{UT}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{TS}}{\overline{CB}} = 2 = k$. Ndërsa, për perimetrat e trekëndëshave fitohet $L_{\Delta SUT} = 28 + 26 + 16 = 70$ dhe $L_{\Delta BDC} = 14 + 13 + 8 = 35$, prej nga $\frac{L_{\Delta SUT}}{L_{\Delta BDC}} = \frac{70}{35} = 2 = k$.



Vizatimi 2

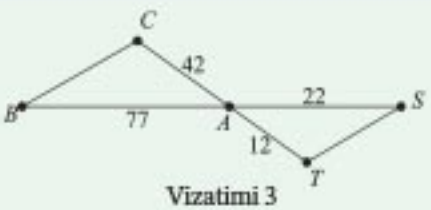


Raporti i perimetrave të dy trekëndëshave të ngjashëm është i njëjtë me koeficientin e ngjashmërisë së trekëndëshave.

## SHEMBULLI 3

Llogarit syprinat e trekëndëshave BAC dhe SAT (vizatimi 3), dhe pastaj përcakto koeficientin e ngjashmërisë dhe krahasoje atë me raportin e syprinave të tyre.

Për koeficientin e ngjashmërisë kemi $\frac{\overline{BA}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{TS}} = \frac{7}{2} = k$. Syprinat e trekëndëshave janë $P_{\Delta BAC} = \frac{77 \cdot 42 \sin \measuredangle BAC}{2}$ dhe $P_{\Delta SAT} = \frac{22 \cdot 12 \sin \measuredangle SAT}{2}$ prej nga, meqenëse $\measuredangle BAC = \measuredangle SAT$ si kënde të kryqëzuara dhe $\sin \measuredangle BAC = \sin \measuredangle SAT$, del se $\frac{P_{\Delta BAC}}{P_{\Delta SAT}} = \frac{77}{22} \cdot \frac{42}{12} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = k^2$.

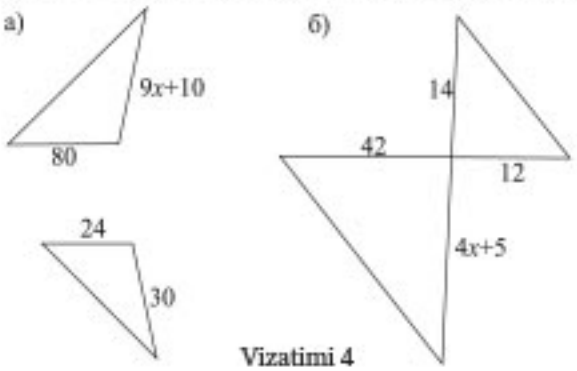


Vizatimi 3

Raporti i syprinave të dy trekëndëshave të ngjashëm është i barabartë me katrorin e koeficientit të ngjashmërisë së trekëndëshave.

## DETYRA 1

Gjej $x$, sipas të dhënave nga vizatimit 4 a) dhe b), nëse trekëndëshat janë të ngjashëm.




Vizatimi 4

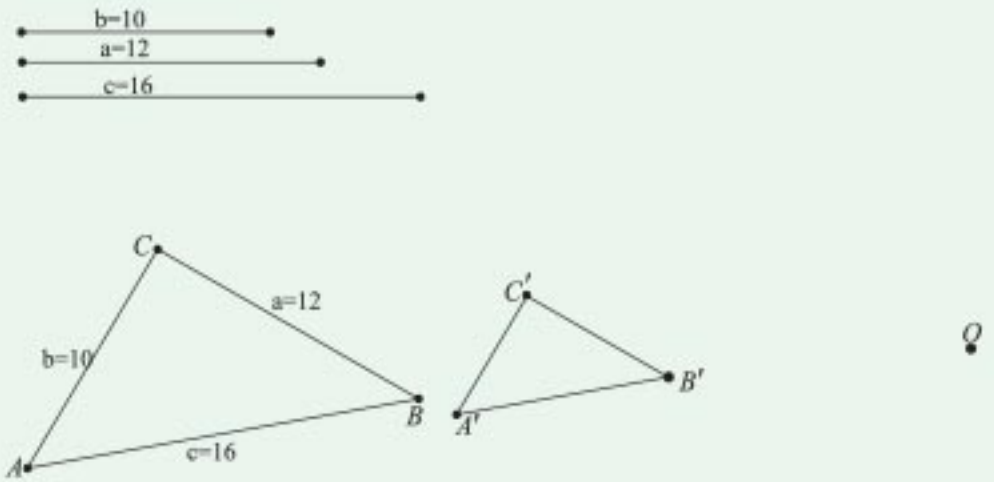
## Modele për paraqitje të ngjashmërisë ndërmjet objekteve me ndihmën e softuerit gjeometrik edukativ

### SHEMBULLI 4

Zgjidh një softuer gjeometrik edukativ. Ndërto një trekëndësh ABC me brinjë të dhëna 10, 16 dhe 12 (vizatimi 1). Pastaj zvogëloje për gjysmë, d.m.th. përdor butonin për zvogëlim (homoteti ose dilatim).



Mat gjatësitë e trekëndëshit të ri $A'B'C'$. Lëvizi kulmet e $ABC$ dhe vëreji se si ndryshojnë kulmet e $A'B'C'$. Duhet të fitosh një paraqitje të ngjashme si në vizatimin 1. Pika O është qendër e homotetisë, d.m.th. dilatimit.




Vizatimi 1

## DETYRA 2

Vizato një trekëndësh me brinjë të çfarëdoshme dhe vizato vijat e tij të rëndesës, lartësitë, simetralet e brinjëve dhe simetralet e këndeve. Me ndihmën e butonit për homoteti zgjidh një koeficient ngjashmërie $k = \frac{1}{3}$ dhe vizato një trekëndësh të ri të ngjashëm me atë të dhënë. Më pas, me të njëjtin koeficient ngjashmërie vizato vijat e tij të rëndesës, lartësitë, simetralet e brinjëve dhe simetralet e këndeve. Me mjetet për matje të gjatësisë dhe madhësisë së këndit bëj krahasim të dimensioneve te të dy trekëndëshat. Shkruaj përfundimet e fituara

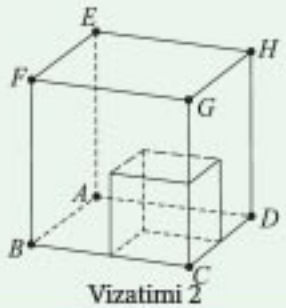


Te trekëndëshat e ngjashëm koeficienti i ngjashmërisë mbetet i njëjtë për gjatësitë e brinjëve përkatëse, lartësitë, vijat e rëndesës, simetralet e brinjëve dhe simetralet e këndeve.

### SHEMBULLI 5

Vizato një kub *ABCDEFGH*. Zgjidh butonin për homoteti dhe vizato një kub dy herë më të vogël se i dhëni. Si qendër të homotetisë zgjidh kulmin C të kubit *ABCDEFGH*.

Duhet të fitosh një paraqitje të ngjashme si në vizatimin 2.
Qendra e homotetisë është kulmi C.



Vizatimi 2

## DETYRA 3

Hulumto se si përdoret lupa (figura 1). Përkraje hulumtimin me ndihmën e softuerit gjeometrik në të cilin do t'i paraqesësh objektin origjinal dhe objektin e zmadhuar.

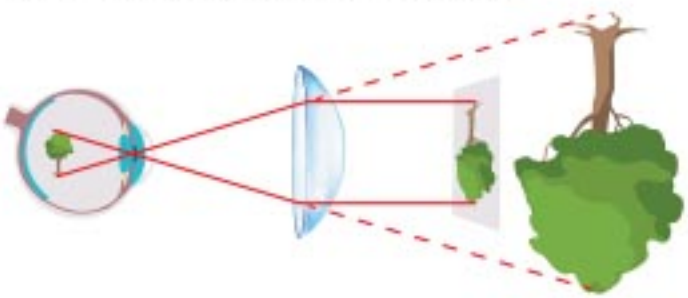


Figura 1

### SHEMBULLI 6

A e di se si mundesh me ndihmën e një shkopi, i cili është i gjatë rreth një metri, dhe një rreze dielli të përcaktosh lartësinë e një peme, nëse nuk ke instrument të specializuar për matje?

Së pari shkopi futet në tokë dhe i matet hija e tij (figura 2). Më pas matet edhe hija e pemës. Shkopi, hija e tij dhe rrezja e diellit që bie në majë të shkopit dhe e lidh atë me majën e hijes formojnë trekëndësha kënddrejtë. Në mënyrë të ngjashme pema, hija e saj dhe rrezja e diellit që bie në majë të pemës dhe e lidh atë me majën e hijes së saj formojnë trekëndësha kënddrejtë. Rrezja e diellit bie në të njëjtën kohë dhe nën të njëjtin kënd, te të dy objektet nga një distancë e madhe, prandaj mund të supozojmë se rrezet e diellit janë paralele, dhe kjo do të thotë se këta dy trekëndësha janë të ngjashëm. Me ndihmën e koeficientit të ngjashmërisë fitohet lartësia e pemës.



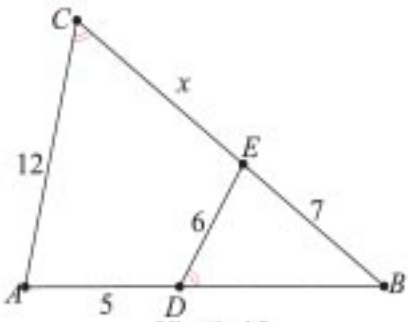
Figura 2

## DETYRA 4

Në një ditë me diell me ndihmën e një shkopi, i cili është i gjatë 1,2 metra, mat lartësinë e pemës. Bëj një model të shkopit dhe pemës me një koeficient arbitrar ngjashmërie, duke përdorur softuer edukativ gjeometrik.

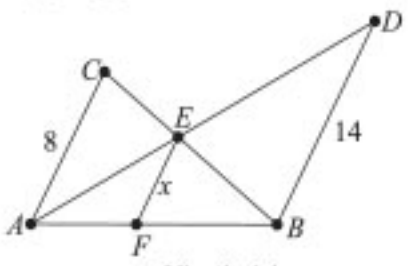
## DETYRA PËR USHTRIME

**1.** Përcakto gjatësinë e brinjës së panjohur nga të dhënat e vizatimit 3.



Vizatimi 3

**2.** Përcakto gjatësinë e brinjës së panjohur nga të dhënat e vizatimit 4, nëse drejtëzat AC, BD dhe EF janë paralele.



Vizatimi 4

3. Lartësia e një objekti mund të matet me ndihmën e një pasqyre që do ta vendosësh në tokë. Mendo se si do ta përdorësh pasqyrën për të fituar trekëndësha të ngjashëm (figura 3). Si do të veprosh nëse midis teje dhe pemës ka ndonjë pengesë, për shembull, një lumë (fotografia 4)? Bëj një model në softuerin edukativ gjeometrik, sipas kërkesave të detyrës.

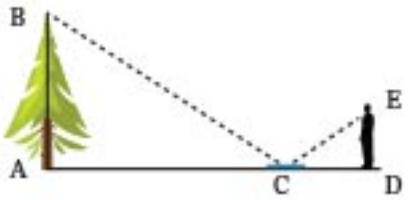



Figura 3

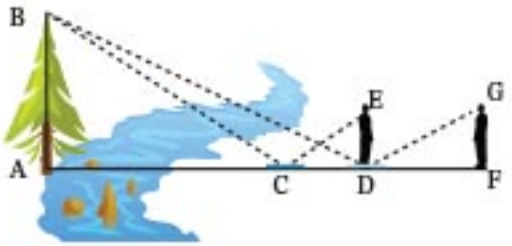
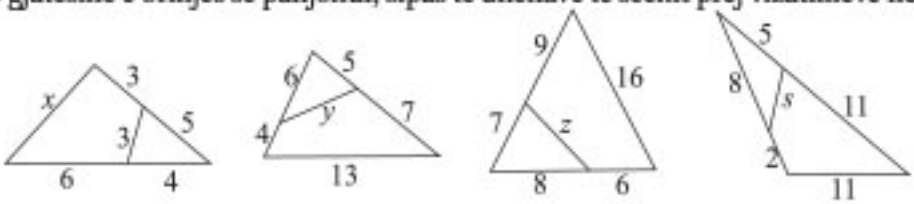



Figura 4

4. Përcakto gjatësinë e brinjës së panjohur, sipas të dhënave të secilit prej vizatimeve në vizatimin 5.




Vizatimi 5

5. Në oborrin e një ndërtese ka një pemë me lartësi 1,5 metra. Mat lartësinë e ndërtesës, nëse hija e pemës është e gjatë 4 metra, dhe e ndërtesës 7 metra.

**HULUMTIM**

Hulumto si përdoren modelet e ndërtesave, aeroplanëve, urave në inxhinierinë ndërtimore për të kontrolluar qëndrueshmërinë e tyre përpara se të ndërtohen objektet në realitet (figura 5 dhe figura 6).



Figura 5



Figura 6

# DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM

1. Jepet një gjashtëkëndësh i rregullt $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{b}$. Shpreh vektorët $\vec{BC}$, $\vec{DE}$, $\vec{EF}$ dhe $\vec{BE}$, me ndihmën e vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$.

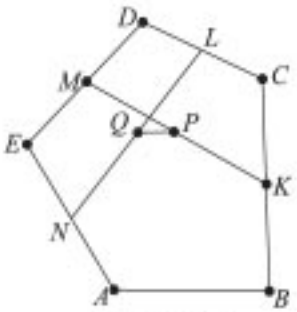
2. Thjeshto shprehjen $\vec{KM} + \vec{DF} + \vec{AC} + \vec{FK} + \vec{CD} + \vec{CA} + \vec{MP}$.

3. Thjeshto shprehjen $\vec{AC} - \vec{BC} + \vec{PM} - \vec{AP} + \vec{BM}$.

4. Gjej vektorin $\vec{x}$ nga barazimi $\vec{EF} - \vec{LM} - \vec{EL} + \vec{x} = \vec{MK}$.

5. Le të jetë $ABCDE$ katërkëndësh, ku K, L, M dhe N janë meset e brinjëve BC, CD, DE dhe EA, dhe P dhe Q janë meset e KM dhe LN, përkatësisht (Vizatimi 1). Dëshmo që segmentet PQ dhe AB janë paralele dhe përcakto raportin e gjatësive të tyre.

6. Dëshmo që meset e bazave dhe prerja e diagonaleve të trapezit shtrihen në një drejtëz.



Vizatimi 1

7. Le të jetë E mes i anës AB të paralelogramit ABCD dhe pika M prerje e AC me DE. Vërteto që $\overline{AM} : \overline{MC} = 1 : 2$ dhe $\overline{DM} : \overline{ME} = 2 : 1$.

8. Nëse A, B dhe C janë tri pika të ndryshme, atëherë a mund të jetë $\vec{AB} = \vec{AC}$ ?

9. Brinjët e trekëndëshit $\Delta ABC$ janë: $a = 6$ cm, $b = 12$ cm dhe $c = 10{,}5$ cm. Llogarit brinjët e trekëndëshit të ngjashëm $\Delta A_1B_1C_1$, nëse $\Delta ABC$, ако $b_1 = 8$ cm.

10. Brinjët e një trekëndëshi janë në raportin $a : b : c = 3 : 7 : 8$. Brinja më e gjatë e trekëndëshit të ngjashëm është 10 cm. Përcakto dy brinjët e tjera të trekëndëshit të dytë..

11. Llogarit vlerën e shprehjes:

a) $\dfrac{\sin 30^\circ - \cos 30^\circ}{5 \operatorname{ctg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ}$ b) $\dfrac{\operatorname{tg} 45^\circ}{2\cos^2 30^\circ - 1}$ c) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha}{1 - \cos\alpha}$

12. Gjej këndin α për të cilin vlen:

a) $\sin\alpha = \cos 65^\circ$ b) $\cos\alpha = \sin 42^\circ\, 50''$

c) $\sin(\alpha + 20^\circ) = \sin 50^\circ$ ç) $\operatorname{tg}(\alpha - 15^\circ) = \operatorname{ctg}(\alpha + 25^\circ)$.

13. Krahaso vlerat:

a) $\sin 72^\circ$ dhe $\sin 27^\circ$ b) $\cos 31^\circ 20'$ dhe $\cos 30^\circ 40'$

c) $\operatorname{tg} 49^\circ$ dhe $\operatorname{tg} 29^\circ$ ç) $\operatorname{ctg} 49^\circ 30'$ dhe $\operatorname{ctg} 49^\circ 55'$

14. Llogarit vlerën e funksioneve trigonometrike të tjera nëse jepet:

a) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ b) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$ ç) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{7}{25}$

**15.** Llogarit vlerën e shprehjes:

a) $4 \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha$, nëse $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ b) $\frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - 3 \sin \alpha}$, nëse $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

**16.** Zgjidh trekëndëshin kënddrejtë ABC nëse janë dhënë:

a) $\alpha = 36°2', c = 68$ b) $\beta = 64°20', a = 450$

c) $\beta = 85°10', b = 0{,}62$ ç) $a = 230, c = 320$ d) $b = 3{,}9, c = 42{,}5$.

**17.** Për këndet e ngushta në trekëndëshin kënddrejtë le të vlejë $\alpha > \beta$
$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Përcakto madhësinë e atyre këndeve.

**18.** Në një trapez barakrahës, njihen baza a, krahu c dhe këndi $\alpha$, pranë bazës. Llogarit bazën tjetër dhe lartësinë e trapezit.

**19.** Këndi në kulmin C të trekëndëshit ABC është 40°. Simetralja e këndit të jashtëm dhe të brendshëm në kulmin C e presin drejtëzën AB dhe formojnë një trekëndësh barakrahës CDE. Përcakto këndet e trekëndëshit ABC.

**20.** Lartësia e tërhequr kah hipotenuza dhe simetralja e këndit të drejtë formojnë një kënd 10º. Përcakto këndet e ngushta të trekëndëshit.

**21.** Me ndihmën e këndeve $\alpha$ dhe $\beta$ shpreh këndin $\phi$ të cilin simetralja e këndit $\alpha$ e formon me brinjën e kundërt.

**22.** Nëse simetralet e dy këndeve të brendshme $\alpha$ dhe $\beta$ priten nën kënd $\gamma$, i cili është i barabartë me këndin e tretë në trekëndëshin, atëherë përcakto atë kënd $\gamma$.

**23.** Simetralja e një këndi në trekëndësh me lartësinë e lëshuar kah brinja e kundërt formon një kënd që është i barabartë me gjysmëdallimin e dy këndeve të tjerë në trekëndësh. Vërteto!

**24.** Në trekëndëshin ABC lartësia CD dhe vija e rëndesës CE e ndajnë këndin ACB në tri pjesë të barabarta. Përcakto këndet e trekëndëshit ACB.

**25.** Drejtëza që është normale me bazën e trekëndëshit barakrahës dhe e pret krahun dhe vazhdimin e krahut tjetër, përmes kulmit përsëri formon një trekëndësh barakrahës. Vërteto!

**26.** Lartësia e cila është tërhequr kah krahu i trekëndëshit barakrahës formon me bazën një kënd që është i barabartë me gjysmën e këndit në kulm. Vërteto!

**27.** Lartësitë $AA'$ dhe $BB'$ të $\Delta ABC$ formojnë me brinjën AB kënde shuma e të cilëve është e barabartë me këndin në kulmin C. Vërteto!

**28.** Në hipotenuzën BC të trekëndëshit kënddrejtë ABC janë dhënë dy pika D dhe E, të tilla që $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}$ Përcakto këndin DAE.

**29.** Në trekëndëshin ABC gjatësia e lartësisë CH është e barabartë me gjysmën e brinjës AB. Këndi i brendshëm BAC është i barabartë me 75º. Përcakto këndin ABC.

**30.** Le të jetë CD lartësia në trekëndëshin kënddrejtë ABC. Le të jenë R dhe S qendrat e rrathëve të brendashkruara në trekëndëshat ACD dhe BCD. Nëse drejtëzat CR dhe CS e presin AB në P dhe Q, përkatësisht, atëherë $\overline{AC} = \overline{AQ}$ dhe $\overline{BC} = \overline{BP}$. Vërteto!

**31.** Nëse vlejnë supozimet nga detyra 30, vërteto se qendra e rrethit të brendashkruar për ABC është qendër edhe për rrethin e jashtashkruar për trekëndëshin CPQ.

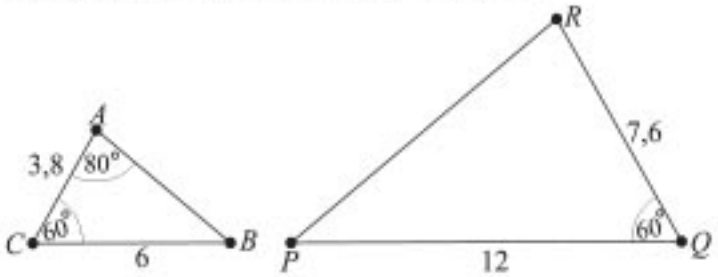
**32.** Le të jenë E dhe F pika që shtrihen në brinjët PQ dhe PR, përkatësisht të ΔPQR. Sipas të dhënave, përcakto nëse $EF \parallel QR$ kur kemi se:

a) $\overline{PE} = 3{,}9$ cm, $\overline{EQ} = 3$ cm, $\overline{PF} = 3{,}6$ cm dhe $\overline{FR} = 2{,}4$ cm,

b) $\overline{PE} = 4$ cm, $\overline{EQ} = 4{,}5$ cm, $\overline{PF} = 8$ cm dhe $\overline{FR} = 9$ cm,

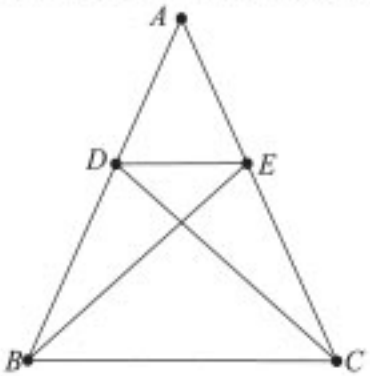
c) $\overline{PE} = 1{,}28$ cm, $\overline{EQ} = 2{,}56$ cm, $\overline{PF} = 0{,}18$ cm dhe $\overline{FR} = 0{,}36$ cm.

**33.** Sipas të dhënave nga vizatimi 2 përcakto madhësinë e ∢QPR.

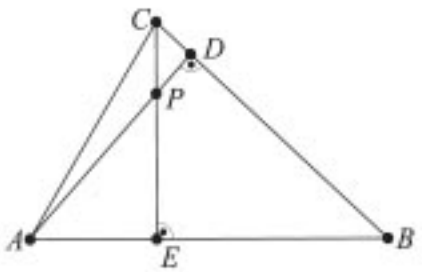



Vizatimi 2

**34.** Nëse $\Delta ABE \cong \Delta ACD$, atëherë $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ (vizatimi 3). Vërteto!




Vizatimi 3




Vizatimi 4

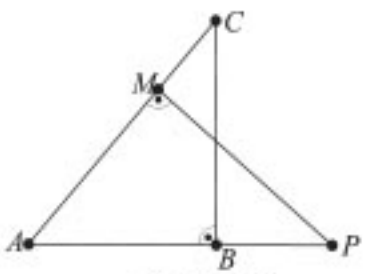
**35.** Lartësitë AD dhe CE priten në pikën P, (vizatimi 4). Vërteto se::

a) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$ b) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$ c) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$ ç) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$

**36.** Pika E shtrihet në vazhdimin e brinjës AD të paralelogramit ABCD. Nëse BE e pret brinjën CD në pikën F. Vërteto se $\Delta ABE \sim \Delta CFB$.

**37.** Trekëndëshat ABC dhe AMP janë kënddrejtë me kënde të drejta në kulmet B dhe M, përkatësisht, (vizatimi 5).
Vërteto se:

a) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$ b) $\frac{\overline{CA}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{MP}}$.



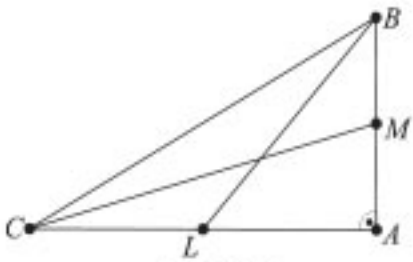

Vizatimi 5

**38.** Një shtyllë vertikale me lartësi 6 metra ka hije të gjatë 4 metra. Në të njëjtën kohë një kullë ka hije të gjatë 28 metra. Sa është e lartë kulla?

**39.** Trekëndëshat ABC dhe DEF janë të ngjashëm dhe kanë syprina 64 dhe 121 centimetra katrorë, përkatësisht. Nëse $\overline{EF} = 15{,}4$ cm, përcakto gjatësinë e brinjës BC.

**40.** Në trapezin ABCD ($AB \| CD$) diagonalet AC dhe BD priten në pikën O. Nëse $\overline{AB} = 2\overline{CD}$, atëherë sa është $\frac{P_{\Delta ABO}}{P_{\Delta CDO}}$?

**41.** Le të jenë CM dhe BL vija të rëndesës në trekëndëshin kënddrejtë BCA, me kënd të drejtë në A (vizatimi 6). Vërteto se $4(\overline{BL}^2 + \overline{CM}^2) = 5\overline{BC}^2$.



Vizatimi 6

## Tema 5:

# MATJA

**Me shtjellimin e kësaj teme do të aftësoheni:**

1. Të zgjidhni probleme nga konteksti real duke zbatuar perimetrin dhe syprinën e formave 2D.
2. Të zgjidhni probleme reale me syprinën dhe vëllimin e formave 3D dhe të përdorni njësitë përkatëse të matjes.

# 5.1. Perimetri dhe syprina e formave 2D

## DETYRA 1

Vijat e bardha të një vendkalimi këmbësorësh janë drejtkëndësha 3 m të gjatë, 50 cm të gjerë, ndërsa distanca midis dy vijave fqinje është 50 cm. Sa është syprina totale që duhet lyer me bojë të bardhë, nëse rruga është 6 m e gjerë, ndërsa vijat skajore janë në distancë 2,5 dm nga trotuari?



Figura 1

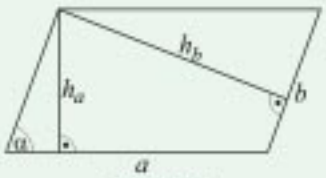
## DETYRA 2

Njehsoni perimetrin dhe syprinën e:
a) një katrori me diagonale $d = 15$ cm,
b) një drejtkëndëshi me brinjë $a = 7$ cm dhe diagonale $d = 25$ cm.

## SHEMBULLI 1

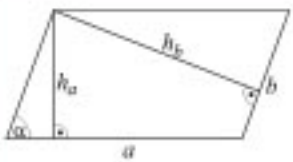
Njehsoni perimetrin dhe syprinën e një paralelogrami me brinjë $a = 10$ cm, $b = 12$ cm dhe dhe kënd të ngushtë $\alpha = 30°$ (vizatimi 1).

Perimetri i paralelogramit është $P = 2a + 2b = 2 \cdot (a + b) = 2(10 + 12) = 2 \cdot 22 = 44$ cm, ndërsa syprina është e barabartë me $S = a \cdot h_a = a \cdot b \cdot \sin\alpha = 10 \cdot 12 \cdot \sin 30° = 10 \cdot 12 \cdot 0{,}5 = 60$ cm$^2$.

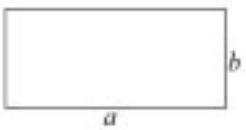


Vizatimi 1

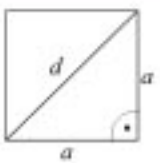
**Paralelogrami**



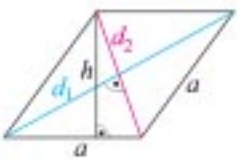

$S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$
$S = a \cdot b \cdot \sin\alpha$




$S = a \cdot b$

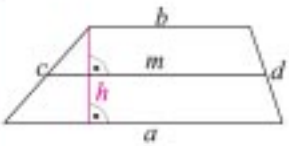


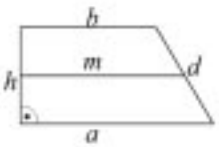

$S = a^2$
$S = \frac{d^2}{2}$

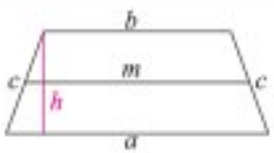



$S = a \cdot h$
$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

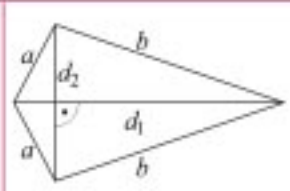
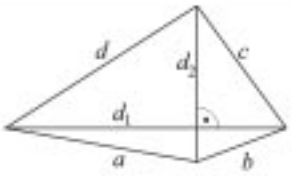
**Trapezi**




$S = \frac{(a+b)h}{2}$, $S = mh$

| | |
|---|---|
| Trapezoidi |   deltoidi dhe katërkëndëshi me diagonale reciprokisht normale $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ |

## DETYRA 3

Njehsoni perimetrin e një drejtkëndëshi syprina e të cilit është 756 cm², nëse brinjët e tij janë në raport 3:7.

## DETYRA 4

Njehsoni perimetrin dhe syprinën e një drejtkëndëshi nëse njëra brinjë e tij është 1 dm, ndërsa brinja tjetër është për 2 cm më e vogël se diagonalja.

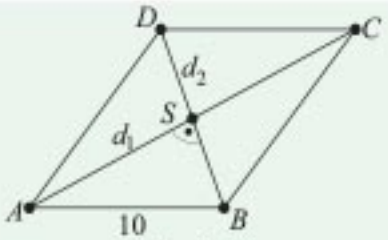
## DETYRA 5

Në një drejtkëndësh, prerja e diagonaleve është 4 cm më afër brinjës më të madhe sesa brinjës më të vogël. Njehsoni syprinën e drejtkëndëshit, nëse perimetri i tij është 56 cm.

## SHEMBULLI 2

Njehsoni syprinën e një rombi me brinjë 1 dm dhe një diagonale 12 cm.

Le të jetë $d_2 = 12$ cm. Nga trekëndëshi kënddrejtë $ABS$ (vizatimi 2) fitohet se $\left(\frac{12}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = 10^2$ pra $d_1 = 16$ cm. Syprina është $S = \frac{d_1 d_2}{2} = 96$ cm².



Vizatimi 2

## DETYRA 6

Lartësia e rombit është 48 cm, ndërsa diagonalja më e madhe është 8 dm. Njehsoni perimetrin e rombit.

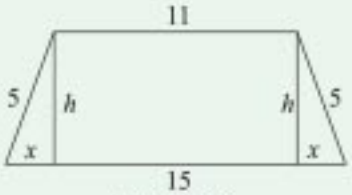
## SHEMBULLI 3

Syprina e një katërkëndëshi me diagonale reciprokisht normale $d_1 = 12$ cm dhe $d_2 = 7$ cm është e barabartë me $S = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{12 \cdot 7}{2} = 42$ cm².

## SHEMBULLI 4

Jepet një trapez barakrahës me baza $a = 15$ cm, $b = 11$ cm dhe krah $c = 5$ cm. Përcaktoni lartësinë dhe syprinën e trapezit.

Nga vizatimi 3 kemi $15 = 2x + 11$, pra $x = 2$.
Tani, nga teorema e Pitagorës fitojmë
$h = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$, pra $S = \frac{(15+11)\sqrt{21}}{2} = 13\sqrt{21}$ cm².



Vizatimi 3

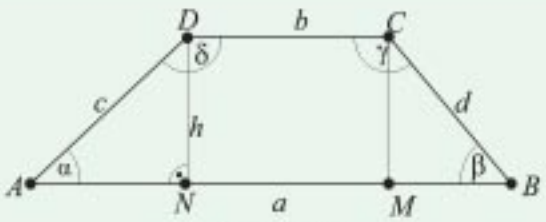
## SHEMBULLI 5

Jepet një trapez me baza $a = 35$cm, $b = 14$ cm dhe krahë $c = 13$ cm, $d = 20$ cm. Përcaktoni lartësinë dhe syprinën e trapezit.

Nga vizatimi 4, kemi $\overline{AN} + \overline{MB} = 35 - 14 = 21$ cm.
Nëse vendosim $\overline{AN} = x$, atëherë $\overline{MB} = 21 - x$ dhe nga teorema e Pitagorës për $\Delta AND$ dhe $\Delta MBC$ fitojmë $h^2 = 13^2 - x^2$ dhe $h^2 = 20^2 - (21-x)^2$, përkatësisht.
Prandaj

$$13^2 - x^2 = 20^2 - (21-x)^2$$
$$169 - x^2 = 400 - 441 + 42x - x^2$$
$$42x = 210$$
$$x = 5$$

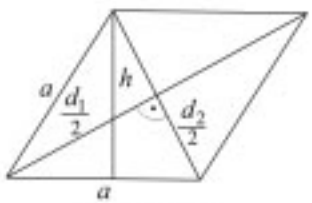
Pra $h^2 = 13^2 - 5^2$ domethënë $h = 12$ cm.
Për syprinën e trapezit kemi
$S = \frac{(35+14)}{2} \cdot 12 = 294$ cm².



Vizatimi 4

## SHEMBULLI 6

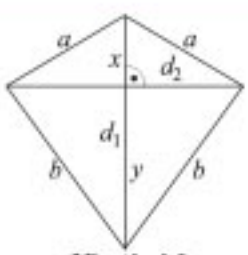
Një romb me diagonale $d_1 = 16$ cm dhe $d_2 = 12$ cm
ka $S = \frac{d_1 d_2}{2} = 96$ cm², $a = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = 10$ cm, dhe
$h = \frac{P}{a} = 9{,}6$ cm (vizatimi 5).



Vizatimi 5

## SHEMBULLI 7

Një deltoid me brinjë $a = 4$ dm, $b = 5$ dm dhe $d_2 = 7$ dm ($d_2$ nuk është bosht simetrie e deltoidit) ka
$d_1 = x + y = \sqrt{4^2 - 3{,}5^2} + \sqrt{5^2 - 3{,}5^2} \approx 5{,}51$ dm,
ku $x$ dhe $y$ janë pjesët e diagonales së përcaktuar nga trekëndëshat barakrahës,
$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \approx 19{,}29$ dm² dhe $P = 2(a+b) = 18$ dm.

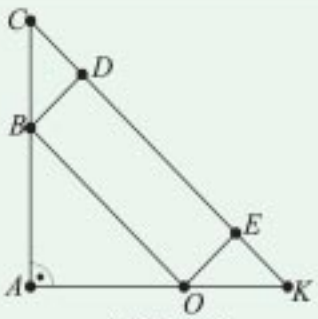


Vizatimi 6

## SHEMBULLI 8

Jepet një trekëndësh barakrahës kënddrejtë. Në të është brendashkruar një drejtkëndësh, brinja më e gjatë e të cilit shtrihet mbi hipotenuzë, ndërsa dy kulmet e tjera shtrihen mbi katetat, si në vizatimin 7. Njehsoni syprinën e drejtkëndëshit nëse dihet se brinjët e tij janë në raport 5:2, ndërsa hipotenuza është e gjatë 63 cm.

Këndet në $C$ dhe $K$ janë 45°, që do të thotë se $\Delta OKE$ dhe $\Delta CBD$ janë trekëndësha kënddrejtë barakrahës me katete $2k$ (vizatimi 7). Atëherë hipotenuza është $63 = 5k + 2 \cdot 2k$, prej nga $k = 7$. Pra, $a = 14$ cm, $b = 35$ cm, prandaj $S = 490$ cm$^2$.



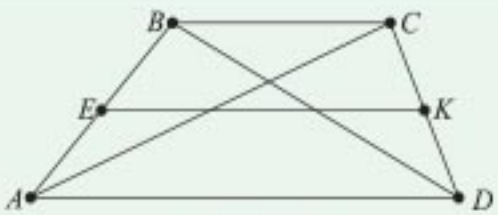
Vizatimi 7

## SHEMBULLI 9

Diagonalet e një trapezi janë simetrale të këndeve të brendshme të bazës më të madhe (vizatimi 8). Nëse trapezi ka perimetër 36 cm dhe mesorja është e gjatë 11.7 cm, atëherë sa janë brinjët e trapezit?

Këndet $\measuredangle DAC = \measuredangle BCA$ dhe $\measuredangle ADB = \measuredangle CBD$ janë të barabartë si kënde të kundërt në kulm (kënde alternative), prandaj $\Delta ACB$ dhe $\Delta BDC$ janë barakrahës, nga ku rrjedh se $\overline{AB} = \overline{BC}$ dhe $\overline{BC} = \overline{CD}$, prej nga $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = x$, a $\overline{AD} = y$.

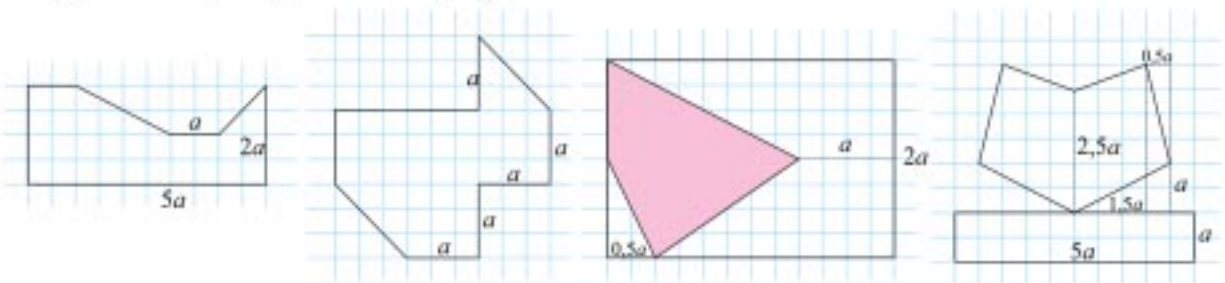
Atëherë $\begin{cases} 3x + y = 36 \\ \dfrac{x + y}{2} = 11{,}7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6{,}3 \text{ cm} \\ y = 17{,}1 \text{ cm} \end{cases}$.



Vizatimi 8

## DETYRA 7

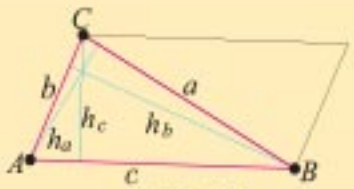
Nxjerr formulat me të cilat do t'i njehsoni syprinën dhe perimetrin e figurave të mëposhtme të shprehura përmes brinjës $a$, për secilën nga figurat në vizatimin 9.



Vizatimi 9

## Perimetri dhe syprina e trekëndëshit

Syprina e trekëndëshit të cilit i njihen njëra brinjë dhe lartësia përkatëse (vizatimi 10), njehsohet me formulën $S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$.



Vizatimi 10

Nëse njihen gjatësitë e të gjitha brinjëve të tij përdoret $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$ (**Formula e Heronit**)

Syprina e një **trekëndëshi barabrinjës** me brinjë $a$ është $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

### SHEMBULLI 1

Syprina e një trekëndëshi me brinjë $a = 5$, $b = 4$ dhe $c = 7$ është e barabartë me

$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{8 \cdot (8-5) \cdot (8-4) \cdot (8-7)} = \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1} = \sqrt{6 \cdot 4^2} = 4\sqrt{6}$,
ku $s = \frac{5+4+7}{2} = 8$.

### SHEMBULLI 2

Syprina e një **trekëndëshi këndrejtë** me katete 3 cm dhe 4 cm është $S = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6\ \text{cm}^2$.

### SHEMBULLI 3

Syprinat e dy trekëndëshave të ngjashëm janë 15 dhe 18, ndërsa brinja $a$ e trekëndëshit të parë është 5, atëherë brinja përkatëse $a_1$ e trekëndëshit të dytë është $a_1^2 = \frac{a^2 S_1}{S} = \frac{25 \cdot 18}{15} = 30$, pra $a_1 = \sqrt{30}$.

### SHEMBULLI 4

Perimetri i një trekëndëshi barakrahës është 64 cm, ndërsa ndryshimi midis krahut dhe bazës është 11 cm. Njehsoni syprinën e trekëndëshit.

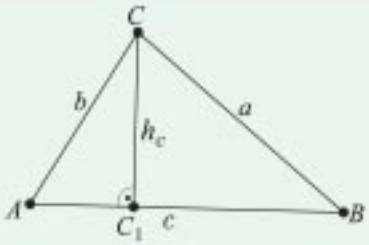
Le të jetë a baza, dhe b krahu i trekëndëshit. Atëherë kemi $a + 2b = 64$ dhe $b - a = 11$. Duke i mbledhur këto barazime fitojmë $3b = 75$, pra $b = 25$ cm. Nga kjo rrjedh se $a = 14$ cm. Nga teorema e Pitagorës për lartësinë fitojmë $h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{625 - 49} = 24$ cm, prandaj syprina është $S = \frac{ah}{2} = 168\ \text{cm}^2$.

## SHEMBULLI 5

Njehsoni syprinën e trekëndëshit nëse $a = 73$ dm, $b = 52$ dm dhe $h_c = 48$ dm.

Nga teorema e Pitagorës për $\Delta C_1BC$ dhe $\Delta AC_1C$ fitojmë $\overline{C_1B} = \sqrt{a^2 - h_c^2} = 55$ dm dhe $\overline{AC_1} = \sqrt{b^2 - h_c^2} = 20$ dm, (vizatimi 11) pra rrjedh se $c = 75$ dm.

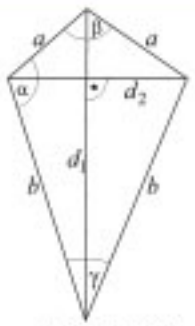
Tani, syprina është $S = \frac{75 \cdot 48}{2} = 1800 \text{ dm}^2$.



Vizatimi 11

## SHEMBULLI 6

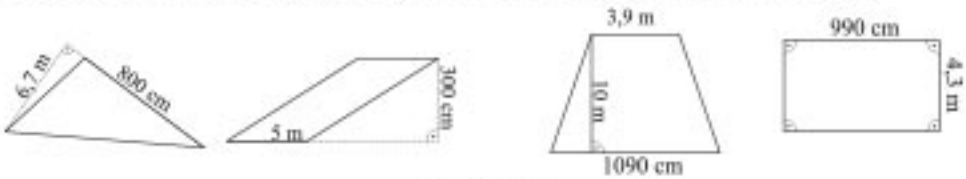
Një deltoid me brinjë $a = 4$ dm, $b = 5$ dm dhe $d_1 = 7$ dm ($d_1$ është bosht simetrie e deltoidit) ka syprinë $S = 2 \cdot S_\Delta = 8\sqrt{6} \text{ dm}^2$, ku $S_\Delta$ është syprina e trekëndëshit me brinjë $a$, $b$ dhe $d_1$ njehsuar me formulën e Heronit $P = 2(a + b) = 18$ dm dhe $d_2 = \frac{2P}{d_1} = \frac{16\sqrt{6}}{7}$ dm (vizatimi 12).



Vizatimi 12

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Sipas të dhënave në vizatim, njehsoni syprinën e secilës figurë në vizatimin 13.



Vizatimi 13

2. Përcaktoni gjatësitë e lartësive në paralelogramin me syprinë 56 cm² dhe brinjë $a = 5{,}2$ cm dhe $b = 4{,}8$ cm.

3. Dy brinjë të paralelogramit janë në raport 3:4, ndërsa perimetri i tij është 28 dm. Përcaktoni gjatësitë e brinjëve të paralelogramit.

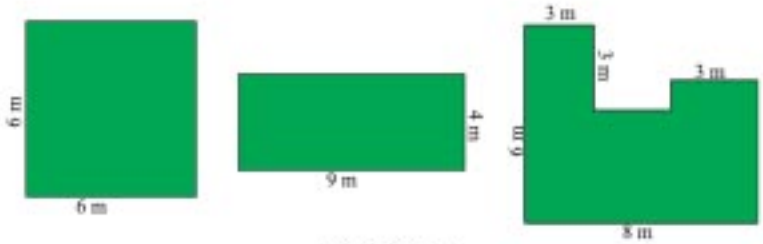
4. Dihet se:
   a) Një katror ka syprinë $S = 36$ cm². Përcaktoni gjatësitë e brinjës dhe diagonales së katrorit.
   b) Një katror ka perimetër $P = 12$ cm. Përcaktoni gjatësitë e brinjës dhe diagonales së katrorit.

5. a) Jepet një drejtkëndësh me syprinë 108 dm² dhe brinjë $a = 120$ cm. Përcaktoni gjatësinë e brinjës tjetër dhe diagonales së drejtkëndëshit.
   b) Jepet një drejtkëndësh me perimetër 246 cm dhe brinjë b = 80 cm. Përcaktoni gjatësinë e brinjës tjetër dhe diagonales së drejtkëndëshit.

6. Në një katror me brinjë $a$ është brendashkruar një katror tjetër, kulmet e të cilit e ndajnë brinjën e katrorit të parë në raport 2:3. Përcaktoni raportin e syprinave të katrorëve.

7. Njehsoni syprinën e një trapezi barakrahës me baza 20 cm dhe 12 cm, diagonalet e të cilit janë reciprokisht normale.

8. Tre vëllezër kanë kopshte me përmasa të dhëna në vizatimin 12. Njehsoni syprinën e këtyre kopshteve.



Vizatimi 12

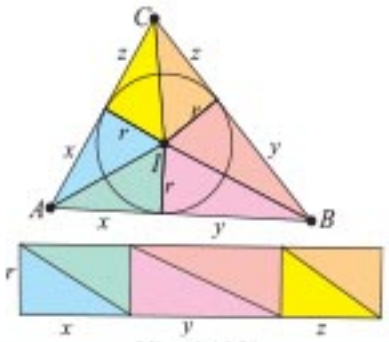
## 5.2. Njehsimi i rrezes së rrethit të brendashkruar dhe të jashtashkruar

### AKTIVITET

Në një softuer gjeometrik, vizatoni një trekëndësh, përcaktoni qendrën e rrethit të brendashkruar dhe nga ajo qendër tërhiqni rrezet kah brinjët dhe segmentet deri në kulme.

Në këtë mënyrë keni formuar gjashtë trekëndësha këndrejtë. Krijoni kopje të këtyre trekëndëshave dhe prej tyre formoni një drejtkëndësh.

Duhet të fitoni një paraqitje si në vizatimin 1.



Vizatimi 1

Syprina e trekëndëshit është $S = \frac{r(a+b+c)}{2} = r \cdot s$, ku $s$ është gjysmëperimetri, ndërsa $r$ është rrezja e rrethit të brendashkruar në trekëndësh.

Syprina e trekëndëshit është $S = \frac{abc}{4R}$, ku $a$, $b$, $c$ janë brinjët, ndërsa $R$ është rrezja e rrethit të jashtashkruar rreth trekëndëshit.

### SHEMBULLI 1

Për $\Delta ABC$ me brinjë $a = 4$ cm, $b = 6$ cm dhe $c = 8$ cm rrezja e rrethit të brendashkruar është

$r = \frac{S}{s} = \frac{\sqrt{9 \cdot (9-4) \cdot (9-6) \cdot (9-8)}}{9} = \frac{\sqrt{15}}{3}$ cm, ndërsa rrezja e rrethit të jashtashkruar është

$R = \frac{abc}{4S} = \frac{192}{12\sqrt{15}} = \frac{16\sqrt{15}}{15}$ cm.

## SHEMBULLI 2

Katetat e një trekëndëshi këndrejtë janë 8 dm dhe 18 cm. Përcaktoni rrezen e rrethit të jashtashkruar rreth tij.

Nga teorema e Pitagorës kemi se hipotenuza ka gjatësi $c = \sqrt{80^2 + 18^2} = 82$ cm. Nga teorema e Talesit rrjedh se $R = \frac{c}{2} = 41$ cm.

## SHEMBULLI 3

Një ishull trafiku, i cili ka formën e një trekëndëshi barakrahës me krah 17 m dhe bazë 16 m, duhet të rregullohet duke vendosur një fontanë rrethore të brendashkruar në trekëndësh. Përcaktoni rrezen e fontanës.

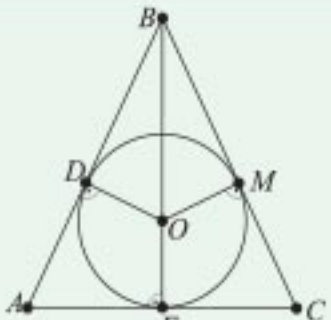
Duke zbatuar teoremën e Pitagorës $\overline{BE}^2 = 17^2 - 8^2 = 15^2$, pra $\overline{BE} = 15$ m (vizatimi 2). Meqenëse $EC$ dhe $MC$ janë segmente tangjente, rrjedh se $\overline{EC} = \overline{MC} = \frac{16}{2} = 8$ m, prej nga rrjedh se $\overline{BM} = 17 - 8 = 9$ m.

Rrezja e kërkuar është

$$r = \sqrt{\overline{BO}^2 - \overline{BM}^2} = \sqrt{\left(\overline{BE} - r\right)^2 - 9^2} = \sqrt{(15 - r)^2 - 81},$$

prej nga, duke ngritur në katror, fitohet

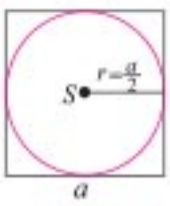
$r^2 = 225 - 30 \cdot r + r^2 - 81$, pra $r = \frac{144}{30} = \frac{24}{5}$ m.



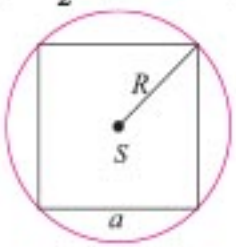
Vizatimi 2

## SHEMBULLI 4

Rrezja e rrethit të brendashkruar në një katror me brinjë $a$ është $r = \frac{a}{2}$ (vizatimi 3), ndërsa e rrethit të jashtashkruar rreth një katrori me brinjë $a$ është $R = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (vizatimi 4).



Vizatimi 3



Vizatimi 4

## DETYRA 2

Një drejtkëndësh me brinjë $a = 7$ cm dhe $b = 5$ cm është i brendashkruar në një rreth. Përcaktoni rrezen e tij.

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Njehsoni syprinën e një rombi me diagonalen më të vogël 6 cm dhe rreze të rrethit të brendashkruar 24 mm.
2. Në një deltoid me brinjë 4 dhe 5 është brendashkruar një rreth me rreze 2. Njehsoni syprinën e deltoidit.

3. Në një romb është brendashkruar një rreth me rreze $r$. Shprehni gjatësinë e brinjës $a$ të rombit përmes rrezes, nëse dihet se ajo është gjashtë herë më e vogël se shuma e diagonaleve.

4. Njehsoni syprinën e një drejtkëndëshi të brendashkruar në një rreth me rreze 12,5 cm, nëse njëra brinjë e tij është 7 cm.

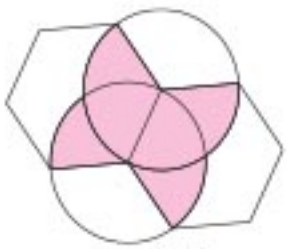
5. Jepet një drejtkëndësh $ABCD$ me brinjë 8 cm dhe 6 cm. Me diagonalen $AC$ ai ndahet në dy trekëndësha, në të cilët janë brendashkruar rrathë. Përcaktoni distancën midis qendrave të rrathëve.

6. Një drejtkëndësh është i brendashkruar në një rreth me rreze 8 cm. Diagonalet e tij priten nën kënd të ngushtë prej 56°. Njehsoni perimetrin e drejtkëndëshit dhe rezultatin e fituar rrumbullakoje në një decimale.

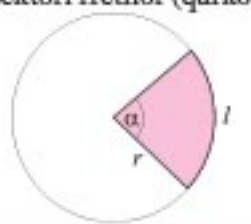
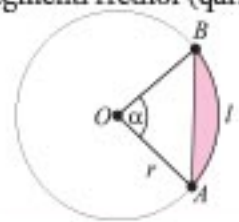
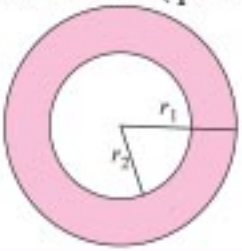
## 5.3. Syprina e rrethit dhe pjesëve të rrethit

### DETYRA 1

Janë dhënë dy gjashtëkëndësha të rregullt me brinjë $a = 10$ cm dhe një brinjë të përbashkët. Në kulmet e brinjës së përbashkët janë ndërtuar dy rrathë me rreze $r = 10$ cm. Njehsoni syprinën e figurës që fitohet si prerje, si në vizatimin 1.



Vizatimi 1

| | | |
|---|---|---|
| Sektori rrethor (qarkor)<br>  | Sektori rrethor i një rrethi me rreze $r$ është pjesa e rrethit e mbyllur midis dy rrezeve. | $S = \frac{r^2\pi\alpha}{360°}$ ose $S = \frac{lr}{2}$ |
| Segmenti rrethor (qarkor)<br>  | Segmenti rrethor është pjesa e rrethit e kufizuar nga një kordë. | $S = S_1 - S_{\Delta ABO}$, ku $S_1$ është syprina e sektorit rrethor |
| Unaza rrethore (qarkore)<br>  | Unaza rrethore është pjesa e rrafshit e kufizuar nga dy rrathë koncentrikë. | $S = r_1^2\,\pi - r_2^2\,\pi$ |

### SHEMBULLI 1

Syprina e një sektori rrethor nga një rreth me rreze 6 cm, me këndin qendror përkatës prej 45° është e barabartë me $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}\frac{3\pi}{2}6 = \frac{9\pi}{2}$ cm².

### SHEMBULLI 2

Syprina e një segmenti rrethor nga një rreth me rreze 6 cm, me këndin qendror përkatës prej 45° është e barabartë me $S = \frac{9\pi}{2} - \frac{1}{2}r^2 \sin 45° = \frac{9\pi}{2} - 18\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\pi - 18\sqrt{2}}{2}$ cm².

### SHEMBULLI 3

Syprina e një unaze rrethore të formuar nga rrathë me rreze 5 dhe 4 është e barabartë me $S = (5^2 - 4^2)\,\pi = 9\pi$.

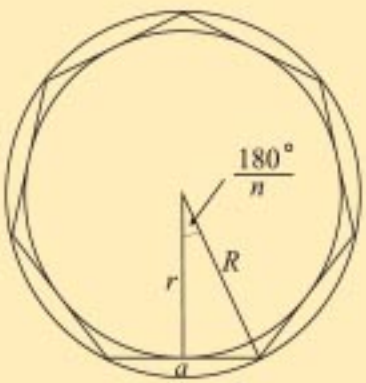
### SHEMBULLI 4

Një rreth me rreze 6 ndahet në 8 pjesë të barabarta, ndërsa një rreth me rreze 8 ndahet në 6 pjesë të barabarta. Nga të dy rrathët merret nga një sektor. Cili nga sektorët ka syprinën më të madhe?

Le të jetë $S_1 = \frac{6^2\pi\frac{360°}{8}}{360°} = \frac{36\pi}{8}$ dhe $S_2 = \frac{8^2\pi\frac{360°}{6}}{360°} = \frac{64\pi}{6}$. Qartë $S_2 > S_1$.



Le të jetë $a$ brinja e një $n$-këndëshi të rregullt, $r$ rrezja e rrethit të brendashkruar, dhe $R$ e atij të jashtashkruar rreth atij shumëkëndëshi. Atëherë $r = R\cos\frac{180°}{n}$ dhe $a = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{180°}{n}$ (vizatimi 2).



Vizatimi 2



Perimetri i një $n$-këndëshi të rregullt njehsohet me një nga formulat (në varësi të elementeve të dhënë) $P = na$, $P = 2nR\sin\frac{180°}{n}$, $P = 2nr\,\mathrm{tg}\,\frac{180°}{n}$.

Syprina e një $n$-këndëshi të rregullt njehsohet me një nga formulat (në varësi të elementeve të dhënë)

$S = \frac{1}{2}nar$, $S = \frac{1}{2}Lr$, $S = nR^2 \sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}$, $S = \frac{a^2 n}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$, $S = nr^2 \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$.

## SHEMBULLI 5

Syprina e një unaze rrethore është e barabartë me një të katërtën e syprinës së rrethit më të vogël. Përcaktoni raportin e rrezeve të rrathëve.

Nga kushti $(R^2 - r^2)\pi = \frac{1}{4}r^2\pi$ kemi $R^2 = \frac{5}{4}r^2$ domethënë $R : r = \sqrt{5} : 2$.

## SHEMBULLI 6

Nëse gjatësia e harkut $AB$ është $\pi$cm dhe këndi qendror përkatës është $\alpha = 15^\circ$, atëherë perimetrin e rrethit e përcaktojmë si më poshtë:

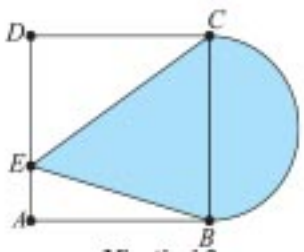
Nga barazimi $l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$ fitohet $l = \frac{2r\pi\alpha}{360^\circ} = \frac{L\alpha}{360^\circ}$, domethënë $P = \frac{l \cdot 360^\circ}{\alpha}$. Pra, perimetri i kërkuar është $P = 24\ \pi$cm.

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Nga një pikë arbitrare $A$ e shtrirë në një rreth, tërhiqen dy korda me gjatësi 9 cm dhe 17 cm. Përcaktoni rrezen e rrethit, nëse distanca midis meseve të kordave është 5 cm.

2. Kordat $\overline{AB} = 6$ cm dhe $\overline{AC} = 8$ cm janë reciprokisht normale. Përcaktoni syprinën e rrethit.

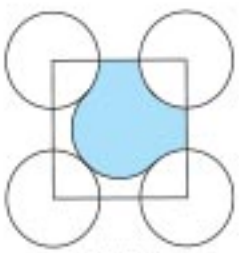
3. Njehsoni syprinën e figurës së hijezuar në vizatimin 3, nëse $ABCD$ është katror me diagonale 4 cm, $BC$ është diametri i gjysmërrethit dhe $E$ është pika arbitrare e brinjës $AD$.



Vizatimi 3

4. Nga një gjysmërreth me rreze $R = 10$ cm, priten dy gjysmërrathë me rreze $r_1 = 3$ cm dhe $r_2 = 7$ cm, qendrat e të cilëve shtrihen në diametrin e gjysmërrethit dhe preken me njëri-tjetrin. Përcaktoni syprinën e pjesës së mbetur.

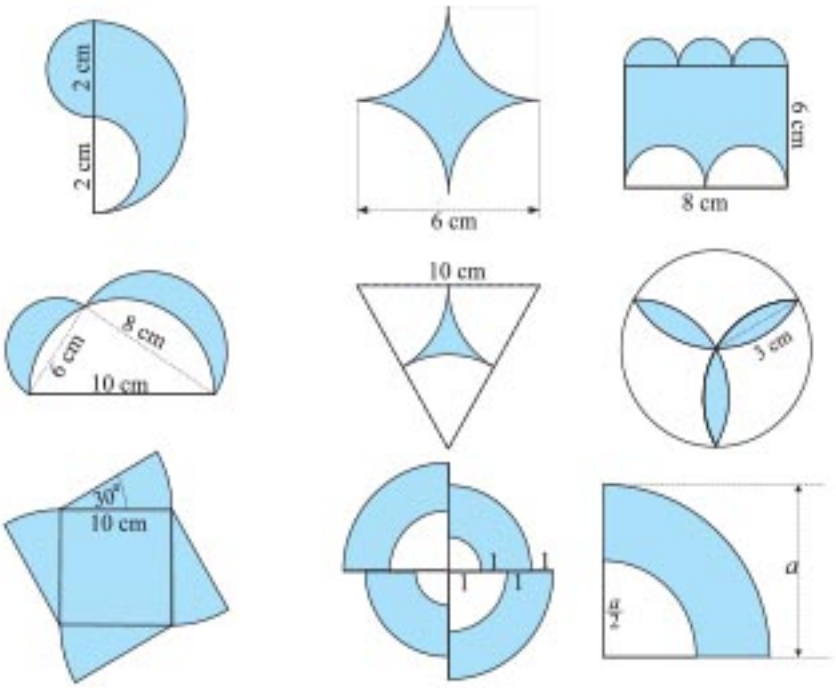
5. Njehsoni syprinën e pjesës së hijezuar, nëse të gjithë rrathët kanë rreze 1 cm. Në këtë rast, katër rrathët kanë qendra në kulmet e katrorit dhe e prekin nga jashtë rrethin e pestë.


Vizatimi 4

6. Njehsoni perimetrin dhe syprinën e:
   a) një dhjetëkëndëshi të rregullt me rreze të rrethit të jashtashkruar $R = 7$ cm,
   b) një dhjetëkëndëshi të rregullt me rreze të rrethit të brendashkruar $r = \sqrt{2}$ cm.

7. Në një rreth është brendashkruar një tetëkëndësh i rregullt, ndërsa rreth tij është jashtashkruar një gjashtëkëndësh i rregullt. Përcaktoni raportin e syprinave të shumëkëndëshave.

8. Njehsoni syprinën e pjesëve të kaltra, sipas të dhënave të dhëna për secilën nga vizatimet në vizatimin 5.




Vizatimi 5

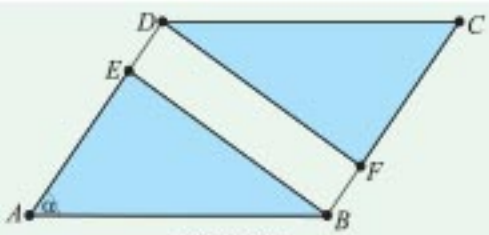
## 5.4. Zbatimi i teoremave në situata problemore

### SHEMBULLI 1

Jepet një paralelogram me brinjë $a = 9$ dm dhe $b = 7$ dm dhe kënd të ngushtë $\alpha = 58°$. Prej tij është nxjerrë një drejtkëndësh, si në vizatimin 1. Njehsoni syprinën e pjesës së paralelogramit, pa drejtkëndëshin?

Nga trekëndëshi kënddrejtë ABE rrjedh se
$\overline{BE} = \overline{AB} \cdot \sin 58° \approx 7{,}6$ dm, dhe $\overline{AE} = \overline{AB} \cdot \cos 58° \approx 4{,}8$ dm.
Pra, brinjët e drejtkëndëshit janë $c = 7{,}6$ dm dhe
$d = 7 - 4{,}8 = 2{,}2$ dm, prandaj syprina e tij është
$S_1 = 16{,}72$ dm².

Së fundi, syprina e pjesës së paralelogramit pa drejtkëndëshin është $S = ab \sin 58° - S_1 \approx 36{,}71$ dm².




Vizatimi 1

## TIK AKTIVITET

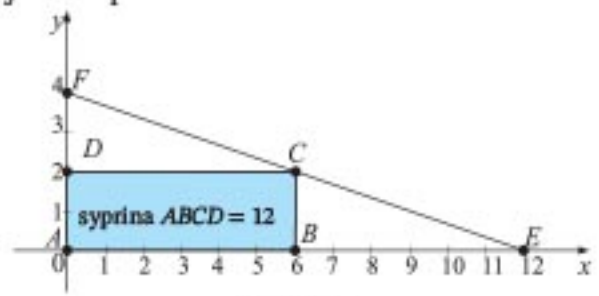
Në një softuer gjeometrik, vizatoni drejtëzën $x + 3y = 12$. Më pas, vizatoni një drejtkëndësh $ABCD$ ashtu që kulmi $A$ të shtrihet në origjinën e sistemit koordinativ, ndërsa kulmi $C$ të shtrihet në drejtëzën në kuadrantin e parë (vizatimi 2). Lëvizni pikën $C$ përgjatë drejtëzës dhe mundohuni t'u përgjigjeni pyjeve të mëposhtme:

a) Sa është syprina e drejtkëndëshit, nëse brinja horizontale është 3?

b) Sa janë brinjët, nëse syprina është e barabartë me 10?

c) Sa duhet të jenë brinjët e drejtkëndëshit për të fituar syprinën më të madhe?

Do duhej të fitonit paraqitjen e mëposhtme:




Vizatimi 2

## SHEMBULLI 2

Një pronar i një shtëpie me oborr dëshiron të mbjellë bar në oborr. Dihet që nevojiten 30 deri në 50 gramë farë për metër katror. Skica e oborrit është në fakt një drejtkëndësh me brinjë 10 metra dhe 7 metra. Fontana paraqitet si një gjysmërreth me diametër 5 metra dhe serra në formën e një trapezi barakrahës me baza 2 metra dhe 6 metra dhe lartësi 3 metra (vizatimi 3).



Vizatimi 3

$S = 10 \cdot 7 - 0{,}5 \cdot 2{,}5^2 \cdot \pi - (2 + 6) \cdot 3 \cdot 0{,}5 \approx 48{,}1875$ m². Pra, nevojiten 1445.625 deri në 2409.375 gramë për metër katror, domethënë 1.45 deri në 2.4 kilogramë farë bari.

## TIK AKTIVITET

Në një softuer gjeometrik, vizatoni një katror me brinjë 5 cm. Më pas, ndaji brinjët e katrorit në raport 3:2 dhe në të brendashkruani një katror të ri. Në të njëjtën mënyrë, në katrorin e dytë brendashkruani një të tretë, e kështu me radhë. Njehsoni syprinën e katrorit të katërt të brendashkruar. Do duhej të kishit firuar vizatimin 4.



Vizatimi 4

## SHEMBULLI 3

Një dysheme me përmasa 805 cm dhe 420 cm duhet të mbulohet me pllaka katrore. Pllakat vendosen pa fugë. Çfarë përmasash të pllakës duhet zgjedhur për të pasur sa më pak prerje të pllakave? A mund të përcaktoni përmasat e pllakave drejtkëndëshe me ndihmën e të cilave do të mbulohej e njëjta dysheme? Brinjët e pllakave janë numra natyrorë.

Gjejmë pjesëtuesin më të madh të përbashkët të 805 dhe 420. Ky është numri 35. Prandaj nevojiten 276 pllaka katrore. Nga fakti që $35 = 7 \cdot 5 = 35 \cdot 1$ rrjedh se mund të zgjidhen dy lloje të pllakave drejtkëndëshe.

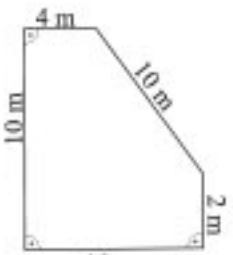
## DETYRA PËR USHTRIME

1. Bazat e një trapezi janë a = 25 cm dhe b = 15 cm, njëri nga krahët është c = 8 cm. Përcaktoni perimetrin dhe syprinën e trapezit, nëse shuma e këndeve në bazën më të madhe është 90°.

2. Një kuti me bojë është e mjaftueshme për të ngjyrosur një copë kartoni në formë drejtkëndëshi, njëra brinjë e të cilit është tri herë më e gjatë se brinja tjetër. Nëse nga copa e kartonit bëjmë një drejtkëndësh të ri, duke shkurtuar anën më të gjatë për 18 cm dhe duke zgjatur tjetrën për 8 cm, do të harxhojmë të njëjtën sasi boje. Përcaktoni perimetrin e drejtkëndëshit të ri.

3. Katrori $ABCD$ ka brinjë me gjatësi 36 cm. Në brinjën $AB$ zgjidhet pika $E$ e cila është në distancë 12 cm nga kulmi $B$, në mes të brinjës $BC$ ndodhet pika $F$ dhe në brinjën $CD$ zgjidhet pika $G$, e cila është në distancë 12 cm nga kulmi $C$. Përcaktoni syprinën e pjesës që ndodhet brenda trekëndëshit $EFG$ dhe jashtë trekëndëshit $AFD$.

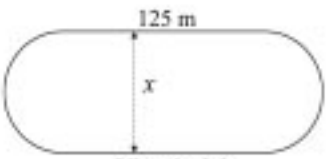
4. Dyshemeja e një dhome pune duhet të mbulohet me pllaka dimensionet e të cilave janë 30 cm me 40 cm. Njehsoni sa pllaka nevojiten, sipas dimensioneve të dhomës, të dhëna në vizatimin 5.



Vizatimi 5

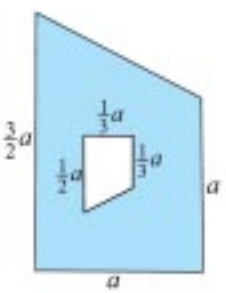
5. Në një rreth është brendashkruar një tetëkëndësh i rregullt, ndërsa rreth tij është jashtashkruar një katror. Përcaktoni raportin e syprinave të shumëkëndëshave.

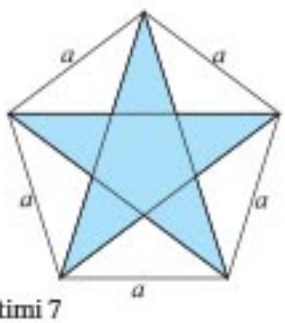
6. Një pistë për vrapim ka gjatësi prej 450 metra, dy pjesë të drejta nga 125 metra dhe dy pjesë gjysmërrethore, si në vizatimin 6. Njehsoni distancën x midis pjesëve të drejta të pistës. Brendia e pistës do të mbulohet me bar. Sa sipërfaqe do të zërë bari?



Vizatimi 6

7. Shprehni syprinën e figurave të kaltra përmes brinjës $a$, sipas të dhënave në vizatimin 7, dhe pastaj përcaktoni syprinën e tyre, nëse $a = 2{,}4$ m, për secilin nga figurat në vizatimin 7.



Vizatimi 7

8. Një kopsht ka formë trekëndëshi barabrinjës, si në vizatimin 8. Pjesa e kopshtit ku janë mbjellë trëndafila ka formë trekëndëshi barabrinjës, të brendashkruar në trekëndëshin e madh, ashtu që kulmet e tij janë meset e brinjëve të trekëndëshit të madh. Përcaktoni syprinën e pjesës së mbjellë me trëndafila, nëse trekëndëshi i madh ka brinjë 10 m.


Vizatimi 8

# 5.5. Syprina dhe vëllimi i formave 3D

Një formë 3D duhet të jetë e kufizuar nga të gjitha brinjët. Kufiri që ndan pjesën e hapësirës që nxë forma nga pjesa e mbetur jashtë saj quhet sipërfaqe e formës. Prandaj, një formë 3D është unioni i pjesës së brendshme të hapësirës dhe kufirit. Formën 3D e quajmë gjithashtu trup gjeometrik.

## Prizmi. Syprina dhe vëllimi i prizmit

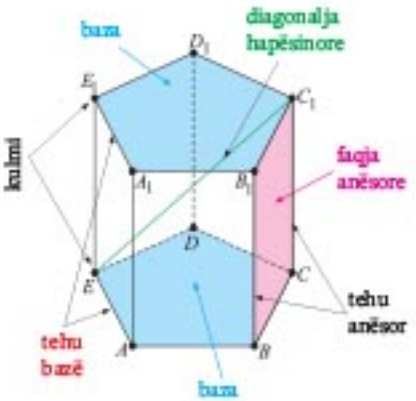
### DETYRA 1

Në sa mënyra të ndryshme mund të rregulloni 8 kube identikë me brinjë 1 cm për të fituar një prizëm të drejtë? Për çdo renditje, përcaktoni numrin e katrorëve që përbëjnë sipërfaqen e prizmit.

**Prizëm i drejtë** është një formë 3D e kufizuar nga dy shumëkëndësha të puthitshëm dhe paralelë dhe aq drejtkëndësha sa brinjë kanë shumëkëndëshat.

Dy shumëkëndëshat e puthitshëm që shtrihen në rrafshet paralele quhen **baza**, ndërsa drejtkëndëshat quhen **faqe anësore** të prizmit dhe për to themi se formojnë **mbështjellësin** e tij. Brinjët e shumëkëndëshave të puthitshëm quhen **tehe bazë**, ndërsa brinjët e drejtkëndëshave, që nuk shtrihen në asnjërën nga bazat, quhen **tehe anësore**. Pikat e përbashkëta të teheve të prizmit quhen **kulme** të prizmit (vizatimi 1).

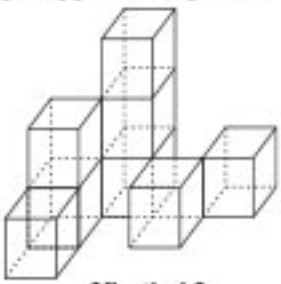
Sipas shumëkëndëshit në bazë, prizmi mund të jetë: trekëndor (me tri faqe), katërkëndor, pesëkëndor, etj. Largesa midis bazave të prizmit quhet **lartësia** e prizmit dhe shënohet me H (vizatimi 2).

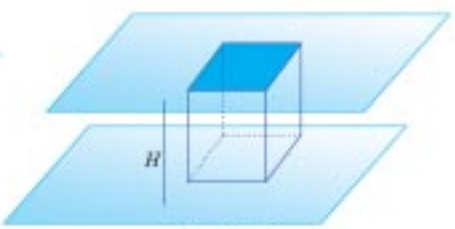


Vizatimi 1

### SHEMBULLI 1

Syprina e formës 3D, në vizatimin 3 përbëhet nga 40 katrorë me brinjë $a$, pra syprina e saj është $S = 40a^2$.


Vizatimi 3



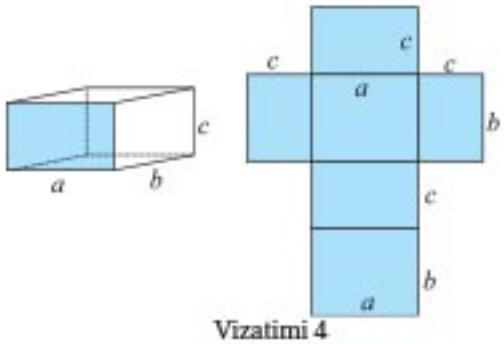
Vizatimi 2

**Syprina** e një prizmi është shuma e syprinave të dy bazave dhe syprinave të shumëkëndëshave që përbëjnë mbështjellësin e prizmit.

Nëse syprinën e prizmit e shënojmë me S, syprinën e bazës me B dhe syprinën e mbështjellësit me M, atëherë $S = 2B + M$. Meqenëse faqet e prizmit të drejtë janë drejtkëndësha me njërën brinjë që është edhe brinjë bazë, dhe brinjën tjetër lartësi të prizmit H, atëherë syprina e mbështjellëses është prodhim i perimetrit të bazës dhe lartësisë, pra $M = P \cdot H$.

## DETYRA 2

Një dhuratë në formë kuadri duhet të mbështillet me letër dekorative (vizatimi 4). Sa letër nevojitet nëse dimensionet e dhuratës janë 4 cm, 5 cm dhe 11 cm?

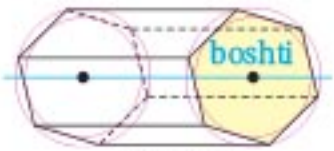


Vizatimi 4

Syprina e një kuadri me brinjë a, b dhe c njehsohet me formulën
$S = 2B + M = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + bc + ca)$.

Një prizëm i drejtë me bazë shumëkëndësh të rregullt quhet **prizëm i rregullt**.

Drejtëza që kalon nëpër qendrat (qendra të rrethit të brendashkruar dhe të jashtashkruar) të bazave të prizmit të rregullt quhet **bosht** i prizmit (vizatimi 5).



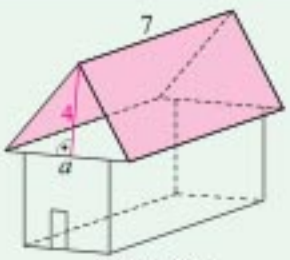
Vizatimi 5

## SHEMBULLI 2

Kulmi i një ndërtese ndihmëse ka formë prizmi të rregullt trekëndor. Sa limë (fletë metali) nevojitet për të mbuluar ndërtesën nëse kulmi është i gjatë 7 metra dhe i lartë 4 metra?

Kulmi përbëhet vetëm nga dy faqe të prizmit, që do të thotë se duhet përcaktuar tehu bazë a i prizmit (vizatimi 6). Nga formula për lartësinë e trekëndësh barabrinjës kemi $h = 4 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, pra $a = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ m.

Prandaj, syprina totale e kërkuar e limës është
$2 \cdot 7 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} \approx 64{,}6\ \text{m}^2$.

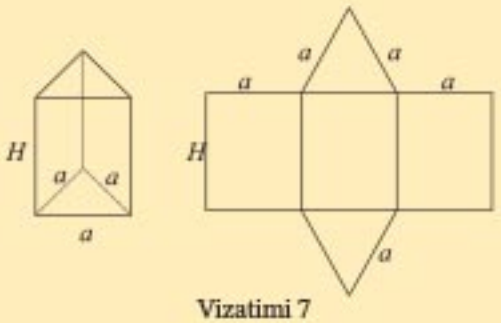


Vizatimi 6

Syprina e **prizmit të rregullt trekëndor** me teh bazë $a$ dhe lartësi $H$ njehsohet me formulën

$$S = 2B + M = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH$$

(vizitimi 7).




Vizatimi 7

## DETYRA 3

Mendoni dhe përgjigjuni pyetjeve të mëposhtme:

a) Sa është numri më i vogël i faqeve të një prizmi të drejtë?

b) Sa kulme dhe tehe ka gjithsej një prizëm me shtatë faqe?

c) A ekziston prizëm i drejtë ku numri i teheve është i barabartë me 13?

## DETYRA 4

Në oborrin e një shtëpie familjare është planifikuar ndërtimi i një garazhi në formë kuadri me gjerësi 3 m, gjatësi 4 m dhe lartësi 2 m. Sa beton nevojitet për të bërë garazhin, nëse trashësia e mureve dhe kulmit është 40 cm, ndërsa dyshemeja është e trashë 50 cm?

Vëllimi i prizmit së drejtë njehsohet me formulën $V = B \cdot H$, ku $B$ është syprina e bazës, ndërsa $H$ lartësia e prizmit.

Vëllimi i kuadrit me brinjë $a$, $b$ dhe $c$ njehsohet me formulën $V = abc$.

## Prerjet e prizmit me rrafshin

Bashkësia e të gjitha pikave të përbashkëta të një forme 3D dhe rrafshit quhet **prerje rrafshore** e formës.

Të tilla janë prerjet e mëposhtme:

- **prerja paralele**, e cili fitohet kur rrafshi është paralel me bazat e prizmit, ndërsa shumëkëndëshi i fituar është i puthitshëm me bazat,
- **prerja diagonale**, e cili fitohet kur rrafshi kalon nëpër dy tehet anësore jo të njëpasnjëshme, ndërsa shumëkëndëshi i fituar është paralelogram,

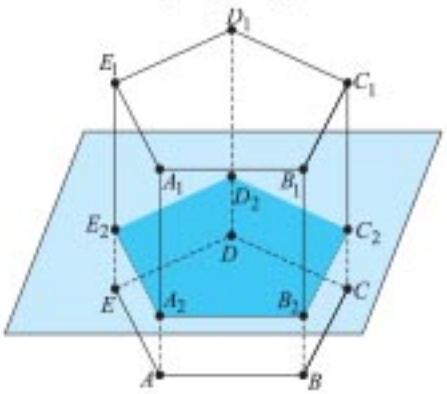
- **prerja boshtore**, e cila fitohet kur rrafshi e përmban boshtin e prizmit, ndërsa shumëkëndëshi i fituar është paralelogram.

## SHEMBULLI 3

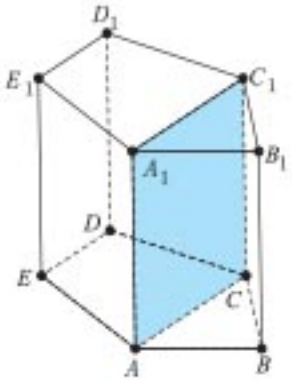
a) Në vizatimin 8 është paraqitur prerja paralele te prizmi pesëkëndor.

b) Prerja diagonale te prizmi pesëkëndor është paraqitur në vizatimin 9.

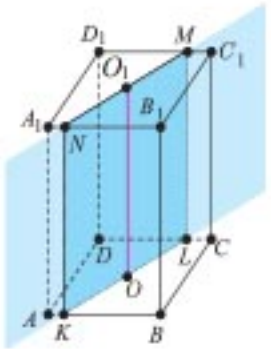
c) Në vizatimin 10 është paraqitur prerja boshtore te prizmi i rregullt katërkëndor. Kjo prerje boshtore nuk është prerje diagonale.




prerja paralele
$A_2B_2C_2D_2E_2$
Vizatimi 8




prerja diagonale
$ACC_1A_1$
Vizatimi 9




boshti $OO_1$
prerja boshtore $KLMN$
Vizatimi 10

## SHEMBULLI 4

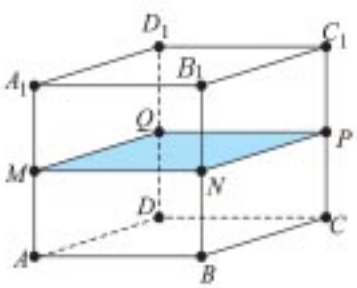
Është dhënë kubi $ABCDA_1B_1C_1D_1$ me brinjë $a = 6$ cm.

a) Prerja paralele $MNPQ$, e cila kalon nëpër pikat $M$, $N$, $P$ dhe $Q$, të cilat janë meset e teheve anësore $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ dhe $DD_1$, përkatësisht, është shumëkëndësh i puthitshëm me bazën, domethënë është katror me brinjë $a = 6$cm dhe syprina e saj është $S_1 = a^2 = 36$ cm² (vizatimi 11).

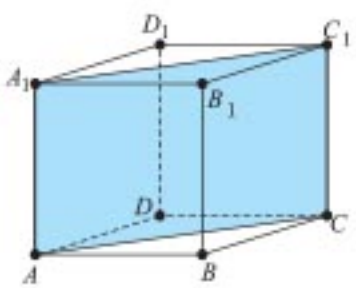
b) Prerja diagonale $ACC_1A_1$ te kubi është drejtkëndësh me brinjë $a = 6$ cm dhe diagonale të bazës $d = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm, prandaj syprina e saj është $S_2 = a \cdot d = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$ cm² (vizatimi 12).

c) Prerja arbitrare e cila kalon nëpër diagonalen e bazës dhe diagonalet e dy faqeve ansore fqinje është trekëndësh barabrinjës me brinjë të barabarta me diagonalet e faqeve anësore dhe bazës, pra $d = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm, andaj syprina e saj është

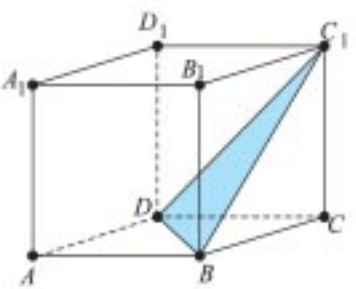
$$S_3 = \frac{d^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(6\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}\,\text{cm}^2 \text{ (vizatimi 13).}$$




Vizatimi 11

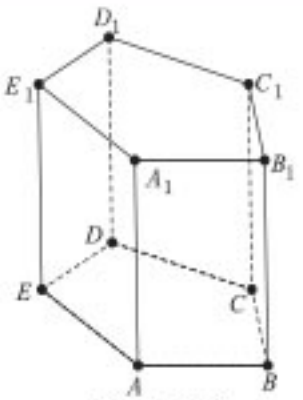



Vizatimi 12




Vizatimi 13

## DETYRA PËR USHTRIME



Vizatimi 14

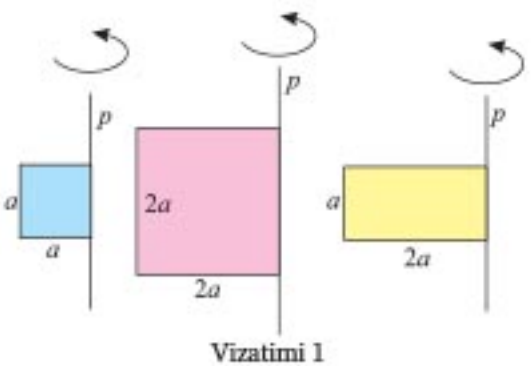
1. Në vizatimin 14 është dhënë një prizëm pesëkëndor.
   a) Shkruani të gjitha diagonalet hapësinore të nxjerra nga kulmet $C_1$ dhe $E$.
   b) Shkruani diagonalet e faqeve anësore $ABB_1A_1$, $CC_1D_1D$ dhe $AA_1E_1E$.
2. Njehsoni syprinën e një prizmi katërkëndor me bazë romb, diagonale të të cilit janë $d_1 = 8$ cm dhe $d_2 = 6$ cm dhe lartësi $H = 10$ cm.
3. Njehsoni syprinën e një prizmi të rregullt gjashtëkëndor me tehe të barabartë me gjatësi të tehut 8 cm.
4. Njehsoni tehet bazë të një kuadri tek i cili syprina e bazës është 48 cm², syprina e prerjes diagonale është 150 cm² dhe lartësia është 15 cm. Dihet se gjatësitë e teheve bazë janë numra natyrorë.
5. Lartësia e një prizmi të drejtë është 30 cm, ndërsa baza është romb me brinjë 13 cm dhe diagonale të bazës që kanë raport 5 : 12. Njehsoni syprinën e prerjeve diagonale.
6. Nëse nga pjesa e brendshme e një kubi, me brinjë a, hiqet një kub më i vogël, fitohet një kub i shpuar. Sa është vëllimi i kubit të shpuar, nëse tehu i kubit të brendshëm është gjysma e tehut të kubit të jashtëm?
7. Tehet bazë të një kuadri kanë raport 4 : 3, ndërsa lartësia e tij është 15 cm. Njehsoni vëllimin e kuadrit nëse perimetri i bazës është 21 cm.
8. Baza e një prizmi të drejtë katërkëndor është paralelogram, njëra diagonale e të cilit është 17 cm, brinjët janë 9 cm dhe 10 cm dhe syprina e prizmit është 334 cm². Njehsoni vëllimin e prizmit.

# 5.6. Cilindri. Syprina dhe vëllimi i cilindrit

## DETYRA 1

Duke rrotulluar secilën nga figurat rreth drejtëzës p, siç është paraqitur në vizatimin 1, fitohet cilindër. Përgjigjuni pyetjeve në vijim:

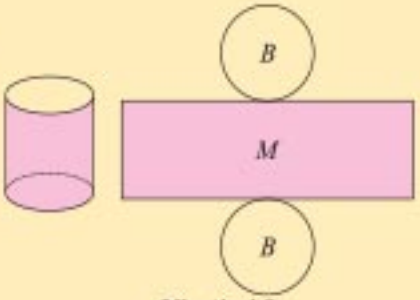
a) Sa është lartësia e secilit cilindër?
b) Sa është rrezja e rrethit që fitohet me rrotullim?
c) Sa është syprina e secilit cilindër?



Vizatimi 1

Nëse syprinën e bazës e shënojmë me $B$,
dhe syprinën e mbështjellësit me $M$, atëherë syprina e cilindrit (vizatimi 2) është

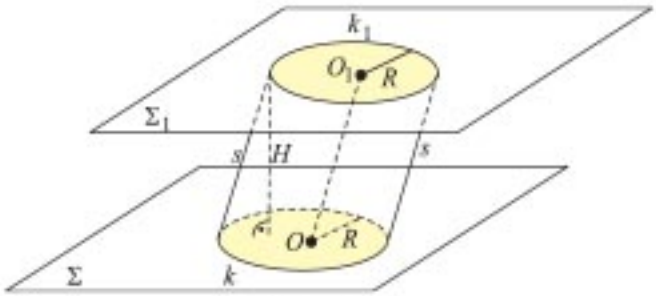
$S = 2B + M = 2R^2\pi + 2R\pi H = 2R\pi(R + H)$.



Vizatimi 2

Le të jenë $k(O, R)$ dhe $k_1(O, R)$ dy rrathë që shtrihen në rrafshet paralele $\Sigma$ dhe $\Sigma_1$, përkatësisht. Atëherë bashkësia e të gjitha pikave nga segmentet $XY$, ku $X \in k(O, R)$, $Y \in k_1(O, R)$ dhe $XY \parallel OO_1$ quhet **cilindër**.

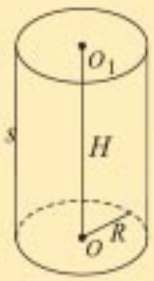
Segmenti $OO_1$ quhet **boshti i cilindrit**. Nëse $OO_1 \perp \Sigma$, atëherë cilindri quhet **i drejtë**. Rrathët k dhe $k_1$ quhen **baza të cilindrit**. Ata janë rrathë të puthitshëm, ndërsa rrezja e tyre quhet **rreze e cilindrit**. Unioni i të gjitha segmenteve $XY$ ku $XY \parallel OO_1$, $X$ shtrihet në vijën rrethore k dhe $Y$ shtrihet në vijën rrethore $k_1$ quhet **sipërfaqe anësore e cilindrit**. Secili prej këtyre segmenteve $XY$ (të gjitha kanë të njëjtën gjatësi) quhet **gjeneratrisë**. Distanca midis rrafsheve $\Sigma$ dhe $\Sigma_1$ quhet **lartësi e cilindrit** $H$.



Vizatimi 3

Më tej, do të punojmë vetëm me cilindra të drejtë. Në vizatimin 3 është paraqitur një cilindër i pjerrët me gjeneratrisë me gjatësi s, lartësi $H$, rreze $R$ dhe bosht $OO_1$.

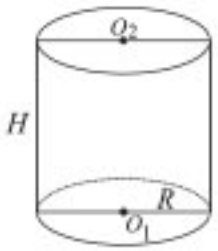
Te cilindri i drejtë vlen $s = H = \overline{OO_1}$ (vizatimi 4).



Vizatimi 4

Nëse diametri i bazës është i barabartë me lartësinë te cilindri i drejtë, atëherë cilindri quhet **barabrinjës**.

Pra, te cilindri barabrinjës vlen $d = 2R = H$.
Në vizatimin 5 është paraqitur një cilindër barabrinjës me lartësi $H$ dhe rreze të bazës $R$.




$H=2r$
Vizatimi 5

## SHEMBULLI 1

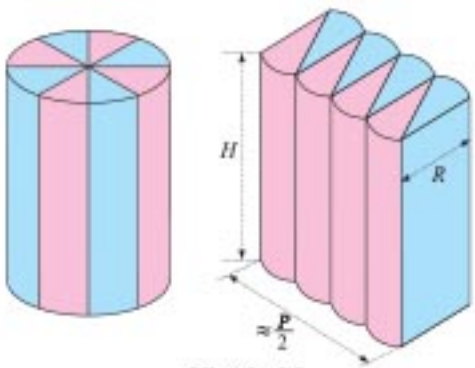
Njehsoni syprinën e një cilindri me lartësi 8 cm dhe perimetër të bazës 20 π cm.

Për të njehsuar syprinën e cilindrit nevojitet të përcaktohet rrezja nga perimetri i dhënë, pra $P = 2R\pi = 20\,\pi$ nga ku $R = 10$ cm. Pra, $S = 20\pi\,(10 + 8) = 360\pi$ cm².

## DETYRA 2

Rrezja e bazës së një cilindri barabrinjës është 75 mm. Njehsoni syprinën e cilindrit.

Cilindri në vizatimin 6 është i ndarë në pjesë të barabarta, nga të cilat përbëhet një formë 3D forma e së cilës është e përafërt me formën e një kuadri. Nëse cilindrin e ndajmë në sa më shumë pjesë, atëherë forma e fituar e merr më gjithnjë e më shumë formën e një kuadrit. Vëllimi i kuadrit është $V = B \cdot H$, ku $B$ është syprina e bazës, ndërsa $H$ është lartësia e cilindrit. Baza e kuadrit është drejtkëndësh me brinjë $R$ dhe $\frac{P}{2} = \frac{2R\pi}{2} = R\pi$.




Vizatimi 6

Pra, $B = R\pi \cdot R = R^2\pi$. Vëllimi i kuadrit është $V = R^2\pi \cdot H$. Mund të përfundojmë se vëllimi i cilindrit është gjithashtu $V = R^2\pi H$.

## SHEMBULLI 2

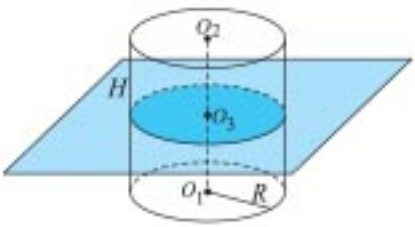
Njehsonini vëllimin e një cilindri barabrinjës me rreze $R$.
Meqenëse $H = 2R$, $V = R^2\pi \cdot 2R = 2R^3\pi$.

## DETYRA 3

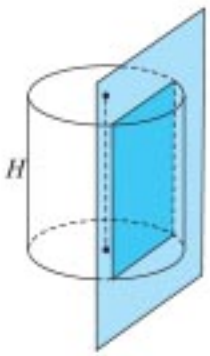
Njehsoni vëllimin e një cilindri me diametër të bazës 60 cm dhe lartësi 7,5 dm.

## Prerjet e cilindrit me rrafshin

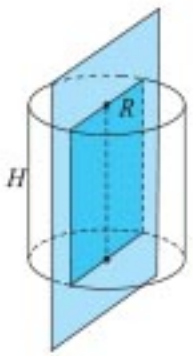
- **Prerja paralele** fitohet kur rrafshi është paralel me rrafshet e bazave. Atëherë, prerja është një rreth me rreze të barabartë me rrezen e cilindrit, ndërsa rrafshi është normal (pingul) me lartësinë (vizatimi 7).
- **Prerja gjatësore** fitohet kur rrafshi i prerjes është paralel me boshtin e cilindrit. Prerja është një drejtkëndësh me njërën anë të barabartë me lartësinë e cilindrit (vizatimi 8).
- **Prerja boshtore** fitohet kur rrafshi përmban boshtin e cilindrit, ndërsa prerja është një drejtkëndësh **me brinjë gjeneratrisën dhe diametrin e cilindrit** (vizatimi 9). Te cilindri barabrinjës kjo prerje është katror.



Vizatimi 7



Vizatimi 8



Vizatimi 9

### SHEMBULLI 3

Prerja boshtore e një cilindri është katror me syprinë 25 cm². Përcaktoni rrezen dhe lartësinë e cilindrit.

Nga fakti që prerja boshtore është katror kemi se $d = H$, ku d është diametri i bazës së cilindrit. Pra nga $d^2 = 25$ cm² fitohet se $d = 5$ cm, domethënë $H = 5$ cm dhe $R = \frac{d}{2} = 2{,}5$ cm.

### DETYRA PËR USHTRIME

1. Njehsoni syprinën e cilindrit barabrinjës, nëse syprina e tij anësore është 20 cm².
2. Syprina anësore e cilindrit të drejtë rrethor është 192 π cm², ndërsa diametri i bazës është 20 cm. Njehsoni vëllimin e cilindrit.
3. Njehsoni syprinën e cilindrit të drejtë rrethor me vëllim 112 π cm³ dhe lartësi 7 cm.
4. Vëllimi i një cilindri të drejtë rrethor është 375 π cm³, ndërsa lartësia është tri herë më e madhe se rrezja e bazës. Njehsoni syprinën e cilindrit.

5. Drejtkëndëshi $ABCD$ me brinjë $\overline{AB} = 13$ cm dhe $\overline{BC} = 27$ cm, rrotullohet rreth një boshti që është paralel me $BC$ dhe është 5 cm larg nga ajo. Njehsoni syprinën e formës që fitohet me këtë rrotullim.

6. Prerja paralele e një cilindri ka syprinë $25\,\pi$ cm². Sa është i lartë cilindri nëse lartësia është tri herë më e madhe se diametri i bazës?

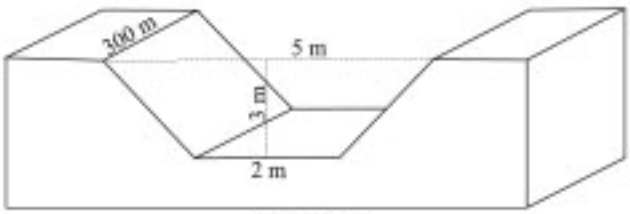
7. Lartësia e një cilindri është 6 cm, ndërsa rrezja e bazës 5 cm. Përcaktoni syprinën e prerjes gjatësore e cila është 4 cm larg nga boshti i cilindrit.

## 5.7. Zbatim i syprinës dhe vëllimit të formave 3D

### DETYRA 1

Në një fushë sportive për shkak të rrjedhjes së ujit të shiut është gërmuar një kanal me gjatësi 300 metra dhe thellësi 3 metra. Prerja tërthore e kanalit është trapez barakrahës me baza 2 metra dhe 5 metra (vizatimi 1).

a) Njehsoni sa litra dhe janë gërmuar nga terreni për të bërë kanalin.
b) Sa litra ujë mbilidhen nëse lartësia e ujit arrin 1 metër?
c) Sa sipërfaqe me bar është hequr për bërjen e kanalit?
d) Nëse në fund të kanalit vendoset rërë e trashë me trashësi 10 cm, atëherë sa metra kub rërë nevojiten?



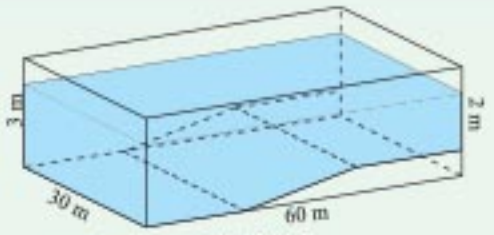
Vizatimi 1

### SHEMBULLI 1

Një pishinë ka gjatësi 60 m dhe gjerësi 30 m (vizatimi 2). Në një të tretën e parë të gjatësisë është e thellë 2 m. Në një të tretën e mesme me pjerrësi lëshohet në thellësi 3 m. Në një të tretën e fundit është e thellë 3 m. Njehsoni sa litra ujë ka në pishinë nëse është e mbushur me ujë deri në 30 cm nga tehu.

Vëllimi i pishinës është diferenca e vëllimeve të një prizmi katërkëndor me dimensione 60 m, 30 m dhe 2.7 m dhe një prizmi katërkëndore me bazë trapez kënddrejtë me baza 40 m dhe 20 m dhe lartësi 1 m, pra

$V = 60 \cdot 30 \cdot 2{,}7 - \dfrac{(40+20)\cdot 1}{2} \cdot 30 = 3960\,\text{m}^3 = 3960 \cdot 10^3$ litra ujë.



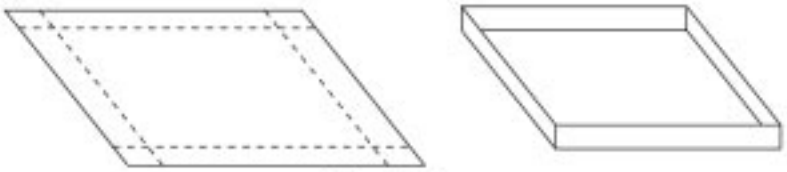
Vizatimi 2

## DETYRA 2

Në të ardhmen do të duhet të ndërrohen pllakat që janë vendosur brenda pishinës. Përdorni të dhënat nga shembulli i mëparshëm, për të përcaktuar syprinën në metra katror, sipas së cilës do të përcaktohet numri i pllakave të nevojshme.

## AKTIVITET

Merrni një fletë të bardhë me gjerësi 21cm dhe gjatësi 29.7 cm dhe në të katër skajet shënoni (dhe pritni) katrorë me brinjë 1 cm (vizatimi 3). Njehsoni vëllimin e kutisë që fitohet kur ngjiten të gjitha brinjët. Më pas shënoni katrorë me brinjë 2 cm dhe njehsoni vëllimin e ri. Mundohuni të përcaktoni sa duhet të jetë brinja e katrorit për të fituar një kuti që ka vëllimin maksimal.



Vizatimi 3

## DETYRA 3

Një kabllo ka një tel me diametër 1,5 mm. Rreth telit ka izolim (figura 1). Në këtë mënyrë kablloja ka diametër 3 mm. Nëse dihet se dendësia specifike e telit është 7800 kg/m³, dhe e izolimit 1200 kg/m³, atëherë përcaktoni sa masë kanë 100 m nga kjo kabllo.



Figura 1

## DETYRA 4

Një pite kaçkavall ka formë cilindri me rreze 20 cm dhe lartësi 15 cm. Prej saj janë prerë 3 copa, si në figurën 2. Copa e parë ka kënd qendror prej 30°, e dyta prej 25° dhe e treta prej 40°. Tri copat lyhen me djathë të shkrirë me trashësi 1.5 mm. Njehsoni sa litra nevojiten për të lyer secilën copë.



Figura 2

## AKTIVITET

Në një truall në formë katrori me syprinë prej 625 m² është ndërtuar një shtëpi ekologjike me syprinë prej 120 m². Kopshti ka kultura bujqësore të mbjella në një pjesë të truallit në formë drejtkëndëshi me gjerësi 10 m dhe gjatësi 20 m. Është planifikuar që në njërën gjysmë të kulmit të shtëpisë të ketë sistem për mbledhjen e ujit të shiut që përdoret për ujitje, si në figurën 3. Gjysma e kulmit ka gjerësi 12 m, dhe gjatësi 10 m.

a) Çfarë sasie rezervuari për ujë nevojitet për ujitjen e të gjithë kopshtit nëse për ujitjen e 1 m² harxhohen rreth 2 litra ujë?




Figura 3

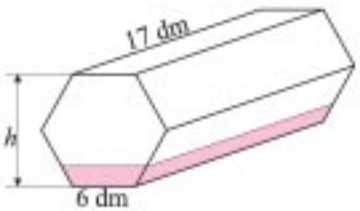
b) Nëse rezervuari ka formë cilindri tek i cili raporti i rrezes dhe lartësisë është 1 : 3, atëherë përcaktoni rrezen dhe lartësinë e tij.

c) Nëse për dy ditë ka bërë shi dhe kanë rënë 3 litra për metër katror, a do të mbushej rezervuari për këto dy ditë?

ç) Sa litra shi ranë mbi të gjithë truallin, dhe sa mbi shtëpinë, për ato dy ditë?

## DETYRA 5

Një fuçi rrotulluese, e cila përdoret për pastrimin e pjesëve të vogla, ka formë prizmi të rregullt gjashtëkëndor, si në vizatimin 4. Gjatë punës mbushet vetëm një e gjashta e lartësisë h. Përcaktoni vëllimin e pjesës së mbushur të fuçisë.



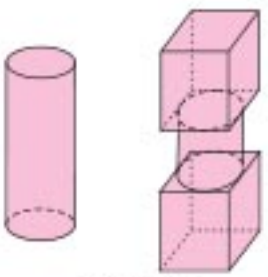
Vizatimi 4

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Një truall në formë drejtkëndëshi me brinjë 100 m dhe 60 m po përgatitet për ndërtim. Për këtë qëllim duhet të kalohet nga një rul i cili ka gjatësi 2 m dhe rreze 64 cm. Dihet se ruli nuk duhet të ndryshojë drejtimin kur lëviz nga njëri në skajin tjetër të truallit. Sa kohë nevojitet për të kaluar të gjithë truallin, nëse ruli ka frekuencë rrotullimi 0.2 Hz? Koha që i duhet rulit për t'u kthyer mbrapsh duhet të neglizhohet.

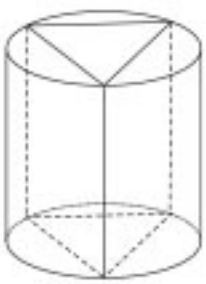
2. Unaza betoni me rreze 1 m dhe 1,5 m përdoren për mbrojtjen e brendshme të një pusi. Pusi ka thellësi 12 m. Sa unaza nevojiten, nëse një unazë ka lartësi 0.4 m? Përcaktoni masën e unazave, nëse dendësia specifike e betonit është 2300 kg/m³.

3. Një kompani që prodhon dhe mbush parfume vendosi të ndryshojë një produkt të saj. Parfumi më parë paketohej në shishe cilindrike, por tani do të mbushet në shishe që ka formën e dy kubeve të puthitshëm të lidhur me një cilindër barabrinjës, si në vizatimin 5. Vëllimi i përgjithshëm duhet të jetë 100 ml. Përcaktoni lartësinë e shishes. Krahasoni këtë lartësi me paketimin e mëparshëm, nëse dihet se cilindrat kanë të njëjtën rreze.

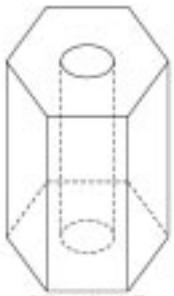

Vizatimi 5

4. Penguesit për derë kanë formë prizmi trekëndor me bazë trekëndësh kënddrejtë me katete 12 cm dhe 5 cm. Janë të gjatë 16 cm. Sa kilogram silikon nevojiten për të prodhuar 2,53 milionë pengues, nëse dendësia specifike e silikonit është 1,6 g/cm³.

5. Një kallëp alumini përbëhet nga një cilindër në të cilin është brendashkruar një prizëm i rregullt trekëndor (vizatimi 6). Sa kilogramë alumini nevojiten për të bërë kallëpin, nëse alumini ka dendësi specifike 2.7 g/cm³? Kallëpi ka rreze 30 cm dhe lartësi 1,2 m.


Vizatimi 6

6. Një burmë hekuri ka formë prizmi të rregullt gjashtëkëndor nga i cila është nxjerrë një cilindër me diametër 0.8 cm (vizatimi 7). Prizmi ka lartësi 3 cm dhe teh bazë 1 cm. Sa kilogram hekur nevojiten për të derdhur 1000 burma, nëse dendësia specifike e hekurit është 7,874 g/cm³?



Vizatimi 7

# DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM

1. Në një trapez barakrahës me kënd të ngushtë $\alpha = 45°$, baza më e vogël është 12 cm, dhe lartësia 3 cm. Njehsoni syprinën e trapezit.
2. Përcaktoni gjatësinë e brinjës b dhe raportin e lartësive në paralelogramin me perimetër 124 dm dhe brinjë 12 dm.
3. Njehsoni syprinën e një trapezi me baza 20 cm dhe 11 cm dhe krahë 17 cm dhe 10 cm.
4. Është dhënë trekëndëshi me brinjë a = 21 cm, b = 17 cm dhe c = 10 cm. Përcaktoni syprinën, lartësitë, rrezen e rrethit të brendashkruar dhe të jashtashkruar dhe perimetrin e trekëndëshit.
5. Është dhënë trekëndëshi barakrahës me bazë a = 10 cm dhe krahë b = 13 cm. Përcaktoni syprinën, lartësitë, rrezen e rrethit të brendashkruar dhe të jashtashkruar dhe perimetrin e trekëndëshit.
6. Njehsoni syprinën e trekëndëshit, nëse dy brinjët e tij kanë gjatësi 27 cm dhe 29 cm, dhe vija e rëndesës (mesorja) ndaj brinjës së tretë ka gjatësi 26 cm.
7. Le të jetë $S$ qendra e rrethit të brendashkruar në trekëndëshin $ABC$ dhe le të jetë $\Delta ASC = 36$ cm², $\Delta ASB = 40$ cm² dhe $\Delta CSB = 68$ cm². Njehsoni brinjët e trekëndëshit, nëse rrezja e rrethit të brendashkruar është 12 cm.
8. Brinjët e një trekëndëshi janë 13 cm, 14 cm dhe 15 cm. Përcaktoni rrezen e rrethit me qendër në brinjën e mesme sipas madhësisë, e cila i prek dy brinjët tjera.
9. Njehsoni vëllimin e një prizmi të rregullt trekëndor me teh bazë a = 6 cm dhe lartësi H = 9 cm.
10. Njehsoni vëllimin e një prizmi të rregullt gjashtëkëndor me teh bazë a = 6 cm dhe lartësi H = 12 cm.
11. Njehsoni syprinën e prerjes diagonale të një kuadri me tehe bazë 5 cm dhe 12 cm dhe lartësi c = 10 cm.
12. Një shatorre ka formë prizmi të drejtë me bazë trekëndësh barakrahës me bazë 8 m dhe krahë 5 m. Përcaktoni syprinën anësore të shatorres pa dyshemenë, nëse gjatësia e saj është e barabartë me lartësinë e bazës.
13. Syprina e një ene metalike në formë cilindri është $1596\,\pi$ cm². Përcaktoni lartësinë e enës nëse diametri i bazës është 12 cm.

**14.** Është dhënë një prizëm i drejtë me bazë paralelogram me brinjë 2 cm dhe 8 cm dhe kënd të ngushtë prej 30°. Syprina anësore është 10 cm². Përcaktoni vëllimin e prizmit.

**15.** Një lloj kunji është në formë cilindri ku lartësia është e barabartë me diametrin e bazës. Syprina anësore e kunjit është 104 cm². Përcaktoni syprinën e bazës së kunjit.

**16.** Baza e një prizmi të drejtë është romb, ndërsa prerjet diagonale kanë syprinë 3 cm² dhe 4 cm². Përcaktoni syprinën anësore të prizmit.

**17.** Syprina anësore e një cilindri është 80 cm². Prerja boshtore është katror. Përcaktoni syprinën e cilindrit.

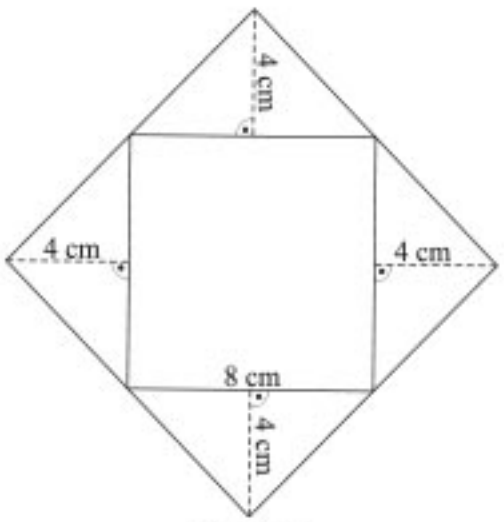
**18.** Një kanal për kullimin e ujit të shiut ka formë trapezi barakrahës me baza 6m dhe 4m dhe lartësi 1.3m. Kanali është i gjatë 150m. Cila është sasia më e madhe e ujit të shiut që mund të mblidhet në kanal?

**19.** Baza e një prizmi të drejtë është romb me diagonale 3 cm dhe 4 cm dhe diagonale të faqes anësore 6,5 cm. Njehsoni syprinën dhe vëllimin e prizmit.

**20.** Një shesh lojrash për fëmijë ka formë katrori, si në vizatimin 1, ku dimensionet janë në shkallë 1:100. Në mes do të vendosen pllaka në formë katrori prej bari artificial.

a) Nëse pllakat kanë formë katrori me brinjë 5 cm, sa pllaka duhet të blihen për të mbuluar pjesën në mes?

b) Në pjesën tjetër do të mbillet bar. Sa kilogramë farë do të nevojiten nëse për një metër katror mbillet nga 30 gramë farë?

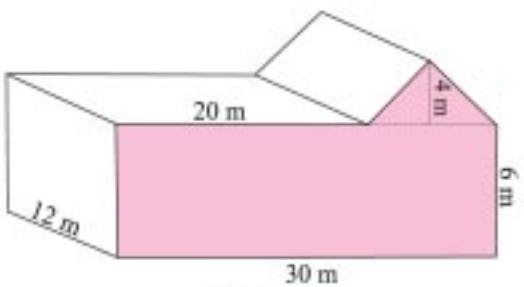


Vizatimi 1

**21.** Në vizatimin 2 është paraqitur një ndërtesë.

a) njehsoni syprinën e pjesës së ngjyrosur,

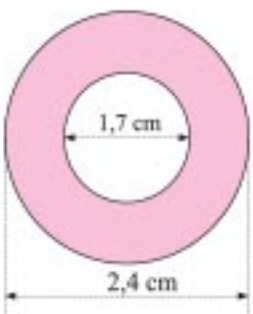
b) njehsoni vëllimin e ndërtesës.



Vizatimi 2

**22.** Një aparat për ujë ka formë cilindrike me lartësi 50 cm dhe diametër 40 cm. Njehsoni vëllimin e aparatit. Një gotë ka formë cilindri me diametër 8 cm dhe lartësi 10 cm. Sa gota ujë përmban aparati?

**23.** Një objekt metalik ka formë si në vizatimin 3. Përcaktoni syprinën e pjesës së ngjyrosur. Nëse objekti ka trashësi prej 2 mm, atëherë çfarë sasie vëllimi do të kenë 100 000 objekte të tilla?



Vizatimi 3

**24.** Një prizëm i rregullt për bazë ka katror me brinjë 7 cm dhe lartësi 20 cm. Përcaktoni dimensionet e cilindrit që mund të brendashkruhet në prizëm ashtu që vëllimi i tij të jetë maksimal.

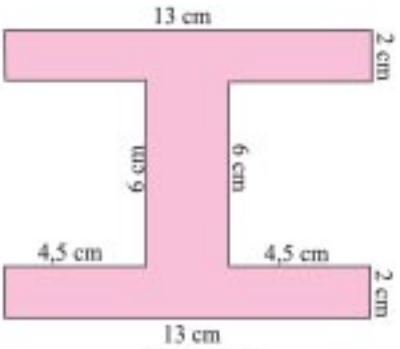
**25.** Një binar çeliku me gjatësi 5 metra ka prerje tërthore si në vizatimin 4.

a) njehsoni syprinën e pjesës së ngjyrosur,

b) njehsoni vëllimin e binarit,

c) përcaktoni masën e binarit nëse dendësia specifike e çelikut është 7.8 g/cm³,

ç) sa binarë mund të transportohen me një kamion kapaciteti i të cilit është 8 tonë?



Vizatimi 4

**26.** Asani vendosi të ndërtojë një garazh të gjatë 7 metra, të gjerë 5 metra dhe të lartë 2.7 metra. Ai dëshiron ta ndërtojë garazhin me tulla që janë kuadra me dimensione 25cm, 12 cm dhe 6.5 cm. Ai ka vlerësuar se për ndërtim i duhen rreth 50 000 tulla. Kontrolloni vlerësimin e tij.

**27.** Në figurën 1 është paraqitur një vrimë cilindrike për kullimin e ujit nga toka.

a) Sa vëllim zë vrima?

b) Vrima duhet të mbështjellet nga brenda me unaza betoni cilindrike. Secila prej unazave ka lartësi 25 cm dhe trashësi 5 cm. Sa unaza të tilla nevojiten për të mbështjellë vrimën? Nëse betoni ka dendësi specifike 2500 kg/m³, përcaktoni masën totale të të gjitha unazave.

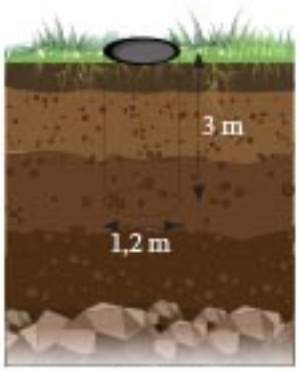


Figura 1

## Tema 6:

# PUNA ME TË DHËNA

**Me shtjellimin e kësaj teme do të aftësoheni:**

1. të përdorni probabilitetin klasik dhe eksperimental në zgjidhjen e problemeve edhe në kontekstin real.
2. të grumbulloni dhe përpunoni të dhëna dhe t'i interpretoni rezultatet në kontekst real.

# 6.1. Probabiliteti eksperimental

## DETYRA 1

Shqyrtoni fjalitë në vijim dhe mundohuni të krijoni fjali të ngjashme me to:

a) Sot ka shumë mundësi që të bjerë shi!

b) Mësova gjithë vitin me përkushtim, prandaj kam gjasa të mira për notë të shkëlqyeshme!

c) E pamundur është që dikush të jetë 200 vjeç!

ç) Nga dy përgjigjet e ofruara të një pyetjeje, gjasat janë 50:50 ta qëlloni përgjigjen e saktë, edhe pse të njëjtën nuk e dini.

Fjalitë si këto më sipër përdoren shpesh në të folmen e përditshme. Secila përmban një parashikim të caktuar që bazohet në përvojën tonë. Gjasa që të ndodh një fenomen, ngjarje, e caktuar mund të caktohet numerikisht.

## SHEMBULLI 1

Në një klasë me 24 nxënës është kryer eksperimenti në vijim. Nxënësit janë ndarë në çifte dhe secili çift duhet të vrojtojë se sa herë është shfaqur "stema" gjatë 20 hedhjeve të monedhës. Nga çdo çift njëri anëtar realizon eksperimentin, kurse tjetri merr shënimet. Më pas, rezultatet shkruhen në tabelë:

| numri i hedhjeve të monedhës | numri i paraqitjeve të "stemës" | herësi i numrit të paraqitjes së "stemës" dhe numrit të përgjithshëm të hedhjeve |
|---|---|---|
| 20 | 7 | $\frac{7}{20}$ |

Në hapin e radhës nxënësit i ndërrojnë rolet kurse dyfishohet numri i hedhjeve. Rezultatet e fituara nga gjitha çiftet janë të shënuara në tabelë. Më pas është bërë krahasimi i herësve të fituar dhe është arritur në përfundimin se ashtu sikurse rritet numri i realizimeve të eksperimentit, vlera e tyre i afrohet vlerës 0,5.

## AKTIVITET

Organizoni një aktivitet të ngjashëm, por me zarin për lojë dhe shënoni sa herë janë shfaqur gjashtë pika në faqen e sipërme të zarit. Secili grup duhet të shënojë rezultatet e veta në tabelë. Në shtyllën e fundit secili grup, duke filluar nga i dyti, duhet të vejë herësin e numrit të paraqitjeve të gjashtë pikave, pjesëtuar me numrin e përgjithshëm të hedhjes së zarit bashkërisht me grupin pararendës. Përfundimet të diskutohen në nivel të klasës.

## SHEMBULLI 2

Në një klasë me 24 nxënës, të ndarë në grupe me nga 3 nxënës, hidhet zari për lojë dhe vrojtohet se sa herë në faqen e sipërme janë shfaqur tri pika. Në tabelë janë shënuar rezultatet e gjitha grupeve gjatë hedhjes së zarit për lojë më shumë se 20 herë, por jo më shumë se 30 herë. Në shtyllën e parafundit

secili grup shënon herësin e numrit të paraqitjes së tri pikave me numrin e gjitha hedhjeve që njihet si **shpeshtësia relative** ose frekuencë e paraqitjes së tri pikave. Në shtyllën e parafundit, secili grup, duke filluar me grupin e dytë, duhet të shkruajë herësin e numrit të përgjithshëm të paraqitjes së tri pikave, bashkë me grupin pararendës, me numrin e përgjithshëm të gjitha hedhjeve të dy grupeve. Ky numër quhet **shpeshtësia kumulative** e paraqitjes së tri pikave..

| numri i grupit | numri i hedhjes së zarit | numri i paraqitjeve të tri pikave | shpeshtësia ose frekuenca relative | shpeshtësia kumulative |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 7 | $\frac{7}{20} = 0{,}35$ | $\frac{7}{20} = 0{,}35$ |
| 2 | 22 | 3 | $\frac{3}{22} \approx 0{,}14$ | $\frac{7+3}{20+22} = \frac{10}{42} \approx 0{,}238$ |
| 3 | 21 | 1 | $\frac{1}{21} \approx 0{,}05$ | $\frac{10+1}{42+21} = \frac{11}{63} \approx 0{,}175$ |
| 4 | 25 | 6 | $\frac{6}{25} = 0{,}24$ | $\frac{11+6}{63+25} = \frac{17}{88} \approx 0{,}193$ |
| 5 | 30 | 3 | $\frac{3}{30} = 0{,}1$ | $\frac{17+3}{88+30} = \frac{20}{118} \approx 0{,}169$ |
| 6 | 22 | 4 | $\frac{4}{22} = 0{,}18$ | $\frac{20+4}{118+22} = \frac{24}{140} \approx 0{,}171$ |
| 7 | 24 | 4 | $\frac{4}{24} = 0{,}17$ | $\frac{24+4}{140+24} = \frac{28}{164} \approx 0{,}171$ |
| 8 | 23 | 3 | $\frac{3}{23} = 0{,}13$ | $\frac{28+3}{164+23} = \frac{31}{187} \approx 0{,}166$ |

Sipas të dhënave nga shtylla e parafundit dhe e fundit mund të përfundohet se me rritjen e numrit të hedhjeve të kubit për lojë, herësi i afrohet vlerës $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$.

## DETYRA 2

Përpiquni të përpiloni një tabelë në të cilën do t'i shënoni paraqitjet e secilit numër pikash në faqen e sipërme të zarit, fillimisht për 20 hedhje, më pas për 30 hedhje dhe në fund për 40 hedhje të zarit. Ç'mund të thuhet për herësit e paraqitjes së secilit numër pikash ndaj numrit të hedhjeve të zarit? Tabela mund të duket si më poshtë:

| numri i hedhjeve të zarit | numri i pikave të paraqitura në zar | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 20 | | | | | | |
| 30 | | | | | | |
| 40 | | | | | | |

## DETYRA 3

Dy monedha hidhen njëkohësisht 20 herë. Vrojtoni ngjarjet:

a) numrin e paraqitjes së "stemës" në të dyja monedhat,

b) numrin e paraqitjeve të paktën e një "fytyre" në dy monedhat.

Të dhënat shkruani në tabelë. Llogaritni shpeshtësinë kumulative. Mendoni për vlerën të cilës i afrohen herësit e fituar.

Në gjithë shembujt dhe detyrat e mëparshme kemi kryer eksperimente dhe kemi vrojtuar një ngjarje të caktuar.



Le të jetë $n$ numri i eksperimenteve. Herësi i numrit të eksperimenteve, në të cilët është realizuar ngjarja që e vrojtojmë ndaj numrit të përgjithshëm të eksperimenteve, quhet **probabilitet eksperimental** ose **empirik** i ngjarjes.

Kjo vlerë varet nga numri i eksperimenteve, si dhe nga numri i realizimeve të një ngjarje të caktuar paraqitja e të cilës shënohet. Për shkrim më të thjeshtë përdoren simbolet $P(A) = \frac{m}{n}$, ku $A$ përdoret për të shënuar ngjarjen, $P(A)$ është probabiliteti i ngjarjes $A$, $m$ është numri i realizimeve të ngjarjes $A$, kurse $n$ është numri i eksperimenteve.

## SHEMBULLI 3

Një monedhë është hedhur 1000 herë. Është vërejtur se "fytyra" është paraqitur 547 herë. Kjo do të thotë se probabiliteti i ngjarjes $A$: numri i paraqitjes së "fytyrës" është $\frac{547}{1000} = 0{,}547$, kurse probabiliteti i ngjarjes $B$: është paraqitur "stema" është $\frac{453}{1000} = 0{,}453$. Qartazi këto dy ngjarje janë mundësitë e vetme që mund të realizohen gjatë hedhjes së monedhës dhe $P(A) + P(B) = 0{,}547 + 0{,}453 = 1$.

## DETYRA 4

Dy monedha janë hedhur, njëkohësisht, 600 herë. Janë vrojtuar ngjarjet $A$: Janë paraqitur dy "stema", $B$: Nuk është paraqitur asnjë "stemë" dhe $C$: Është paraqitur "stemë". Në tabelë është shënuar sa herë është realizuar secila prej ngjarjeve:

| numri i hedhjeve | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|
| 500 | 110 | 225 | 165 |

Llogaritni probabilitetin eksperimental të ngjarjeve $A$, $B$ dhe $C$.

## DETYRA 5

Janë krahasuar *parashikimi i motit* dhe *moti* i një dite përkatëse për 240 ditë të një viti. Është konstatuar se parashikimi i motit ka rezultuar i saktë për 176 ditë. Caktoni probabilitetin eksperimental të ngjarjeve $A$: "*Parashikimi i motit është i saktë*" dhe $B$: "*Parashikimi i motit nuk është i saktë*" dhe vlerat e fituara shkruani si përqindje.

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Një prodhues i gomave të automobilave në tabelë mban evidencën se pas sa kilometrash të kaluara gomat duhet të zëvendësohen. Për 100 automobila janë fituar rezultatet në vijim:

| distanca në kilometra | deri 4000 | ndërmjet 4000 dhe 8000 | ndërmjet 8000 dhe 12000 | mbi 12000 |
|---|---|---|---|---|
| numri i automobilave | 215 | 235 | 297 | 253 |

Caktoni probabilitetin eksperimental, si përqindje, të gomave automobilistike të blera nga ky prodhues që duhet të zëvendësohen, pas kalimit të:

*A*: më pak se 4000 kilometra,

*B*: të kaluara më shumë se 4000 kilometra, por më pak se 12000 kilometra,

*C*: të kaluara më shumë se 12000 kilometra.

2. Në një gjysmë vjetor shkollor janë realizuar 6 testime me shkrim nga matematika dhe përqindjet e pikëve të fituara të Janës janë dhënë në tabelën në vijim:

| numri i testit me shkrim | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| numri i pikëve të fituara | 73 | 69 | 67 | 81 | 68 | 62 |

Caktoni probabilitetin eksperimental që Jana, në njërin nga testet me shkrim, të përzgjedhur rastësisht, të ketë mbi 70% të pikëve të fituara.

3. Analiza e ditëve me diell në një periudhë vjetore është me sa vijon:

| muaji | maj | qershor | korrik | gusht |
|---|---|---|---|---|
| numri i ditëve me diell | 19 | 22 | 24 | 20 |

Sa është probabiliteti eksperimental që dita, e përzgjedhur rastësisht, nga kjo periudhë të ketë qenë me diell?

4. Gjatë mbikëqyrjes inspektuese të paketimeve të sheqerit me masë neto të paraparë prej 900 gramësh, në 50 produkte është vërtetuar se:

| masa në gramë | 880-890 | 890-900 | 900-910 | 910-920 |
|---|---|---|---|---|
| numri i paketimeve | 19 | 15 | 13 | 3 |

Sa është probabiliteti eksperimental që paketimi i përzgjedhur rastësisht të ketë masë më të madhe se 900 gramë?

5. Kërkoni të dhëna dhe përpiloni një tabelë në të cilën do të vendosni përqendrimet e dyoksidit të sulfurit në $\mu g/m^3$ për disa nga qytetet më të mëdha të shtetit gjatë muajit janar. Caktoni sa është probabiliteti që qyteti i përzgjedhur rastësisht të ketë përqendrim të dyoksidit të sulfurit që tejkalon vlerën 125 $\mu g/m^3$.

**HULUMTIM**

Merrni tri monedha dhe njëkohësisht hidhni 40 herë. Pas secilës hedhje vëreni paraqitjet e "stemës":

a) nuk është paraqitur në asnjërën monedhë, b) është paraqitur vetëm në njërën monedhë,

c) është paraqitur në saktësisht dy monedha, ç) është paraqitur në të tri monedhat

Më pas njehsoni shpeshtësinë relative. A mund të nxjerrësh ndonjë përfundim? Ç'do të mësosh, nëse numri i hedhjeve rritet për 10?

# 6.2. Probabiliteti klasik

## DETYRA 1

Mendoni dhe përgjigjuni pyetjeve:

a) Nëse supozoni se monedha është hedhur 10000 herë, atëherë në sa hedhje që të bjerë "fytyra"?

b) Nëse zari për lojë është hedhur 100000 herë, atëherë në sa hedhje pret që të fitojmë dy pika në faqen e sipërme të zarit?

Shumë eksperimente, sikurse hedhja e monedhës ose zarit për lojë mund të përsëriten numër të madh herësh. Të tjerë, nga ana tjetër, kushtojnë shumë ose është e pamundur të ndodhin shpesh, sikurse për shembull testimi i fluturakes kozmike në lidhje me disa parametra të veçantë të nevojshëm për efikasitet më të mirë. Testimi i qëndrueshmërisë i objektit të dhënë nën ndikimin e erërave të forta ose tërmeteve me intensitet të caktuar ose rrënimi i tyre për të matur efektin e shkatërrimit, nuk është gjithmonë i mundshëm. Pikërisht për këtë arsye, nëse supozojmë se në një eksperiment secila ngjarje është e barasmundshme, atëherë probabilitetin e përkufizojmë në një tjetër mënyrë.



**Probabiliteti klasik** ose **teorik** është herës i numrit të gjitha realizimeve të favorshme të ngjarjes $A$ dhe numrit të përgjithshëm të realizimeve të mundshme të eksperimentit, me kusht që gjitha realizimet në një eksperiment janë të barasmundshme.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Në vijim me probabilitet do të nënkuptojmë probabilitetin klasik.

## SHEMBULLI 1

Monedha hidhet vetëm një herë. Nën supozimin se të dy faqet kanë gjasa të barabarta që të shfaqen, atëherë ka rënë "stemë" është ngjarje me probabilitet $\frac{1}{2}$ d.m.th. 50%. Ngjashëm edhe ngjarja ka rënë "fytyrë" ka probabilitet 50%.

## DETYRA 2

Zari hidhet vetëm një herë. Sa është probabiliteti që në faqen e sipërme të shfaqen:
a) gjashtë pika, b) katër pika?

### SHEMBULLI 2

Në një enë ka tre topa të vegjël: një i kuq, një i verdhë dhe një i kaltër. Iliri nxjerr një top pa parë në enë.

Probabiliteti që ky top i vogël i nxjerrë të jetë i kaltër është $\frac{1}{3}$, sepse të gjithë topat kanë gjasa të barabarta të tërhiqen, kurse vetëm njëri është i kaltër. Ngjashëm, probabiliteti që topi i nxjerrë të jetë i kuq, përkatësisht i verdhë gjithashtu është $\frac{1}{3}$. Mund të themi se të gjithë topat kanë gjasë përafërsisht 33,33% që të nxirren nga ena.

Ngjarjet *ka* rënë "stemë", ka rënë "fytyrë", janë shfaqur tri pika, gjashtë pika në faqen e sipërme të zarit, e të tjera, quhen **ngjarje elementare**.

## DETYRA 3

Zari hidhet një herë. Sa është probabiliteti i ngjarjes:

a) ka rënë numër më i vogël se 4,

b) ka rënë numër që nuk është më i vogël se 4?

Më pas mendohuni, këto dy ngjarje a mund t'i quajmë ngjarje elementare? Përpiquni t'i formuloni me fjalë të tjera këto ngjarje dhe caktoni nëse me ndihmën e tyre janë përfshirë gjitha realizimet, rezultatet, e mundshme gjatë hedhjes së zarit.



Ngjarja që i përmban gjitha realizimet që nuk i takojnë ngjarjes $A$ quhet **ngjarje e kundërt** e ngjarjes $A$. Këtë ngjarje do ta shënojmë me $\overline{A}$.
Probabiliteti i ngjarjes së kundërt është $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

### SHEMBULLI 3

Zari hidhet një herë. Sa është probabiliteti i ngjarjes:
a) ka rënë numri 8,
b) ka rënë numër që nuk është më i madh se 6?

Ka rënë numri 8 ka 0 realizime të favorshme, pasi zari ka gjashtë faqe dhe numra që mund të shfaqen në faqen e sipërme janë 1, 2, 3, 4, 5 ose 6. Probabiliteti i kësaj ngjarjeje është 0. Kjo është **ngjarje e pamundshme**. Ka rënë numër që nuk është më i madh se 6, d.m.th. më i vogël ose i barabartë me 6, ka 6 realizime të favorshme që është sa edhe numri i përgjithshëm i realizimeve të mundshme. Probabiliteti i kësaj ngjarjeje është 1. Kjo është një **ngjarje e sigurt**.



Për çdo ngjarje $A$, vlen $0 \leq P(A) \leq 1$

## DETYRA 4

Kuverta standarde e letrave për lojë ka 52 karta, që janë ndarë në 4 grupe (♣, ♦, ♥ dhe ♠) me nga 13 karta në secilin grup. Nga kuverta është nxjerrë një kartë. Sa është probabiliteti i ngjarjes:

a) karta e nxjerrë të jetë e kuqe,

b) karta e nxjerrë të jetë dhjetëshe,

c) karta e nxjerrë të jetë "mbretëreshë" e zezë,

ç) karta e nxjerrë të jetë " as zemër",

d) karta e nxjerrë të mos jetë "fytyrë", përkatësisht të mos jetë "fant", "mbretëreshë" ose " mbret".

## DETYRA 5

Në një enë ka 4 topa të vegjël të kuq, 6 të gjelbër dhe 10 topa të vegjël të kaltër. Nga ena është nxjerrë një top. Sa është probabiliteti që topi i nxjerrë:

a) të mos jetë i kaltër,

b) të mos jetë as i kuq as i gjelbër,

c) të jetë i gjelbër ose i kaltër.

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Sa është probabiliteti që dy shokë të kenë ditëlindjen (nuk është e thënë në vitin e njëjtë):
   a) në datë të njëjtë, b) në data të ndryshme, nëse e zëmë se viti ka 365 ditë?

2. Në një klasë ka 28 nxënës, 18 janë vajza dhe 10 janë djem. Në fletëza janë shënuar numrat rendor nga ditari për evidencë. Fletëzat janë vendosur në një enë jo e tejdukshme dhe mësuesi e nxjerr një fletëz nga ena.
   a) Sa është probabiliteti që fletëza e tërhequr është numër vajze?
   b) Sa është probabiliteti që fletëza e tërhequr është numër djali?

3. Në një kuti janë vendosur 7 topa të vegjël të kaltër, 4 të gjelbër dhe 6 topa të vegjël të kuq. Caktoni probabilitetin e ngjarjeve:
   a) është tërhequr një top i kaltër, b) është nxjerrë një top i gjelbër,
   c) është tërhequr një top i kuq.

4. Viktori hedh dy monedha njëherësh. Sa është probabiliteti i ngjarjes të ketë rënë *të paktën një "fytyrë"*?

5. Në një enë janë vendosur fletëza në të cilat janë shkruar gjithë numrat natyrorë që janë shumëfisha të numrit 3 dhe nuk janë më të mëdhenj se 37. Nga ena është nxjerrë një fletëz. Sa është probabiliteti që numri në fletëzën e nxjerrë të jetë çift?

### HULUMTIM

Në një enë janë vënë 10 fletëza në të cilat janë shkruar shifrat prej 1 deri 9 dhe 0. Nga ena nxirren 5 fletëza, njëra pas tjetrës, pa kthim. Sa është probabiliteti që në gjitha 5 fletëzat e nxjerra janë shifra tek?

# 6.3. Grumbullimi i të dhënave

## DETYRA 1

Duhet të kontrolloni sa kohë shokët e klasës tuaj kalojnë në mësim, sa orë kalojnë në platformat sociale, sa orë kalojnë në lojëra shoqërore, e sa orë kalojnë në lojëra kompjuterike. Mendoni se si mund të arrini më shpejt deri te këto informacione, nëse në klasën tuaj ka 34 nxënës. A do ti grumbullonit të dhënat në mënyrën e njëjtë për gjitha paralelet e vitit të parë? Çka në qoftë se do të duhej të grumbulloheshin të dhënat nga e gjithë shkolla e cila numëron 1000 nxënës?



Grumbullimi i të dhënave për ndonjë hulumtim kryhet përmes **instrumentit për grumbullimin e të dhënave**. Instrumente të tilla janë anketat, pyetësorët, listat kontrolluese e të ngjashme.

## SHEMBULLI 1

Në një shkollë dëshironin të kontrollojnë të gjithë nxënësit e vitit të parë se në çfarë kondicioni fizik janë. Për këtë arsye vendosën të kontrollojnë nëse djemtë kanë rezultate më të mira në vrapimin 30 metrash? A ka dallim në gjatësinë e kërcimit së largu? Ushtrimet për formësimin e trupit i kryejnë më mirë djemtë apo vajzat? Çfarë qëndrimi të trupit kanë nxënësit?

Gjithë nxënësit që mësojnë në vitin e parë janë 150 dhe nuk është praktike që të testohen të gjithë. Pikërisht për këtë arsye janë përzgjedhur 30 nxënës në mënyrë rastësore dhe të gjithëve u është shënuar gjinia, gjatësia e kërcimit së largu në metra, koha e vrapimit 30 metrash në sekonda, numri i ushtrimeve për formësimin e trupit për 1 minutë, kurse qëndrimi i trupit është vlerësuar si e keqe, e mirë ose e shkëlqyer. Në këtë mënyrë janë grumbulluar të dhënat për këta 30 nxënës dhe të gjithë ata janë përfaqësues të gjithë popullatës së nxënësve të vitit të parë.



Pjesa e popullatës që përbëhet nga individë që kanë mundësi të barabarta për t'u përzgjedhur quhet **mostër e rastësishme**. Vetia e cila hulumtohet quhet **e dhënë statistikore** ose **ndryshore statistikore**.

Të dhënat statistikore ose ndryshoret statistikore mund të jenë **përshkruese** ose cilësore (sikurse është qëndrimi i trupit) dhe **numerike** ose sasiore (sikurse është koha e vrapimit në 30 metra e shprehur në sekonda).

## DETYRA 2

Mendoni se çfarë hulumtimi mund të realizoni me shokët/shoqet e klasës. Përgatitni pyetësor, përzgjidhni mostrën dhe realizoni hulumtimin.

### SHEMBULLI 2

Maja mendon se në cilat sporte ekipore dëshirojnë të marrin pjesë nxënësit/nxënëset e klasës së saj: futboll, basketboll, volejboll ose hendboll. I shkroi sportet ekipore në një letër, më pas pranë çdo sporti sipas përgjigjeve të fituara vendosi vijëza dhe fitoi me sa vijon:
futboll 𝍸 𝍸 𝍸
basketboll 𝍸 𝍸
volejboll 𝍸
hendboll ||

Maja, në këtë mënyrë, përgatiti një pyetësor dhe përmes frekuencës ose shpeshtësisë së secilës përgjigje, zbuloi se futbolli është sporti ekipor në të cilin më shumë nga shokët e klasës kanë dëshirë të marrin pjesë.

## DETYRA 3

Mendoni nëse për hulumtimin e pyetjes nëse nxënësit më mirë ndjehen në shkollë mjafton të merret mostra me 30 nxënës nga klasa e parë, nëse në shkollë ka 1200 nxënës nga klasa e parë deri tek e katërta? Arsyetoni përgjigjen!

### SHEMBULLI 3

Almiri ka realizuar një anketë në klasë për atë se sa sekonda mund të mbajnë frymën shokët/shoqet e klasës së tij. E mati kohën dhe i shkroi sekondat për secilin prej shokëve/shoqeve të klasës:

11 17 21 35 24 14
18 22 33 42 23 19
14 24 17 12 13 18
19 22 21 24 14 17

Ai dëshiron të dijë sa nga nxënësit mund të mbajnë më gjatë frymën? A thua më shumë nxënës mund ta mbajnë frymën më gjatë se 20 sekonda? Sa prej tyre mund ta mbajnë frymën më gjatë se 30 sekonda?

Është e qartë se të dhënat e grumbulluara në këtë mënyrë vështirë analizohen, prandaj më mirë është të grupohen përmes disa karakteristikave më të veçanta. Për shembull, mund të shqyrtojmë ndarjen në vijim:

| numri i sekondave | frekuenca |
|---|---|
| 10-20 | 13 |
| 21-30 | 8 |
| 31-40 | 2 |
| 41-50 | 1 |

Nga këtu lehtësisht mund të përgjigjemi në pyetjet e parashtruara.

Në këtë mënyrë të dhënat janë **grupuar** sipas frekuencave, d.m.th. janë paraqitur me **tabelën e frekuencave të grupuara**.

## DETYRA 4

Në një grup prej 50 turistësh, 8 janë më të moshuar se 70 vjeç, 15 janë ndërmjet 50 dhe 70, 10 ndërmjet 30 dhe 50, 14 ndërmjet 10 dhe 30 vjeç. Përpiquni që të dhënat t'i paraqitni në tabelë.
Bëni kujdes që intervalet e moshës të mos mbimbulohen. Në grup, a ka turistë me të shumtën 10 vjeç moshë?

## DETYRA PËR USHTRIME

**1.** Diana dhe Orhani përpiluan një pyetësor për grupin e gjakut të shokëve/shoqeve të klasës. Nga klasa prej 30 nxënësve i grumbulluan të dhënat në vijim:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | B | AB | A | O | O |
| AB | A | O | B | A | AB |
| A | A | O | A | AB | O |
| AB | A | A | O | A | O |
| B | O | AB | AB | A | A |

Përpiloni tabelë frekuencash dhe caktoni shpeshtësinë relative. Cili grup gjaku është më i shpeshtë në klasë? Cili grup është më i rrallë?

**2.** Lartësitë, në cm, e nxënësve të një klase janë me sa vijon: 159, 138, 142, 163, 142, 142, 146, 148, 139, 141, 142, 156, 156, 139, 143, 166, 143, 158, 141, 142, 151, 142, 162, 142, 162, 148, 162, 138, 142, 136, 159. Përpiloni tabelën e frekuencave të grupuara:

| Lartësia (cm) | Frekuenca |
|---|---|
| 130-140 | |
| 141-150 | |
| 151-160 | |
| 161-170 | |

Më pas caktoni shpeshtësinë relative në përqindje dhe zgjidhni detyrat në vijim:

a) Sa është përqindja e nxënësve që janë më të lartë se 160 cm?

b) Sa është probabiliteti që të përzgjidhet nxënës, lartësia e të cilit është më e madhe se 140 cm?

c) Është përzgjedhur një nxënës nga klasa. Sa është probabiliteti ai të jetë më i lartë se 150 cm, por të mos jetë më i lartë se 161 cm?

**3.** Në testin e matematikë janë fituar pikët në vijim: 85, 14, 87, 96, 45, 32, 45, 24, 15, 4, 65, 75, 74, 52, 57, 55, 32, 14, 13, 99, 100, 12, 37, 3, 37, 44, 55, 61, 25, 14, 74, 73, 8, 23, 24, 14, 25, 24, 52, 57, 12, 18, 17, 22, 88, 65, 32, 59, 85, 14, 17, 9, 33, 37. Përpiloni tabelën e frekuencave të grupuara:

| pikë | frekuenca |
|---|---|
| 0-10 | |
| 11-20 | |
| 21-30 | |
| 31-40 | |
| 41-50 | |
| 51-60 | |
| 61-70 | |
| sipër 70 | |

Më pas caktoni shpeshtësinë relative dhe përgjigjuni pyetjeve në vijim:

a) Sa nxënës kanë më pak se 41 pikë?

b) A është numri i nxënësve që kanë më pak se 51 pikë, por më shumë se 30 pikë, më i madh se numri i atyre nxënësve që kanë më shumë se 60 pikë, por më pak se 71 pikë?

c) Sa nxënës janë liruar nga shkrimi i dy detyrave të shtëpisë, nëse kusht për këtë është fitimi i më shumë se 70 pikëve?

ç) Sa nxënës do të fitojnë udhëzime për detyra shtëpie shtesë, nëse kusht për këtë është fitimi i më pak se 21 pikëve?

4. Vrojtoni ngjyrën e automobilave që kalojnë në një vend të rrugës sate, gjatë një ore. Për të dhënat e grumbulluara përpiloni tabelën e frekuencave. Më pas përgjigjuni pyetjeve në vijim:

a) Sa është shpeshtësia relative e automobilave me ngjyrë të kuqe?

b) Sa të shpeshtë janë automobilat me ngjyrë të zezë?

c) Sa automobila me ngjyrë të gjelbër kaluan në këtë interval kohor?

5. Për secilin nga muajt e kaluar gjeni numrin e nxënësve që kanë munguar nga orët. Paraqitni të dhënat e grumbulluara në tabelën e frekuencave. Më pas caktoni:

a) Sa nxënës kanë më shumë se 5 mungesa nga mësimi?

b) Sa nxënës kanë më pak se 3 orë mungesa nga mësimi?

c) A ka nxënës pa mungesa?

ç) Nëse për numër më të madh se 10 mungesa duhet të ndiqet mësim shtesë, atëherë sa prej nxënësve do të ndjekin mësimin e tillë?

**HULUMTIM**

Grumbulloni të dhëna lidhur me harxhimet për patatina për kohën e transmetimit televiziv të evenimenteve të mëdha sportive për periudhën prej 3 muajsh. Shqyrtoni shpeshtësinë e llojeve të ndryshme të patatinave dhe paraqitni të dhënat me tabelë të frekuencave.

# 6.4. Paraqitja grafike e të dhënave

Të dhënat e grumbulluara, për qartësi më të madhe, shpesh paraqiten grafikisht, me **diagramin e frekuencave**. Diagrami është një mënyrë e paraqitjes së të dhënave me anë të së cilit arrihet pamje e qartë dhe qartësi e asaj që kemi vrojtuar, matur, numëruar dhe të ngjashme. Gjatë vizatimit të diagramit përdoren vija, figura gjeometrike, fotografi me qëllim që ai të jetë i thjeshtë dhe i qartë, sepse më e rëndësishme është që të dhënat të jenë të kuptueshme, kurse përfundimet që dalin prej tyre të jenë lehtësisht të dukshme.

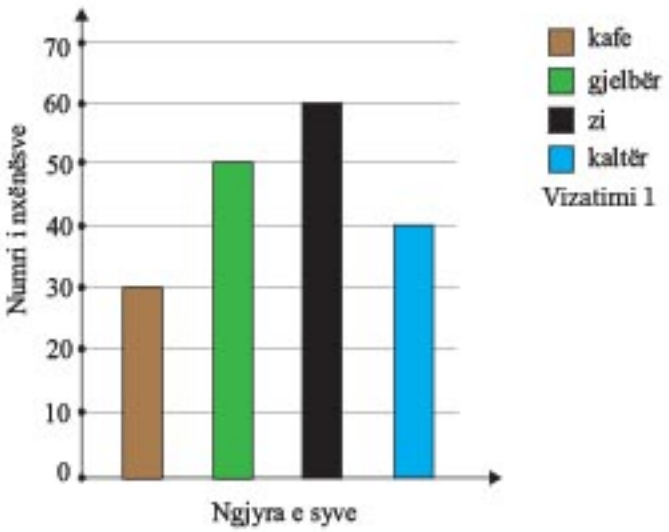
## Diagrami me shtylla

**Diagrami me shtylla** ka një vijë horizontale dhe një vijë vertikale nga ana e majtë e asaj horizontale. Nën vijën horizontale, zakonisht, shkruhet titulli i problemi që hulumtojmë (shkolla, të ushqyerit, harxhimi i ujit, notat dhe të tjera). Përgjatë gjatësisë së vijë vertikale shkruhet masa njësi përmes së cilës shprehet madhësia e të dhënave sipas kategorive. Më shpesh, në diagramin me shtylla shfrytëzohen drejtkëndësha me bazë të njëjtë, e cila shtrihet në vijën horizontale. Lartësia e secilit drejtkëndësh,

përkatësisht lartësia e secilës shtyllë, varet nga numri i të dhënave të cilat ai i përfaqëson. Kjo mënyrë, më shpesh, përdoret për të dhënat që janë numra realë nga ndonjë interval, por jo edhe gjithë numrat e atij intervali. Themi se të dhënat janë të **llojit diskret**.

## SHEMBULLI 1

Në vizatimin 1 me diagram me shtylla janë paraqitur të dhënat për ngjyrën e syve të 180 nxënësve të një shkolle. Nga diagrami lexojmë, për shembull, se 60 nxënës kanë sy të zinj, kurse sy të kaltër dhe të gjelbër kanë 90 nxënës, d.m.th. 50% e gjithë nxënësve.




Vizatimi 1

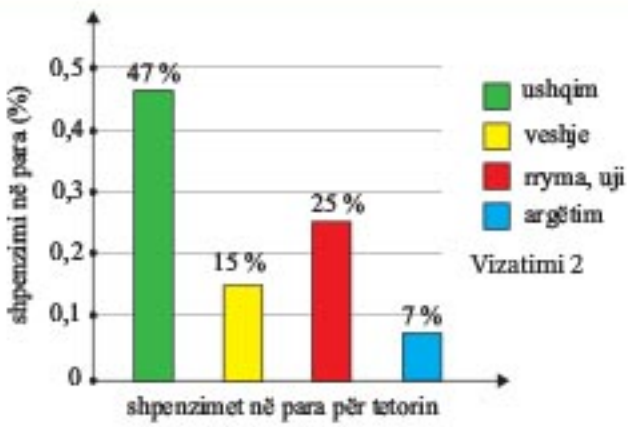
Në këtë shembull të dhënat fillimisht janë grupuar sipas frekuencës, e më pas janë paraqitur me diagram me shtylla.

## DETYRA 1

Të dhënat e diagramit të shembullit 1, futni në tabelë.

## SHEMBULLI 2

Në vizatimin 2, me anë të diagramit me shtylla, është paraqitur shpërndarja e fitimit e një familjeje për muajin tetor. Vërejmë se familja, nga fitimi i përgjithshëm, 47% e ka harxhuar për ushqim, 15% për veshje, 25% për rrymën dhe ujin, dhe 7% për argëtim. Sipas diagramit me shtylla, familja në fjalë, pjesën më të madhe të fitimit e ka harxhuar për ushqim, kurse më pak ka harxhuar për argëtim.




Vizatimi 2

## DETYRA 2

A thua familja nga shembulli 2 ka kursyer diçka në muajin tetor?

## DETYRA 3

Në tabelën më poshtë është dhënë numri i kopjeve të shitura të 4 prej librave më të shitur, në periudhën një javore, në një librari. Të dhënat e tabelës paraqitni në diagram me shtylla, duke marrë lartësinë 1 cm të përfaqësojë 10 libra të shitur.

| | Numri i kopjeve të shitura |
|---|---|
| Libri 1 | 66 |
| Libri 2 | 52 |
| Libri 3 | 38 |
| Libri 4 | 24 |

## DETYRA 4

Në tabelë janë dhënë numri i përgjithshëm i pikëve nga 3 teste nga matematika, që i ka arritur secili nxënës veç e veç. Numri maksimal i pikëve në secilin test është 100.

a) Plotësoni tabelën.

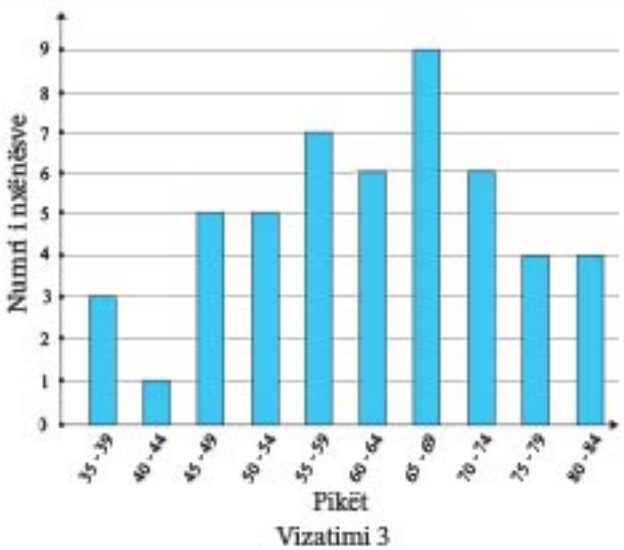
b) Të dhënat nga tabela, në përqindje, paraqitni me diagram me shtylla.

| Nxënësi | Pikët | % |
|---|---|---|
| Mile | 180 | |
| Imeri | 140 | |
| Sabrina | 280 | |
| Sofia | 260 | |

## SHEMBULLI 3

Pikët e fituara, të 50 nxënësve, në testin nga matematika janë me sa vijon: 35, 37, 38, 43, 45, 47, 47, 48, 49, 51, 53, 54, 54, 54, 55, 56, 57, 57, 57, 59, 59, 60, 60, 62, 63, 64, 64, 65, 66, 66, 67, 68, 68, 69, 69, 69, 69, 70, 71, 72, 72, 74, 76, 77, 75, 78, 81, 81, 84, 84.

Në këtë rast tabela e frekuencave do të jetë shumë e gjatë, prandaj më e dobishme është që të dhënat të grupohen sipas frekuencave në intervale, e më pas të dhënat e grupuara në këtë mënyrë të paraqiten në **diagramin e frekuencave të grupuara**. Grupimi i të dhënave bëhet më shpesh kur dallimi nga e dhëna më e madhe 84 dhe e dhëna më e vogël 35 ndahet në pjesë të barabarta. Në këtë rast dallimi është 49, prandaj një mënyrë e grupimit është të marrim 10 grupe me gjatësi 5 (Vizatimi 3).



Vizatimi 3

| Pikë | 35-39 | 40-44 | 45-49 | 50-54 | 55-59 | 60-64 | 65-69 | 70-74 | 75-79 | 80-84 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nxënës | 3 | 1 | 5 | 5 | 7 | 6 | 9 | 6 | 4 | 4 |

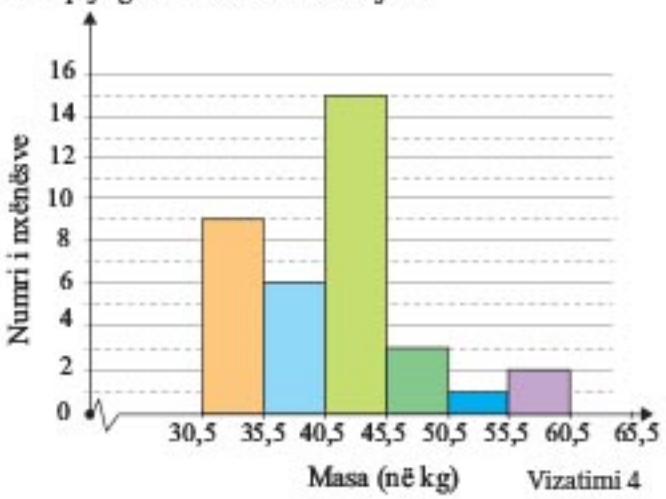
## Histogrami

### SHEMBULLI 4

Në një klasë është matur masa e nxënësve dhe është përpiluar tabela në vijim e frekuencave të grupuara:

| Masa (në kg) | Numri i nxënësve |
|---|---|
| 30,5-35,5 | 9 |
| 35,5-40,5 | 6 |
| 40,5-45,5 | 15 |
| 45,5-50,5 | 3 |
| 50,5-55,5 | 1 |
| 55,5-60,5 | 2 |

Paraqitja grafike është me sa vijon:




Vizatimi 4

Gjatë kësaj, masën prej 5 kg e kemi paraqitur si një 1 cm, përgjatë boshtit $x$, kurse përgjatë boshtit $y$ e paraqesim numrin e nxënësve, duke marrë në konsideratë që vlerat shtrihen nga 1 deri 15 (vizatimi 4). Shenja $\wedge\!\!\vee$ përdoret për të theksuar që intervali i parë fillon nga 0.

Paraqitja grafike që përbëhet nga drejtkëndësha me gjerësi të njëjtë, të lidhur njëri pranë tjetrit, quhet histogram me intervale të barabarta. Këtu, syprina e drejtkëndëshave është në përpjesëtim të drejtë me frekuencën e të dhënave. Kjo mënyrë e paraqitjes përdoret kur të dhënat janë që të gjitha numra realë nga ndonjë interval. Themi se të dhënat janë të **llojit të vazhdueshëm**.

### SHEMBULLI 5

Një mësuese dëshiron të analizojë punën e nxënësve të saj në testin e fundit nga matematika, i cili bart më së shumti 100 pikë. Në veçanti interesohet për nxënësit që kanë marrë më pak se 20 pikë dhe ata që kanë marrë më shumë se 70 pikë. Nxënësit e tri klasave i grupoi në mënyrën më poshtë:

| Numri i pikëve | Numri i nxënësve |
|---|---|
| 0-20 | 7 |
| 20-30 | 10 |
| 30-40 | 10 |
| 40-50 | 20 |
| 50-60 | 20 |
| 60-70 | 15 |
| mbi 70 | 8 |

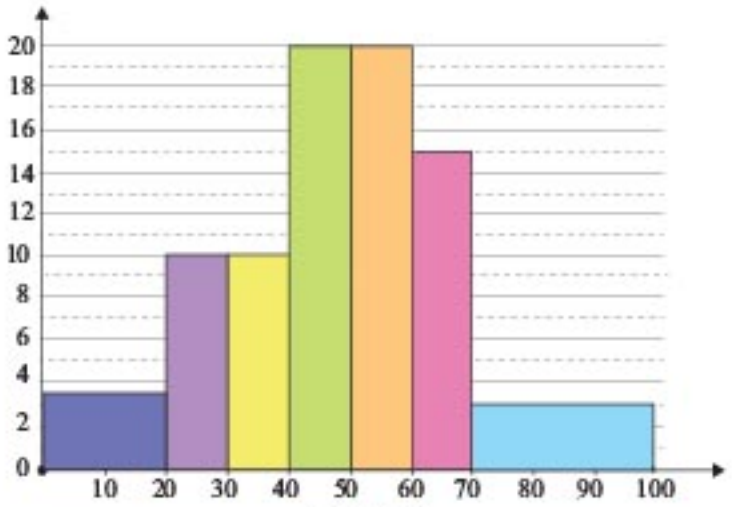
Meqenëse syprina e drejtkëndëshave duhet të jetë në përpjesëtim të drejtë me frekuencën, duhet të bëhet përshtatja përkatëse edhe përmes hapave në vijim:

1. Përzgjidhet intervali me gjerësi më të vogël, që në këtë rast është 10
2. Çdo drejtkëndësh ka gjatësinë që është në përpjesëtim me 10.

Kështu, fitojmë:

| Numri i pikëve | Numri i nxënësve | Gjerësia e klasës | Gjatësia e drejtkëndëshit |
|---|---|---|---|
| 0-20 | 7 | 20 | $\frac{7}{20} \cdot 10 = 3{,}5$ |
| 20-30 | 10 | 10 | $\frac{10}{10} \cdot 10 = 10$ |
| 30-40 | 10 | 10 | $\frac{10}{10} \cdot 10 = 10$ |
| 40-50 | 20 | 10 | $\frac{20}{10} \cdot 10 = 20$ |
| 50-60 | 20 | 10 | $\frac{20}{10} \cdot 10 = 20$ |
| 60-70 | 15 | 10 | $\frac{15}{10} \cdot 10 = 15$ |
| mbi 70 | 8 | 30 | $\frac{8}{30} \cdot 10 \approx 2{,}67$ |

Paraqitja grafike e të dhënave është bërë përmes vizatimit 5.



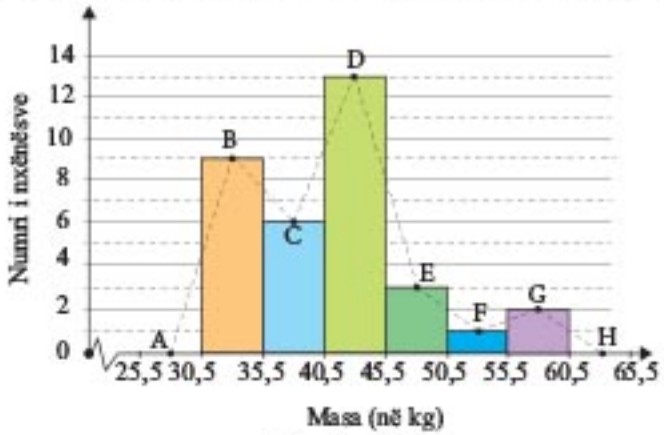

Vizatimi 5

Është e qartë se gjerësia e drejtkëndëshave është e ndryshme, kurse gjatësia është në përpjesëtim të drejtë me 10, që është theksuar në boshtin vertikal. Kjo paraqitje quhet **histogram me intervale jo të barabarta**.

## Poligoni i frekuencës

Nëse e marrim histogramin nga shembulli 4, e më pas i caktojmë pikat e mesme të gjerësisë së secilit drejtkëndësh dhe i shënojmë me $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, dhe $G$, atëherë fitohet vija e thyer $BCDEFG$. Duhet të fitojmë shumëkëndësh me pjesën e boshtit horizontal, prandaj marrim intervale me gjerësi të njëjtë

majtas dhe djathtas boshtit horizontal. Meset e këtyre intervaleve janë pikat $A$ dhe $H$, përkatësisht. Kështu është fituar vija e thyer $ABCDEFGH$. Meqenëse punojmë me syprina, është e qartë se me "shtimin" e këtyre intervaleve, për shkak të kongruencës së trekëndëshave syprina mbetet e njëjtë. Në këtë mënyrë fitohet paraqitja grafike (vizatimi 6) që quhet **poligon i frekuencës**.



Vizatimi 6

## DETYRA 5

Në testin nga matematika me numër maksimal të pikëve 100, në dy klasë janë fituar të dhënat në vijim. Paraqitni grafikisht me poligonin e frekuencës.

**Vërejtje**: Paraqitja grafike mund të realizohet edhe drejtpërdrejtë pa pas nevojë të vizatohet në fillim histogrami. Për këtë qëllim duhet të caktohet pika e mesme e secilit interval. Më shpesh kjo është gjysma e shumës e kufirit të majtë dhe të djathtë të intervalit.

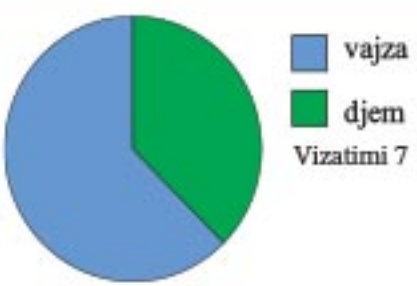
| Pikë | Numri i nxënësve | Pikë | Numri i nxënësve |
|---|---|---|---|
| 0-10 | 5 | 50-60 | 3 |
| 10-20 | 10 | 60-70 | 2 |
| 20-30 | 4 | 70-80 | 2 |
| 30-40 | 6 | 80-90 | 3 |
| 40-50 | 7 | 90-100 | 9 |

## Diagrami rrethor

Për të paraqitur të dhënat, shpesh herë mund të përdorim edhe rrethin dhe pjesët e rrethit. Diagrami i tillë quhet **diagram rrethor** ose **diagrami me sektorë**. Ky përdoret, zakonisht, kur numri i kategorive që shqyrtohen gjatë aranzhimit të të dhënave nuk është shumë i madh.

### SHEMBULLI 6

Në një klasë me 36 nxënës ka 15 vajza dhe 21 djem. Ka dy kategori: djem dhe vajza. Pra, diagrami rrethor do të jetë i ndarë në dy pjesë (sektorë). Që të përcaktohet madhësia e secilës pjesë, fillimisht do të caktohet këndi me të cilin do të përfaqësohet një nxënës i vetëm. Ai kënd është $360° : 36 = 10°$, prandaj pjesët e diagramit rrethor do t'i kenë këndet në vijim:



Vizatimi 7

- për vajza $10° \cdot 15 = 150°$
- për djem $10° \cdot 21 = 210°$.

Të dhënat janë grupuar sipas frekuencës, e më pas janë paraqitur grafikisht (vizatimi 7).

### DETYRA 6

Prania, në përqindje, e emisioneve të programit të një shtëpie televizive është paraqitur në tabelën në vijim:

| | % | Këndi |
|---|---|---|
| Muzikë | 30 | |
| Reklama | 20 | |
| Lajme | 6 | |
| Filma | 40 | |
| Sport | 4 | |

Plotësoni tabelën dhe vizatoni diagramin rrethor për të dhënat e saj. Më pas caktoni e sata pjesë e programit janë lajme, dhe e sata pjesë janë reklama? Sa është në përqindje sasia e programit kushtuar arsimit dhe shkencës?

### DETYRA 7

Shpërndarja e parave të Simonës për muajin prill është paraqitur në tabelën në vijim:

| | Denarë | % | Këndi |
|---|---|---|---|
| Qiraja | 1800 | | |
| Ushqimi | 6000 | | |
| Transporti | 950 | | |
| Të tjera | 1000 | | |
| Kursime | 250 | | |

Plotësoni tabelën dhe vizatoni diagramin rrethor për të dhënat e saj. Mendoni se si ndryshe mund të caktonit sektorët e diagramit rrethor si pjesë të rrethit.

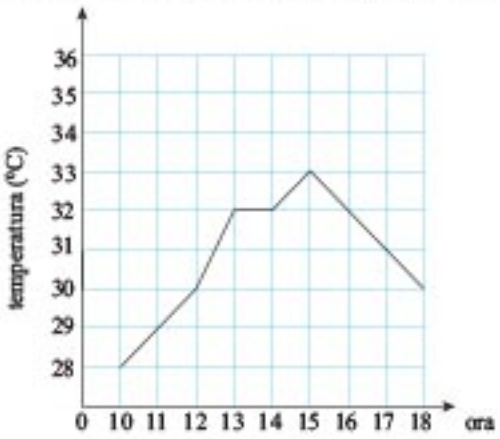
## Diagrami me vija

### SHEMBULLI 7

Jana ka matur temperaturën e ajrit nga ora 10 deri ora 18 dhe ka fituar rezultatet në vijim

| Ora | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Temperatura (°C) | 28 | 29 | 30 | 32 | 32 | 33 | 32 | 31 | 30 |

Matjet e mësipërme më pas i paraqiti në vizatimin 8.

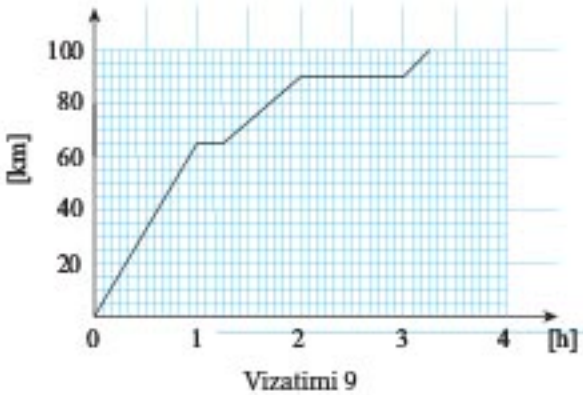



Vizatimi 8

Me paraqitjen e të dhënave në sistem koordinativ, fitojmë **diagram me vija**.

## SHEMBULLI 8

Toni udhëton nga Shkupi për në Kërçovë dhe rruga e tij është paraqitur me diagramin me vija në vizatimin 9.




Vizatimi 9

Nga diagrami mund të lexojmë se:

a) distanca e përshkuar në orën e parë të udhëtimit është 65 km,

b) distanca e përshkuar në orën e dytë është 25 km,

c) distanca e përgjithshme e përshkuar është 100 km,

ç) koha e përgjithshme e udhëtimit është 3 orë e 15 minuta.

## DETYRA 8

Çmimi i një çokollate është 20 denarë. Paraqitni varshmërinë e çmimit nga numri i çokollatave, me diagram me vija, sipas tabelës në vijim::

| Numri i çokollatave | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Çmimi | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |

## Piktogrami

### SHEMBULLI 9

Semra i shënoi frutat, që kishte në shtëpi, në mënyrën e paraqitur në të djathtë:

Më pas, ajo përdori piktogram, d.m.th. grafik për paraqitjen e të dhënave, ku vlerat numerike janë paraqitur përmes figurave. Kjo mënyrë, ndonjëherë, e bën paraqitjen e të dhënave më tërheqëse dhe më të lehtë për ta kuptuar. Në këtë mënyrë me piktogram është paraqitur numri i njësive të secilit prej frutave.

| frute | numri |
|---|---|
| mollë | |
| limonë | |
| portokaj | |
| banane | |
| dardhë | |

### SHEMBULLI 10

Eva ka numëruar ditët me diell në muajin prill dhe i ka paraqitur me piktogram.

Legjenda: Me ☀ janë përfaqësuar 2 ditë me diell.

Pra, nga 11 deri më 20 prill ka pasur 6 ditë me diell, ndërsa në total në muajin prill ka pasur 13 ditë me diell.

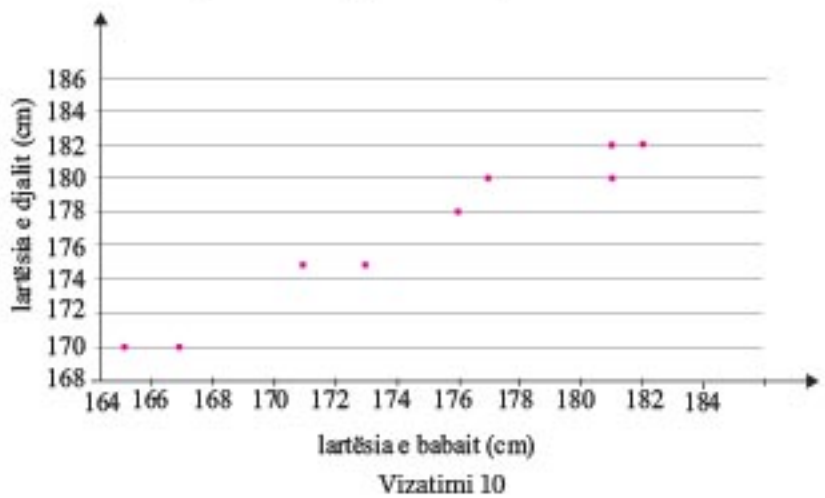
Shpesh nën piktogramin jepet legjenda me të cilën tregohet sa njësi i përgjigjen një figure të caktuar.

| data | ditë me diell |
|---|---|
| nga 1 deri 10 | ☀ ☀ ☀ ☀ |
| nga 11 deri 20 | ☀ ☀ ☀ |
| nga 21 deri 30 | ☀ |

## Diagrami me pika

### SHEMBULLI 11

Në paraqitjen grafike (vizatimi 10) janë paraqitur gjatësitë e babait dhe djalit si pika në sistemin koordinativ. Gjatë kësaj, gjatësia e babait në cm është paraqitur si koordinata $x$, kurse lartësia e djalit në cm është paraqitur si koordinata $y$ dhe kësisoj janë fituar pikat:




Vizatimi 10

Nga ky diagram lehtë mund të shihet se baballarët më të lartë kanë djem më të lartë.

## DETYRA 9

Në tabelën në vijim është paraqitur temperatura ditore maksimale dhe lagështia relative në muajin prill për disa vite në Shkup.

| viti | temperatura ditore maksimale | lagështia relative |
|---|---|---|
| 2021 | 19 °C | 69 % |
| 2022 | 18 °C | 67 % |
| 2023 | 20 °C | 65 % |
| 2024 | 21 °C | 55 % |
| 2025 | 22 °C | 60 % |

Paraqitni të dhënat me diagramin me pika dhe kontrollo nëse me rritjen e temperaturës ditore zvogëlohet lagështia relative? A vlen ky pohim gjithkund?

### HULUMTIM

Në tabelën më poshtë janë të dhënat e grumbulluara prej 30 nxënësve të një shkolle. Përzgjidhni paraqitjen e përshtatshme grafike, e më pas përgjigjuni pyetjeve:

a) A kanë djemtë rezultate më të mira në vrapimin 30 metrash?

b) A ka dallim në gjatësinë e kërcimit së largu, në varshmëri nga gjinia?

c) Ushtrimet për formim të trupit më mirë i bëjnë djemtë ose vajzat?

ç) Qëndrimi trupor është më i mirë te djemtë apo te vajzat?

| nxënësi | gjinia | kërcim së largu | vrapim në 30 m(sec) | formësim i trupit | qëndrim i trupit | nxënësi | gjinia | kërcim së largu | vrapim në 30 m(sec) | formësim i trupit | qëndrim i trupit |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | m | 2,23 | 3,91 | 57 | shkëlqyeshëm | 16 | f | 1,52 | 6,23 | 43 | mirë |
| 2 | m | 2,28 | 3,73 | 63 | mirë | 17 | m | 2,01 | 4,56 | 51 | shkëlqyeshëm |
| 3 | f | 1,42 | 6,15 | 35 | keq | 18 | f | 1,61 | 5,51 | 47 | mirë |
| 4 | m | 2,12 | 4,13 | 51 | shkëlqyeshëm | 19 | f | 1,62 | 5,53 | 46 | mirë |
| 5 | m | 1,45 | 4,18 | 56 | mirë | 20 | m | 1,65 | 5,11 | 53 | shkëlqyeshëm |
| 6 | f | 1,51 | 6,03 | 36 | keq | 21 | m | 1,90 | 4,89 | 51 | mirë |
| 7 | m | 2,15 | 4,17 | 53 | mirë | 22 | m | 1,67 | 5,06 | 42 | keq |
| 8 | m | 2,18 | 3,92 | 57 | shkëlqyeshëm | 23 | f | 1,73 | 6,12 | 49 | mirë |
| 9 | f | 1,47 | 6,07 | 41 | mirë | 24 | f | 1,65 | 5,01 | 46 | keq |
| 10 | f | 1,51 | 5,78 | 41 | mirë | 25 | m | 1,88 | 6,03 | 47 | shkëlqyeshëm |
| 11 | f | 1,52 | 5,52 | 42 | keq | 26 | m | 2,01 | 4,23 | 48 | keq |
| 12 | f | 1,53 | 5,91 | 43 | mirë | 27 | f | 1,66 | 5,14 | 45 | mirë |
| 13 | m | 2,03 | 4,53 | 51 | mirë | 28 | f | 1,93 | 5,23 | 52 | keq |
| 14 | m | 2,05 | 4,56 | 53 | keq | 29 | f | 2,17 | 6,22 | 51 | shkëlqyeshëm |
| 15 | m | 2,63 | 5,07 | 55 | mirë | 30 | m | 1,99 | 6,23 | 56 | shkëlqyeshëm |

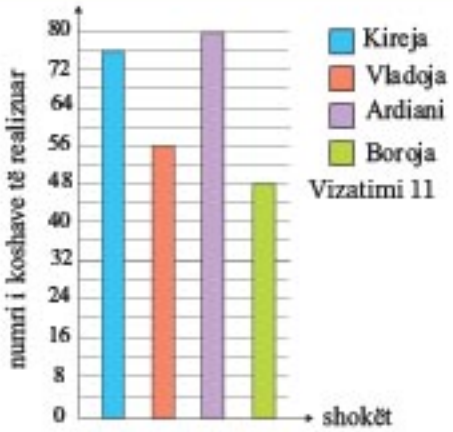
## DETYRA PËR USHTRIME

**1.** Shokët Kirja, Vladoja, Ardiani dhe Boroja, luanin basketboll. Ata realizuan një eksperiment. Secili prej tyre realizoi 80 gjuajtje të lira. Rezultatet e arritura gjatë këtyre gjuajtjeve i paraqitën në diagramin me shtylla në vizatimin 11.

a) Cili nga shokët ka arritur rezultatin më të mirë?

b) Sa është pjesa e koshave të realizuar, e secilit prej shokëve në raport me numrin e përgjithshëm të gjuajtjeve?

c) Përpiloni tabelën me përqindjet e realizimeve të suksesshme të katër shokëve dhe të dhënat e fituara në përqindje paraqitni në diagramin me shtylla dhe atë rrethor.



Vizatimi 11

**2.** Përpiloni listë të kushërinjve ose shokëve tuaj nga 30 familje të ndryshme, por në listë shënoni vetëm nga një anëtar të familjes.

a) Grumbulloni të dhëna nëse kushëriri ose shoku yt në familjen e tij ka ndonjë kafshë shtëpie, mace, qen ose papagall.

b) Të dhënat e grumbulluara rregulloni në tabelë.

c) Të dhënat shprehni në përqindje, e më pas paraqitni në diagram me shtylla dhe atë rrethor.

ç) Sa përqind e familjeve kanë kafshë shtëpiake?

**3.** Çmimi i gjysmë litri kos në periudhën 5 mujore ka qenë

| | Janar | Shkurt | Mars | Prill | Maj |
|---|---|---|---|---|---|
| i lopëve | 45 | 47 | 44 | 40 | 40 |
| i dhenve | 57 | 60 | 55 | 51 | 51 |

Këto të dhëna paraqitni me diagramin me shtylla.

**4.** Me diagram rrethor paraqitni kohën e kaluar përgjatë një dite, në aktivitetet në vijim: gjumë, shkollë, mësim në shtëpi, lojë, tjetër.

**5.** Në diagramin rrethor në vizatimin 12 është prezantuar përfaqësimi në përqindje i 8 llojeve këpucësh në shitjen e një shitoreje në një muaj. Nëse numri i përgjithshëm i këpucëve të shitura në një muaj ka qenë 1000, gjeni numrin e këpucëve të shitura të secilit lloj.



Vizatimi 12

**6.** Në tabelën e mëposhtme është dhënë sasia e reshjeve në Manastir e shprehur në litra për metër katror (l/m²) në vitet e caktuara.

| viti | 1990 | 1995 | 2000 | 2005 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sasia e të reshjeve (l/m²) | 516 | 653 | 403 | 647 | 788 | 381 | 742 | 621 |
| viti | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 |
| sasia e të reshjeve (l/m²) | 850 | 671 | 685 | 538 | 679 | 576 | 649 | 690 |

Paraqitni këto të dhëna në diagram me vija.

# 6.5. Përpunimi dhe interpretimi i të dhënave

## DETYRA 1

Mia dhe Amiri kanë punuar testin nga matematika me 5 detyra, ku çdo detyrë e zgjidhur saktë vlerësohet me 10 pikë. Ata morën këto rezultate:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Mia | 10 | 8 | 9 | 8 | 7 |
| Amiri | 6 | 7 | 10 | 9 | 10 |

Cilin nga kriteret për suksesin do ta përdorësh për të caktuar se cili prej tyre ka qenë më i suksesshëm?



**Mesatarja aritmetike** e dy ose më shumë numrave është numri që fitohet kur shuma e tyre pjesëtohet me numrin e mbledhësve.

Mesatarja aritmetike ndonjëherë quhet edhe **vlera mesatare** ose vetëm **mesatare**.

## SHEMBULLI 1

Selma në fund të gjysmë vjetorit të parë kishte notat në vijim nga lëndët e vitit të parë të arsimit të mesëm:

| | |
|---|---|
| Gjuhë maqedonase dhe letërsi | 5 |
| Matematikë | 4 |
| Gjuhë e parë e huaj | 4 |
| Gjuhë e dytë e huaj | 3 |
| Biologji | 4 |
| Kimi | 5 |
| Fizikë | 4 |
| Histori | 5 |
| Gjeografi | 5 |
| Informatikë | 4 |
| Edukim muzikor | 3 |
| Edukim figurativ | 4 |
| Edukim fizik dhe shëndetësor | 5 |

Sipas kësaj, suksesi mesatar i Selmës në fund të gjysmë vjetorit të parë është

$$\frac{5+4+4+3+4+5+4+5+5+4+3+4+5}{13} = \frac{55}{13} = 4{,}23.$$

**Vërejtje**: Mesatarja aritmetike e numrave gjithmonë gjendet ndërmjet vlerës më të vogël dhe më të madhe.

## SHEMBULLI 2

Me siguri keni vërejtur se Mia dhe Amiri nga detyra 1 kanë mbledhur numër të njëjtë pikësh. Kjo nënkupton që për të caktuar se cili nga nxënësit është më i suksesshëm duhet të vazhdojmë me hulumtimin. Numri mesatar i pikëve të fituara për një detyrë i Mias dhe i Amirit është i njëjtë sepse $\frac{10+8+9+8+7}{5} = \frac{42}{5} = 8{,}4$ dhe $\frac{6+7+10+9+10}{5} = 8{,}4$. Sipas kësaj, që të përcaktojmë se cili nga nxënësit ka sukses më të mirë duhet të krahasojmë pikët e fituara nëpër detyra. Për këtë qëllim na duhen veprime dhe koncepte plotësuese.



Bashkësia e të dhënave, ku të dhënat janë numra ose numra matës të renditur sipas madhësisë, prej më të voglit kah më i madhi, quhet **varg i të dhënave**.



Numri që në vargun e të dhënave shfaqet më shpesh, respektivisht numër më të madh herësh, quhet **modë** (m) e vargut.



Nëse numri i të dhënave në vargun e renditur të të dhënave është tek, atëherë numri që gjendet në mes të atij vargu, quhet **medianë** ($\mathbf{m_e}$) e vargut. Nëse, nga ana tjetër, numri i të dhënave në vargun e renditur të të dhënave është çift, atëherë mesi aritmetik i dy numrave që gjenden në mesin e atij vargu është medianë e vargut.



Në vargun e dhënë të të dhënave, ndryshimi ndërmjet vlerës më të madhe dhe asaj më të vogël të të dhënave quhet **rang** (r).

## SHEMBULLI 3

Vargu i të dhënave të Mias është: 7, 8, 8, 9, 10 nga ku përfundojmë se moda e vargut është $m_1=8$, mediana $m_{e1}=8$, kurse rangu $r_1=10-7=3$. Vargu i të dhënave të Amirit është: 6, 7, 9, 10, 10, nga ku përfundojmë se moda e vargut është $m_2=10$, mediana është $m_{e2}=9$, kurse rangu $r_2=10-6=4$.
Pra, deri më tani mësuam se:

| | Mia | Amiri |
|---|---|---|
| mesatarja | 8,4 | 8,4 |
| moda | 8 | 10 |
| mediana | 8 | 9 |
| rangu | 3 | 4 |

Mbetet të vendosim kriteret për suksesin:

a) Nëse i vrojtojmë vlerat për modën dhe medianën, do të arrijmë në përfundimin se ato janë të përafërta me mesataren, që do të thotë se vargu i të dhënave ka luhatje të vogla nga mesatarja. I tillë është vargu i parë i të dhënave, d.m.th. ai është më konsistente, më i qëndrueshëm.
b) Nëse vrojtojmë vetëm rezultatet më të mira, atëherë vargu i dytë i të dhënave është më i mirë.

## DETYRA 2

Në periudhën 20 ditore shërbimi për riparimin e aparateve elektrike mori numrat në vijim të thirrjeve në bazë ditore:

6 6 3 2 7 4 2 4 7 6
3 4 2 6 2 6 5 3 7 5

Caktoni mesin aritmetik, modën, medianën dhe rangun e vargut të të dhënave.

## SHEMBULLI 4

Në tabelën vijuese janë paraqitur lartësitë e nxënësve të një shkolle

| lartësia (cm) | më të ulët se116 | 116-120 | 121-125 | 126-130 | 131-135 | 136-140 | 141-145 | më të lartë se 145 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| numri i nxënësve | 2 | 38 | 65 | 124 | 131 | 127 | 150 | 74 |

Nëse të dhënat janë paraqitur me tabelë të frekuencave të grupuara, nuk mund të gjendet moda, sepse nuk dihen vlerat e veçanta. Këtu mund të kërkohet **klasa modale** e të dhënave, e cila është klasa e frekuencës më të madhe. Frekuencë më të madhe ka grupi 141 – 145, andaj kjo është klasa modale e këtyre të dhënave. Mediana gjendet në klasën 131 – 135 sepse këtu bën pjesë anëtari i 356 i vargut të të dhënave.

## DETYRA 3

Është dhënë vargu i të dhënave: 11, 3, 5, 7, 9, 11, 6, 8, 8, 7, 5, 10.

a) Shtoni një vlerë ashtu të moda e vargut të jetë 8,

b) Shtoni një vlerë ashtu që mediana të jetë 7,

c) Shtoni një vlerë ashtu që mesi aritmetik të jetë 9.

# Përdorimi i programeve softuerike për llogaritje tabelore

## SHEMBULLI 5

Jovani ka regjistruar temperaturën e ajrit në gradë Celsius, çdo ditë në ora 14, 15 ditë njëra pas tjetrës dhe ka marrë rezultatet në vijim:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 18 | 20 | 21 | 23 |
| 23 | 24 | 21 | 20 | 22 |
| 18 | 17 | 25 | 20 | 26 |

Këto të dhëna mund t'i fusësh në softuer arsimor që ka mundësinë e llogaritjes tabelore. Më pas mund të përzgjedhësh butonat/funksionet në vijim:

- AVERAGE, për të llogaritur mesin aritmetik,
- MOD, për të llogaritur vlerën e modës,
- MEDIAN, për të llogaritur se cila është vlera e medianës.

Në fund me ndihmën e funksionit Chart fitohet paraqitja grafike e të dhënave (vizatimi 13). Gjatë gjithë kësaj mund të përzgjedhësh se çfarë paraqitje grafike do të përdorësh.

| | A |
|---|---|
| 1 | 15 |
| 2 | 18 |
| 3 | 20 |
| 4 | 21 |
| 5 | 23 |
| 6 | 23 |
| 7 | 24 |
| 8 | 21 |
| 9 | 20 |
| 10 | 22 |
| 11 | 18 |
| 12 | 17 |
| 13 | 25 |
| 14 | 20 |
| 15 | 26 |

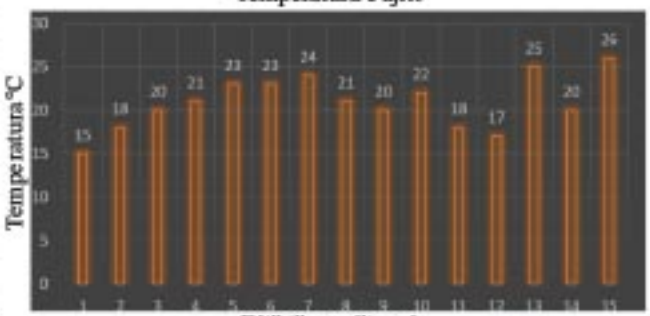
Vizatimi 13

| B | C |
|---|---|
| 20,8667 | |

Temperatura e ajrit

| B | C |
|---|---|
| 20 | |

| B | C |
|---|---|
| 21 | |




Ditë të muajit maj

## DETYRA PËR USHTRIME

1. Gjeni mesin aritmetik dhe rangun e të dhënave

   a) 22, 4, 5, 9 dhe 17; b) 7, 17 dhe 54; c) 4, 2 dhe $6\frac{1}{3}$ ç) 2,18; 5,38; 10,2 dhe 18,6.

2. Pesë nxënës garuan në disiplinën e kërcimit së largu dhe arritën rezultatet në vijim: Mileja kërceu 1,6 m, Agimi 2,05 m, Zorani 1, 85 m, Pavli 1,55 m dhe Stojani 1,9 m. Gjeni vlerën mesatare të gjatësive të kërcimeve.

   a) Sa është gjatësia mesatare e kërcimit të garuesve?

   b) Sa është rangu i gjatësive të kërcimeve?

3. Fitimi kaloi 3 orë në ngjarje të makinës. Dy orët e para ai ngiste makinën me shpejtësi 80 km në orë, kurse orën e tretë me shpejtësi 50 km në orë. Sa rrugë përshkoi ai dhe me çfarë shpejtësie mesatare?

4. Në një klasë ka 30 nxënës. Në fund të vitit shkollor tetë prej tyre kishin notë 5 në matematikë, dhjetë prej tyre kishin 4, nëntë kishin notën 3, kurse të tjerët notën 2.

   a) Caktoni suksesin mesatar të nxënësve të kësaj klase në lëndën e matematikës.

   b) Notat paraqitni në diagramin me shtylla.

5. Në një fermë lopësh "Lopa e zezë – qumështi i bardhë" prodhimi i qumështit në gjashtë muaj kishte vlerat:

| muaji | qumësht (litra) |
|---|---|
| janar | 456 |
| shkurt | 432 |
| mars | 556 |
| prill | 621 |
| maj | 345 |
| qershsor | 432 |

Gjeni prodhimin mesatar mujor të qumështit, medianën dhe modën e këtyre të dhënave.

6. Biologët matën gjatësitë e 190 gjetheve

| gjatësia (cm) | 0-1,9 | 2-3,9 | 4-5,9 |
|---|---|---|---|
| numri i gjetheve | 3 | 33 | 62 |
| gjatësia (cm) | 6-7,9 | 8-9,9 | 10-11,9 |
| numri i gjetheve | 49 | 36 | 7 |

Gjeni klasën modale të këtyre vlerave. Paraqitni të dhënat në diagram me shtylla.

**HULUMTIM**

Hipoteza është supozim i bazuar në një numër të kufizuar faktesh dhe më shpesh është fillimi i një hulumtimi. Ajo patjetër duhet testuar përmes eksperimenteve ose vrojtimeve për tu pranuar ose refuzuar.

Kryeni një hulumtim në mesin e shokëve/shoqeve të shkollës tuaj me qëllim të vërtetimit të hipotezës në vijim: "Përdorimi i inteligjencës artificiale (IA) e përmirëson të mësuarit përmes njoftimeve të personalizuara dhe veglave të përshtatshme". Përzgjidhni mostrën, përgatitni pyetësorin, përpunoni të dhënat e fituara, paraqitni dhe interpretoni rezultatet e fituara.

## DETYRA PËR PËRSËRITJE

1. Dy zare hidhen njëkohësisht, një i kuq dhe një i kaltër (figura 1). Caktoni probabilitetin e ngjarjes:
   a) Shuma e dy zareve është 7,
   b) Shuma e dy zareve është 8,
   c) Shuma e dy zareve nuk është më i madh se 12,
   ç) Shuma e dy zareve është më i madh ose i barabartë me 7.

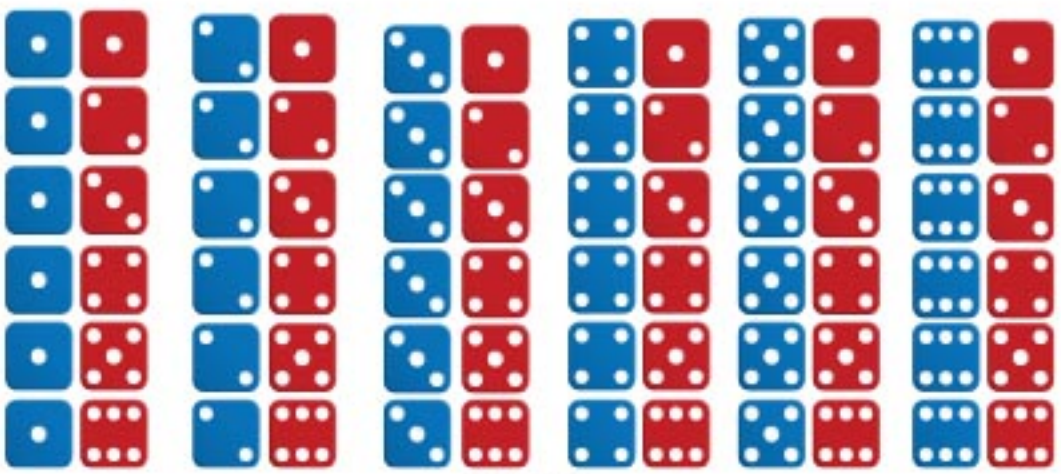


Figura 1

**2.** Rrota e fatit ka 8 fusha dhe shigjetën e cila, pas rrotullimit të rrotës, ndalon në njërin nga numrat prej 1 deri 8 (vizatimi 1).
Sa është probabiliteti që pas një rrotullimi shigjeta do të ndalojë në:
a) numrin 1, b) numër tek,
c) numër më të madh se 3 ç) numër më të vogël se 9.



Vizatimi 1

**3.** Zari hidhet një herë. Gjeni probabilitetin:
a) ka rënë numër ndërmjet 2 dhe 5 b) ka rënë numër i thjeshtë

**4.** Nga kuverta standarde e letrave me 52 karta është nxjerrë një kartë. Sa është probabiliteti që karta e nxjerrë të jetë:
a) "mbret i kuq" b) "fytyrë" c) "fant zemër" ç) maç?

**5.** Një grumbull me 20 lapsa me defekt, gabimisht janë vënë një kuti me 130 lapsa pa mangësi. Lapsat ishin përzier dhe nga kutia nxirret një laps. Sa është probabiliteti që lapsi i nxjerrë të jetë:
a) pa defekt, b) me defekt

**6.** Numrat nga 1 deri 90 janë shkruar në 90 fletëza të ndryshme dhe janë vendosur në një enë jo të tejdukshme. Nga ena nxirret një fletëz. Caktoni probabilitetin që në fletëzën e nxjerrë të jetë:
a) katror i plotë, b) numër i pjesëtueshëm me 5, c) numër dyshifrorë

**7.** Masat e 100 individëve janë dhënë në tabelën në vijim

| masa (kg) | 20-39 | 40-45 | 46-50 | 51-55 |
|---|---|---|---|---|
| frekuenca | 6 | 8 | 22 | 31 |
| masa (kg) | 56-60 | 61-70 | 71-80 | 80+ |
| frekuenca | 12 | 11 | 5 | 5 |

Gjeni klasën modale të këtyre masave. Të dhënat paraqitni në diagram me shtylla.

**8.** Pikët nga testimi me shkrim nga matematika që i fituan nxënësit e një klase janë paraqitur në tabelën e frekuencave të grupuara.

| pikët | 0-25 | 26-49 | 50-71 | 72-87 | 86-100 |
|---|---|---|---|---|---|
| numri i nxënësve | 3 | 8 | 13 | 10 | 8 |

Caktoni klasën modale.

**9.** Aceja shpesh vonohet në orën e parë të mësimit. Numrin e minutave të mungesave, gjatë muajit maj, e shkroi në tabelën në vijim të frekuencave:

| numri i minutave | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| numri i ditëve | 1 | 3 | 2 | 4 | 6 | 3 | 4 | 4 | 3 | 1 |

Caktoni modën dhe medianën e vargut të të dhënave.

**10.** Në një hapësirë kishte 16 njerëz mosha mesatare e të cilëve ishte 20 vjeç, kurse në një tjetër hapësirë kishte 24 njerëz mosha mesatare e të cilëve ishte 40 vjeç. Sa është mosha mesatare e të gjithë 40 njerëzve nga të dy hapësirat?

**11.** Përgjatë 10 ditëve është vrojtuar shitja e çokollatave në një shitore. Ditën e parë ishin shitur 23 çokollata, më pas, 5 ditët në vijim, shitja u rrit me nga 2 çokollata në ditë, kurse 4 ditët e fundit shitja mbeti e njëjtë me ditën e gjashtë.

a) Paraqitni të dhënat në tabelë.

b) Përpiloni diagram me vija për shitjen.

**12.** Në një shitore të telefonave celularë, numri i telefonave të shitur përgjatë gjashtë muajve të parë të vitit ishte me sa vijon:

| muaji | numri i telefonave të shitur |
|---|---|
| janar | 30 |
| shkurt | 55 |
| mars | 45 |
| prill | 70 |
| maj | 50 |
| qershor | 25 |

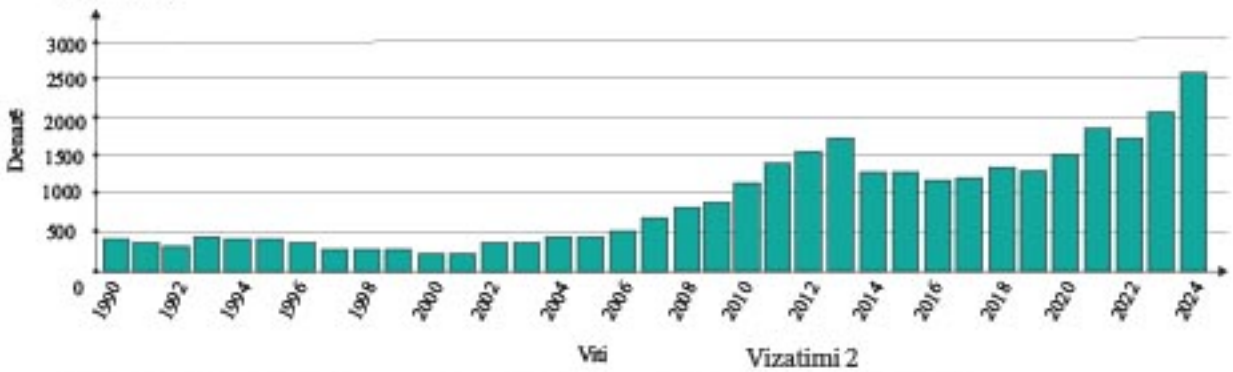
Paraqitni me piktogram numrin e celularëve të shitur.

**13.** Numri i banorëve të 4 qyteteve është dhënë me tabelën në vijim.

| Qyteti | Banorë |
|---|---|
| Manastiri | 80 000 |
| Kumanova | 75 000 |
| Prilepi | 65 000 |
| Tetova | 50 000 |

Përpiloni një piktogram për këto të dhëna.

**14.** Çmimi i një produkti nga viti 1990 deri në vitin 2024 ka ndryshuar sikurse është paraqitur në vizatimin 2.




Vizatimi 2

a) Në cilin vit produkti ka pas çmim më të ulët, e në cilin çmim më të lartë?

b) Në cilat vite çmimi ka lëvizur ndërmjet 1500 dhe 2000 denarë?

c) Në cilat 3 vite të njëpasnjëshme çmimi mesatar është rreth 200 denarë?

**15.** Në këqyrjen sistematike janë matur lartësitë e 10 nxënësve të një klase dhe janë fituar lartësitë në vijim të dhëna në cm:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 172,0 | 175,5 | 184,0 | 167,4 | 169,2 |
| 175,5 | 183,2 | 175,5 | 182,3 | 168,3 |

Me ndihmën e softuerit arsimor, caktoni mesin aritmetik, modën, medianën, e më pas përzgjidhni edhe paraqitjen përkatëse grafike.

**16.** Festivali i shfaqjeve të dramave të artistëve amatorë çdo vit mbahet në të njëjtën kohë. Komisioni vlerësues është i përbërë nga 5 anëtarë, të cilët vlerësojnë në mënyrë të pavarur me pikë nga 6 deri 10. Në festival kishte 7 drama të ndryshme amatore dhe janë fituar vlerësimet në vijim të komisionit:

| shfaqja numër | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| anëtari i parë | 7 | 8 | 9 | 10 | 9 | 8 | 10 |
| anëtari i dytë | 8 | 9 | 7 | 6 | 7 | 8 | 10 |
| anëtari i tretë | 9 | 8 | 6 | 7 | 7 | 10 | 6 |
| anëtari i katërt | 7 | 8 | 7 | 8 | 10 | 6 | 7 |
| anëtari i pestë | 8 | 9 | 10 | 9 | 6 | 6 | 10 |

Me anë të softuerit arsimor caktomi mesin aritmetik, modën dhe medianën, e më pas përzgjidhni edhe paraqitjen përkatëse grafike të të dhënave për secilën dramë, dhe në fund përcaktoni kush është fitues i festivalit.

**17.** Mesi aritmetik i numrave 173, 158, 196, 151, 205, 214 dhe $x$ është 163. Caktoni vlerën e $x$.

**18.** Distanca, në kilometra, e 40 të punësuarve deri te vendi i punës, është dhënë me tabelën:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 | 10 | 20 | 25 | 11 | 13 | 7 | 12 | 31 |
| 19 | 10 | 12 | 17 | 18 | 11 | 32 | 17 | 16 | 2 |
| 7 | 9 | 7 | 8 | 3 | 5 | 12 | 15 | 18 | 3 |
| 6 | 12 | 7 | 12 | 14 | 2 | 9 | 6 | 15 | 15 |

Përpiloni tabelë me frekuenca të grupuara, me klasa me gjatësi 5.

a) Në çfarë distance, nga vendi i punës, jeton numri më i madh i të punësuarve?

b) Sa punëtorë, e shprehur në përqindje, jetojnë në distancë më të vogël se 15 kilometra nga vendi i punës?

c) A ia vlen që punëdhënësi të sigurojë transportin në masën e një rroge mesatare, për gjithë të punësuarit që jetojnë në distancë më të madhe se 16 kilometra, nëse dihet se për transportin e çdo punëtori paguhet shtesë në masën e 10% të pagës??

**19.** Hidhen 30 herë, njëkohësisht, tri monedha. Numri i "fytyrave" të paraqitura është dhënë në tabelë:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 0 |
| 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 0 |

Përpiloni tabelën e frekuencës dhe paraqitni të dhënat në diagram me shtylla.

**20.** Në një kavanoz ka 24 topa të vegjël prej qelqi nga të cilët disa janë të gjelbër, e të tjerët janë të kaltër. Tërhiqet një top i tillë. Probabiliteti që të jetë i gjelbër është $\frac{2}{3}$. Caktoni numrin e topave të qelqtë të kaltër në këtë kavanoz.

**21.** Në një kuti ka 12 topa të vegjël, prej të cilëve saktësisht ka $x$ topa të zinj.

a) Sa është probabiliteti që kur të nxjerrim një top ai të jetë i zi?

b) Nëse në kuti shtojmë edhe 6 topa të zinj, probabiliteti tani që të nxirret top i zi është dyfish më i madh nga probabiliteti paraprak. Caktoni vlerën për $x$.

**22.** Në një kavanoz ka 5 topa të vegjël të kuq e disa të kaltër. Dihet se probabiliteti që të nxirret një top i kaltër është dy herë më i madh se probabiliteti që të nxirret top i kuq. Caktoni numrin e topave të kaltër në kavanoz.

**23.** Zari hidhet në dysheme e cila ka qilim në formë të drejtkëndëshit me gjatësi 3 m dhe gjerësi 2 m. Në qilim ka të vizatuar një rreth me diametër 1 m. Sa është probabiliteti që zari do të bjerë në atë pjesë të qilimit që është:

a) jashtë rrethit,

b) brenda rrethit?

# Literatura e shfrytëzuar


1. В.М. Клопский, З.Д. Скопец, М.И. Ягодовский - Геометрия. Учебное пособие для 9 и 10 классов-Просвещение (1977)
2. Polygons – Ismail Ersozoglu, Zambak
3. Mathematics, textbook for class IX, NCERT
4. VEGA 1, i-učbenik za matematiko v 1. letniku gimnazije,Avtorji: Andreja Mohorčič, Simona Pustavrh, Mateja Škrlec, Helena Kapus, Vesna Zmazek, Oskar Jericijo, Irena Rauter Repija